四辺形断面管内の完全発達乱流と熱伝達のDNS

DNS of Fully Developed Turbulent Flow and Heat Transfer in a Duct of a Quadrilateral Cross Section

福島直哉, 東大院, 文京区本郷7-3-1, E-mail:fukusima@thtlab.t.u-tokyo.ac.jp 笠木伸英, 東大工, 文京区本郷7-3-1, E-mail:kasagi@thtlab.t.u-tokyo.ac.jp

Naoya Fukushima, Dept. of Mech. Eng., The University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan Nobuhide Kasagi, Dept. of Mech. Eng., The University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan

Direct numerical simulation (DNS) in a square duct is employed to examine the effect of walls on turbulent flow and thermal fields. The Reynolds number Re_{τ} , based on the averaged wall friction velocity u_{τ} and the hydrodynamic diameter D, i.e., the duct width, is set to be 300. The Prandtl number of fluid is assumed to be 0.71. The wall-normal direction is ambiguous because of the existence of two intersecting walls. To resolve this issue, we employ a generalized coordinate system, where we define the three normal directions depending upon the magnitudes of turbulent kinetic energy. We apply this generalized coordinate system to variables, such as the mean velocity, temperature gradients, stress anisotoropy tensor and turbulent heat flux, and investigate the effect of walls on turbulent flow and temperature fields to get improved and more generalized knowledge on the near-wall turbulent transport mechanism.

1.序論

乱流における運動量、熱、物質伝達は様々な応用技術分野 で重要である。多くのターボ機器、熱交換器では、熱伝達、圧 力損失特性向上のため複雑な流路形状を用いている。境界条 件としての固体壁は、大きな速度勾配、粘着条件(u=w=0)、不 透過条件(v=0)により、レイノルズ応力に非等方性、非一様性 をもたらす。この応力の非等方性、非一様性は、例えば、Prandtl の第二種二次流れを引き起こし、結果的に乱流構造を変化さ せる。その運動量、熱輸送に及ぼす影響は非常に大きい。そ れ故、より高効率な流体伝熱機器を設計するには、複数の壁 が乱流に及ぼす影響の物理的な機構を理解し、複雑形状内の 流れ場、温度場を十分な精度で予測可能な乱流モデルを開発 することが鍵となる。

従来、乱流の流れ場、温度場への壁の影響について、実験、 数値計算により多くの研究がなされてきた。しかし、その多 くは、角や波形壁のような複雑な幾何形状の壁面ではなく、 一つの平面壁の影響のみを考慮している。例外としては非円 形管がある。例えば、Gavrilakis⁽¹⁾、Huser and Biringen⁽³⁾は低Re 数で正方形ダクトのDNSを行い、乱流統計量を得た。しかし、 温度場については、DNSデータは存在しない。実験では、粗 面ダクトの伝熱について広く調べられているが、平滑面ダク トについてはHirotaら⁽²⁾のデータが唯一のものである。これ らの研究にも関わらず、複数の壁の乱流の流れ場、温度場へ の影響の理解は不十分である。本研究では、正方形ダクトで 流れ場、温度場についてDNSを行い、複数の壁の影響を調べ る。

2.計算手法

計算対象と座標系をFig.1に示す。計算領域を x_1 、 x_2 、 x_3 方向に $5\pi\delta \times 2\delta \times 2\delta$ (格子点 $128 \times 65 \times 65$)とした。計算領域内の流れ方向に十分離れた2点間で、全ての速度2点相関は十分に小さくなることを確認した。平均壁面摩擦速度 u_τ 、水力学的直径 D(ダクト幅 2δ)で無次元化されたレイノルズ数 $Re_\tau = 300$ とした。熱は passive scalar であると仮定し、Pr = 0.71とした。壁面で速度場に no-slip条件、温度場に等熱流束条件 (Kasagi et al., 1992)⁽⁴⁾、流れ方向に周期境界条件を課した。1step毎に、Navier-Stokes方程式を fractional step法 (Kim





Figure 1. Flow geometry and coordnate system

Figure 2. Mean streamwise velocity, U_1/U_c





Figure 3. Mean temperature, T/T_c

Figure 4. Root-mean-square streamwise velocity, $\sqrt{u_1^2} / U_c$

& Moin, 1984)⁽⁵⁾により時間積分した後、energy方程式の時間積 分を行う。時間進行法は非線形項に3次精度のRunge-Kutta法 (Rai & Moin, 1991)⁽⁶⁾、粘性項にCrank-Nikolson法を、空間離散 化は2次精度中心差分を用いた。

3.計算結果及び考察

3.1. 乱流統計量

流れ方向平均速度 U_1/U_e 、平均温度 T/T_e を Figs. 2,3 にそれ ぞれ示す。c はダクト中心値であることを示す。2 次流れによ り高運動量の流れが中心から角へ運ばれるために、 U_1/U_e の等 値線は角に向かって歪んでいる。 T/T_e の等値線の歪みは U_1/U_e の歪みに非常によく似ているが、歪みは幾分小さい。これは2 次流れによる熱伝達の促進が運動量輸送の促進より小さいこと を示す。高 Re 数での実験⁽²⁾と等しい傾向である。

流れ方向速度のrms、*u*_{1,rms} (Fig. 4)、温度のrms、*t_{rms}* はそれらの



Figure 5. Dissipation, - ε



Figure 6. Cross-correlation coefficient, R_{1t}



Figure 7. Cross-correlation coefficient, R_{2t}

Figure 8. Turbulent heat flux, $-u_2 t$

平均成分に比べ、角への歪みが大きい。 t_{rms} の分布と $u_{1,rms}$ の分 布を比較すると、定性的には似ているが、 t_{rms}/T_c の値は $u_{1,rms}/U_c$ より大きい。この結果は高Re数での実験⁽²⁾の結果と 逆の結果である。

乱流エネルギーの分布は流れ方向速度のrmsと良く似た分布 となり、等値線は角へ大きく歪む。Fig. 5 に散逸率を示す。散 逸率は壁面近傍で大きく、ダクト中心で小さいが、対角線付 近で等値線が角へと張り出している。 _____

変動成分 $u_1 \ge t$ の相互相関係数 $R_{1t} = -u_1t/(\sqrt{u_1^2}\sqrt{t^2})$ をFig. 6 に示す。 $u_1 \ t$ のrms と同様に、等値線は角に向かって強く歪 んでいる。相互相関係数 R_{1t} は下壁近傍で最大値をとり、角に 向かって急激に減少し、0 になる。Fig. 7 に示すように、 $R_{2t} = -u_2t/(\sqrt{u_2^2}\sqrt{t^2})$ は下壁で0で、急激に増加して $x_2^+ = 10$ で0.45になる。 R_{1t} と同様、 R_{2t} も角に向かって急激に減少する。 下壁近傍と異なり、 R_{2t} は側壁近傍では負の値をとる。 $R_{12} \ge R_{2t}$ を比較すると、定性的、定量的ともに、良く似ている。こ の結果は R_{2t} の絶対値が R_{12} の絶対値より比較的小さかった、 高 Re 数での実験⁽²⁾での結果と異なっている。

乱流熱流束 $-u_2t$ の等値線をFig. 8に示す。 $-u_2t$ は平均壁面摩 擦速度 u_{τ} と平均壁面摩擦温度 t_{τ} で無次元化されている。 $-u_2t$ の 分布特性は R_{2t} の分布特性と似ているが、 $-u_2t$ は R_{2t} より、側 壁によって弱められる。相互相関係数 R_{2t} 、乱流熱流束 $-u_2t$ で の、このようなダクトの対角線に対して非対称な構造は、乱 れ速度 u_2 が対角線近傍で壁垂直方向と接線方向の速度の両方 の性質を持つことを示す。また、 $-u_2t$ と $-u_1u_2$ は非常に良く似 ているが、 $u_{\tau} \ge t_{\tau}$ で無次元化すると、絶対値は $-u_2t$ が $-u_1u_2$ よ り大きい。高 Re 数での実験⁽²⁾では逆の結果が示されている。

3.2. 乱れエネルギー強度に基づく一般座標系

上で述べたようにダクトの対角線に対して非対称な構造は、 乱れ速度 u₂、u₃が対角線近傍で壁垂直方向と接線方向の速度 の両方の性質を持つことを示す。これは、2つの交差する壁の 存在により壁垂直方向があいまいとなるからである。それ故、



Figure 9. Eigenvector of $u_i u_j$ with the largest eigenvalue, λ_s



Figure 10. Eigenvector of $u_i u_j$ with the smallest eigenvalue, λ_n





Figure 12. Anisotropy tensor, b_{22}



Figure 13. Anisotropy tensor, b_{nn}



Figure 11. Eigenvector of $u_i u_j$ with the other eigenvalue, λ_i

Figure 14. Anisotropy tensor, $b_{..}$

複雑な形状での乱流の流れ場、温度場の研究、その物理機構 の理解に、従来のデカルト座標系が適当か、との疑問が生じ る。そこで、本研究では乱れエネルギーの強度から座標軸を 決定する一般座標系を導入する。座標軸はそれぞれ最大の乱 れエネルギーを含む方向 x_s、最小の乱れエネルギーを含む方 向 x_n、それらに直交する方向 x_t として決定する。これらはそ れぞれレイノルズ応力の最大固有値、最小固有値、もう一つ の固有値に対応する固有ベクトルの方向となる。また、それ ぞれの方向のエネルギーの大きさは固有値の大きさとなり、 次のようにして変換される。

$$\mathbf{Q}^{T} \overline{u_{i}u_{j}} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_{s} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{t} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{s}u_{s} & 0 & 0\\ 0 & \overline{u_{t}u_{t}} & 0\\ 0 & 0 & \overline{u_{u}u_{t}} \end{pmatrix}$$

ここで、 \mathbf{q}_i は固有値 λ_i に対応する固有ベクトルであり、 $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_s \ \mathbf{q}_i \ \mathbf{q}_n)$ である。また、 $\lambda_s \ge \lambda_t \ge \lambda_n$ とする。

Fig.9に最大の乱れエネルギーを含む方向 x_sの固有ベクトル を示す。ベクトルの大きさは1に規格化されており、等値線は x₁方向成分を示す。最大の乱れエネルギーを含む方向 x_sは流 れ方向にほぼ平行であるが、わずかに最も近い壁に向かって 傾いている。Fig. 10 に示される様に、最小の乱れエネルギー を含む方向 x_n はダクトの対角線近傍以外では最も近い壁にほ ぼ垂直であり、壁近傍では流れ方向への傾きも小さい。これ





Figure 15. Second invariant of b_{ij} , II

Figure 16. Third invariant of b_{ij} , III

は乱流モデルのwall damping関数を最も近い壁からの距離の関数と定義することが良好な近似であることを示している。Fig. 11に示すとおり、x_iの方向はx₂ - x₃断面内でx_nの方向にほぼ垂直な方向であり、最も近い壁面にほぼ平行である。

3.3. 流れ場への複数の壁の影響

この一般座標系をレイノルズ応力の非等方テンソル *b_{ii}* = *u_iu_i* / 2*k* - 1/3 に適用する。Fig. 12 に *b*₂₂ を示す。乱流熱 流束 $-u_{,t}$ と同じように、 b_{22} は壁垂直方向と接線方向の速度の 性質を持つ。一般座標系における非等方度 b_{m} , b_{tt} をFigs. 13, 14 にそれぞれ示す。Figs. 10, 11 の固有ベクトルの方向 x_n、x_r から判断すると、 b_m は壁面垂直速度成分の性質のみを、 b_t は接 線方向速度成分の性質のみを持つ。それぞれの方向の速度成 分の性質はFig. 13, 14から明確に理解できる。ダクト全域で、 b_{m} の値は b_{t} の値より小さい。また、 b_{m} は壁面の影響で角で 強く抑制されるにも関わらず、b_mの等値線は角に向かって歪 んでいる。一方、b_#の等値線は壁垂直二等分線上において壁面 に向かって歪んでいる。ダクトの角以外では、壁に近づくに つれ、非等方テンソル*b_m*は減少し、*b_t*は増加する。結果、一 つの平面壁の場合と同様、1つの方向のレイノルズ主応力が0 となる2-component乱流が壁面近傍に見られる。角のごく近傍 のみで、 b_{tt} は b_{tm} と同じ程に小さくなり、2つの方向のレイノ ルズ主応力が0となる1-component 乱流が発達する。複数の壁 面のdampingの効果は非常に狭い領域に限られている。

Figs. 15, 16に非等方テンソルの第二不変量 II = $-b_{ij}b_{ji}/2$ 、第 三不変量 III = $b_{ij}b_{jk}b_{ki}/3$ を示す。II = III = 0 で等方乱流を表し、 II + 3III + 1/9 = 0 で2-component乱流を、II = -1/3, III = 2/27 で 1-component 乱流を表す。上述したように、ダクト中心でレイ ノルズ応力の等方性が高く、対角線上に等値線の角への張り 出しが見られる。また、角近傍以外の壁面近傍に2-component 乱流が見られ、角ごく近傍に1-component乱流が限られること も合わせて確認できる。また、壁からの粘性距離が 40 以下の 壁に近い領域においては、等値線が最も近い壁面にほぼ平行 である。

複数の壁面がレイノルズ応力の非等方性、非一様性に及ぼ す影響を考察する。まず、壁面での大きな速度勾配、その結 果生じる大きな生成項 $P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \partial U_j / \partial x_k$ がレイノルズ応力に 与える影響を考える。

一つの平面壁の場合、従来のデカルト座標系では、まず非 常に大きな速度勾配により、流れ方向乱れエネルギーと主せ ん断レイノルズ応力が生成される。その際、流れ方向乱れエ ネルギーと主せん断レイノルズ応力は生成項において相互に 作用している。更に、流れ方向以外の方向の乱れエネルギー は圧力歪み相関項により流れ方向乱れエネルギーから供給さ





Figure 17. Mean rate-of-strain tensor, S_{ss}



Figure 19. Mean rate-of-strain tensor, S_{st}





tensor, S.,

0.2

Figure 20. $c_{\mu 12}$ in a turbluent channel flow



Figure 21., $c_{\mu ss} c_{\mu nn}$ in a turbulent channel flow



Figure 22. $c_{\mu ss}$ in a turbulent square duct flow



Figure 23. $c_{\mu nn}$ in a turbulent square duct flow



Figure 24. $c_{\mu 22}$ in a turbulent square duct flow

Figure 25. $c_{\mu 13}$ in a turbulent square duct flow

れる。それ故、レイノルズ応力の正確な予測のためには、非 保存量のせん断成分を含む、それぞれのレイノルズ応力の複 雑な相互作用を正確に理解する必要がある。しかし、乱れエ ネルギーによる一般座標系を生成項に適用すると、レイノル ズ応力の対角化のため、生成項の対角成分は

$$P_{\alpha\alpha} = -\overline{u_{\alpha}u_{\alpha}}\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = -\overline{u_{\alpha}u_{\alpha}}S_{\alpha\alpha}$$
(1)

となる。(αについて縮訳をとらない。)レイノルズ応力間の相互

作用はなく、それぞれの方向の乱れエネルギーのみで、生成 項は比較的単純に表現される。また、対角成分については、平 均速度勾配テンソル $\partial U_i/\partial x_i$ と平均変形速度テンソル S_{ii} は一 致する。従来のデカルト座標系に比べ、この一般座標系を適 用すると生産項が支配的な領域において、レイノルズ応力を S_{ii} で比較的簡単に表現できると期待できる。また、平均速度 勾配テンソル $\partial U_i/\partial x_j$ を乱れエネルギー生成に直接寄与する部 分とそれ以外の部分に分ける事ができる。Figs. 17, 18, 19 に S_{ss} , S_{m} と S_{st} をそれぞれ示す。これら以外の成分の絶対値は 比較的小さい。S, は他の平均変形速度テンソルの成分に比べ 非常に大きいが、式(1)から分かる様に、乱流エネルギーの生 成には直接寄与しない。また、S_wの値は負であるので、x_w方向 乱れエネルギーを強める方向に寄与する。特に角近傍 $(x_2^+, x_3^+ \le 20)$ 以外の壁面付近では x_s 方向乱れエネルギーを非常 に強める傾向にあるが、小さな値の等値線のダクト中心から 角への歪みも大きい。S_mとは逆に、S_mは角近傍以外の壁面付 近で x₁ 方向乱れエネルギーを強く抑制する傾向にあるが、中 心から角への等値線の張り出しも大きい。S_#の値が小さいこと を考えると、結果的に S_{ss} 、 S_{nn} 、 S_{tt} は x_s 、 x_n 、 x_t 方向の非等方 度生成に寄与している。

上述したように、この一般座標系では平均変形速度テンソ ルとレイノルズ応力の間に比較的簡単な関係があると期待で きるので、線形 k-εモデルを仮定し、

$$-\overline{u_{i}u_{j}} + \frac{2}{3}\delta_{ij}k = v_{ij}\left(\frac{\partial U_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial U_{j}}{\partial x_{i}}\right) = 2c_{\mu_{ij}}\frac{k^{2}}{\varepsilon}\overline{S_{ij}}$$
(2)

比例定数 $c_{\mu i j}$ の分布について考える。比較のために、一つの平 面壁の例としてチャネル乱流の場合を考える。従来のデカル ト座標系における $c_{\mu 12}$ と一般座標系における $c_{\mu ss}$ 、 $c_{\mu nn}$ の分布 を、Figs. 20, 21 にそれぞれ示す。従来のデカルト座標系では 中心から $y^+ = 60$ まではほぼ一定の値をとるが、 $y^+ = 60$ から壁 面は近づくと0へと急激に減少する。このため、wall damping 関数が必要となる。それに対して、この一般座標系で、 $c_{\mu ss}$ は 壁からの粘性距離が70-110で0.4で一定で、壁に近づくと大き くなり、粘性距離が30で0.6の極値をとる。 $c_{\mu nn}$ は壁面近傍と 中心以外ではほぼ一定値0.3 をとる。 $c_{\mu nn}$ ともに、 $c_{\mu 12}$ と は壁面近傍で逆の傾向を示している。

Figs. 22, 23 にそれぞれ示す様に、正方形ダクトでは $x_2^+, x_3^+ \leq 70$ 以外の領域で $c_{\mu ss}$ 、 $c_{\mu nn}$ は一つの平面壁の場合と定 性的、定量的に非常に良く似た分布を示す。この領域におい ては、一つの平面壁と相似の機構により、レイノルズ応力の 非等方性、非一様性が生成されると考えられる。それに対し、 $x_2^+ = x_3^+ = 40$ を中心とする $x_2^+, x_3^+ \leq 70$ の領域においては、 $c_{\mu ss}$ 、 $c_{\mu nn}$ の値が非常に大きい。また、前述のFigs. 15-18からも、こ の領域では乱れエネルギーを生成する平均速度勾配の値の割 に、非等方性が大きいことが分かる。この領域では複数の壁 面の影響のため一つの平面壁と異なる機構により、平均速度 勾配の値に比べ非等方性が強められていると考えられる。ど のような機構が寄与しているかについては今後の研究課題で あるが、非等方性が高い壁面の近くにも関わらず、平均速度 勾配が小さいことにより、生成項以外の項が支配的になり易 い事が原因の一つであると考えられる。

また、従来のデカルト座標系における $c_{\mu 22}$ 、 $c_{\mu 13}$ を Figs. 24, 25 に示す。 $c_{\mu 13}$ は $x_2^+ \ge x_3^+$, $x_2^+ \ge 40$ で Fig. 20 の $c_{\mu 12}$ に似た分布 を示す。しかし、 $c_{\mu 22}$ 、 $c_{\mu 13}$ は負の値を示し、対角線に非対称





Figure 26. Turbulent heat flux, $-u_{c}t$



Figure 27. Mean temperature gradient, $\partial T / \partial x_s$



Figure 28. Turbulent Prandtl number, Pr_{ss}

Figure 29. Turbulent Prandtl number, Pr_{33}

であるなど複雑な分布である。*c*_{µ22}、*c*_{µ13} に比べ、*c*_{µss}、*c*_{µnn} は 非常に単純な分布である。

3.4. 温度場への複数の壁の影響

乱流エネルギーに基づく一般座標系を適用した乱流熱流束 $-u_{st}$ 、平均温度勾配 $\partial T/\partial x_{s}$ をFigs. 26, 27にそれぞれ示す。Fig. 6に示した様に、流れ方向乱れ速度と乱れ温度の相関がダクト の広い範囲で高いので、乱流熱流束の $-u_{nt}$, $-u_{t}$ の2成分はほ ぼ0となり、 $-u_{st}$ のみが大きな値を持つ。 $-u_{nt}$, $-u_{t}$ の微小な値 は、乱れ温度tと流れ方向乱れ速度 u_{s} の相関のずれにより生じ る。レイノルズ応力と平均速度勾配テンソルの関係同様、 $-u_{st}$ に対応する平均温度勾配 $\partial T/\partial x_{s}$ は比較的小さく、 $-u_{nt}$ に対応 し、乱れエネルギー生成に寄与しない平均温度勾配 $\partial T/\partial x_{n}$ は 非常に大きい。乱流プラントル数 Pr_{ij} を次のように定義する。

$$-\overline{u_i t} = \alpha_{t_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$
(3)

$$\Pr_{ij} = \frac{v_{t_{ij}}}{\alpha_{t_i}} \tag{4}$$

Figs. 28, 29に乱流プラントル数 Pr_{ss} 、 Pr_{33} を示す。 Pr_{33} は対角線 に対して非対称であり、 $\partial U_1/\partial x_2 = 0$, $\partial T/\partial x_2 = 0$ となる点近傍 で複雑な分布をしているが、ダクトのほぼ全域において、1 に 近い値をとる。 Pr_{ss} の値は $20 \le x_2^+, x_3^+ \le 70$ で比較的大きく、ダ クト中心で小さいもの、比較的一定の値を保っている。この ことからも、比較的複雑な形状を持つ正方形ダクトにおいて も、速度場と温度場の相似性は高いことが分かる。

4. 結論

・複数の壁の影響がある正方形ダクトのDNSを行い、流れ場、 温度場について乱流統計量を得た。

・乱れエネルギーの強度に基づく一般座標系を適用して、複数の壁が乱流の流れ場、温度場に与える影響を調べた。 その結果、

・従来のデカルト座標系に比べ、乱流エネルギーに基づく一般

座標系の適用により、それぞれの軸 x_s 、 x_n 、 x_t の方向の性質を それぞれ明確にできる。

・平均速度勾配、平均温度勾配のごく一部が速度、温度の乱れ エネルギー生成に直接寄与している。

・複数壁の damping による 1-component 乱流はダクトの角ごく 近傍に限られる。

・x₂⁺,x₃⁺ ≤ 70の領域では複数の壁の影響が現れる。

・x⁺₂,x⁺₃ ≤ 70 以外の領域では壁の影響は一つの平面壁の場合と 変わらないと考えられる。

・乱流プラントル数は比較的一定に分布していることから、複数の壁の影響にも関わらず、正方形ダクトでは速度場と温度場の相似性は保持されている。

参考文献

(1)Gavrilarkis, S., "Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight duct," J. Fluid Mech. **244**(1992), pp. 101-129

(2)Hirota, M., Fujita, H., Yokosawa, H., Nakai, H. and Itoh, H., "Turbulent heat transfer in a square duct," Int. J. Heat and Fluid Flow. **18**(1997), pp. 170-180

(3)Huser, A. and Biringen, S., "Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct," J. Fluid Mech. **257**(1993), pp. 65-95

(4)Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A., "Direct Numerical Simulation of Passive Scalar Field in a Turbulent Channel Flow," J. Heat. Trans.-T. ASME. **114**(1992), pp. 598-606

(5)Kim, J. and Moin, P., "Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navie-Stokes Equations," J. Comp. Phys. **59**(1985), pp. 308-323

(6)Rai, M. and Moin, P., "Direct Simulations of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes," J. Comp. Phys. **96**(1991), pp. 15-53