

高レイノルズ数壁面近傍の流れ特性を利用した壁乱流計算の効率化

An Efficient Numerical Simulation Technique for Wall Turbulent Flows Making Use of Near-Wall Flow Property at High Reynolds Number

横嶋 哲, 神戸大学大学院自然科学研究科, 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: 970d925n@kobe-u.ac.jp
 中山 昭彦, 神戸大学大学院自然科学研究科, 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: nakayama@kobe-u.ac.jp
 Satoshi YOKOJIMA, Grad. School of Science and Tech., Kobe Univ., 1-1, Rokkodai, Nada, Kobe 657-8501 Japan
 Akihiko NAKAYAMA, Grad. School of Science and Tech., Kobe Univ., 1-1, Rokkodai, Nada, Kobe 657-8501 Japan

DNS results performed at a few different Reynolds numbers indicate that the pressure gradient in the wall normal direction is much smaller than those in tangential directions within about 10 viscous units of the wall. This near-wall constant pressure property that is related to the blocking effects of solid walls, is made use of in developing an efficient numerical simulation technique for Navier-Stokes equations. Calculations have been performed with different mesh sizes for channel flow test case and results are seen to agree very well with the conventional DNS results and yet the technique leads to maximum computational saving of 80% compared with the conventional DNS.

1. 緒論

今日の CFD の課題のひとつに“高 Reynolds 数(以下, Re 数)流れの予測”が挙げられる。DNS(Direct Numerical Simulation)の適用が非常に低い Re 数に限られることはよく知られているが, 大規模渦のみ直接解像する LES(Large Eddy Simulation)でも壁乱流で乱れの発生を抑えるには壁近傍で高解像度が必要であり, これは LES の長所を打ち消しかねない。また, 乱れを全てモデル化する Reynolds 平均モデル(RANS)も, 現在主流の壁面効果を考慮した低 Re 数型モデルは壁近傍に相当の解像度を要する⁽¹⁾。これはたとえ二次元計算でも高 Re 数流れでは計算負荷は相当高まることを意味し, DNS, LES, RANS のいずれの場合も壁乱流の予測には多大な計算負荷を伴う。

粘着壁近傍の乱れは粘性スケールで整理できるが, 一方で壁上のせん断応力の有無によらない別のスケールもある。これは壁の法線方向運動の抑制効果(ブロッキング)によるもので, 粘性効果が粘着条件による接線方向運動の抑制であるのに対し, ブロッキングは主に連続性を満たすように働く圧力の効果で, 影響範囲は境界形状など全体のスケールに依存すると推察される。ブロッキング影響下では境界法線方向圧力勾配は接線方向のそれらに比べて小さいので, そこでは圧力の法線方向解像度は速度場のそれに比べ粗くてもよいと考えられる。本報ではこのような特性を利用した, 非圧縮性流体数値解法の効率化手法を提案する。適用例は乱流モデルを要しない DNS に限るが, 本手法は DNS のみならず高 Re 数流れの LES, RANS 計算の効率化にも応用できる。

2. 壁面近傍における瞬時運動方程式の特性

密度 ρ , 動粘性係数 ν の非圧縮流体の壁乱流を考える。 x_1, x_2, x_3 をそれぞれ主流, 鉛直上向き及びスパン方向座標軸, u_i^* を i 方向の瞬時速度成分, p^* を瞬時圧力を ρ で除したものとする。粘着条件が満たされる壁面上では速度成分は全てゼロであるが, 接線方向成分 u_1^*, u_3^* は粘性

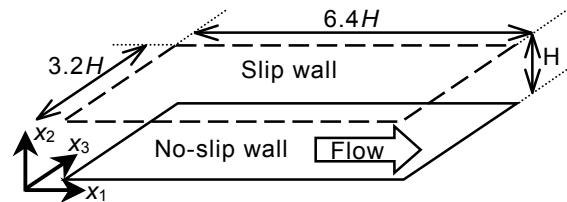


Fig. 1 Flow configuration of open-channel flow.

抵抗により減速するため粘性力が支配的な粘性底層内で急激に減衰するのに対し, 法線方向成分は壁によるブロッキングのため幾分離れた地点から減衰する。すなわち, $u_2^* \ll u_1^*, u_3^*$ となる領域が存在し, これは非定常三次元層流境界層近似の条件に相当する。境界層理論によれば圧力の境界法線方向勾配は無視でき, かつ運動方程式の法線方向成分を解く必要はない。たとえ p^*/x_2 がゼロでなくても値が小さい領域では, 圧力の境界法線方向の解像度は速度成分のそれより粗くてもよいことになる。また自由水面などのすべり面でもブロッキングは生じるので, この特性は壁上のせん断応力の有無に依存しない。

上記の特性が実際にどの程度見られるのかを調べるために, 粘着壁(底面)及びすべり面(自由水面)から構成される開水路等流(Fig. 1) DNS を行った。計算手法の詳細は文献(2)を参照されたい。底面摩擦速度を基準とした Re 数 $Re_\tau=100, 180$ の場合の, 底面及び水面近傍の瞬時圧力変動分布を Fig. 2 に示す。圧力は, Re 数によらず x_2^+ (壁面からの粘性スケール) または x_2^{*+} (すべり面からの粘性スケール) が 10 以下の領域でほぼ一定値をとっている。Fig. 3 に圧力勾配の各成分の RMS 値を示す。これらの値は粘性スケールで見た場合にほぼ同位置で最大値をとり, やはり $x_2^+, x_2^{*+} < 10$ の領域で p^*/x_2 の RMS 値は他の成分のそれに比べてかなり小さく, 上記の議論が Re 数は低いものの実際の乱流場でも十分成立することが確認される。

次章ではこれらの特性を用いた, 非圧縮性流体数値計算の効率化手法を提案する。

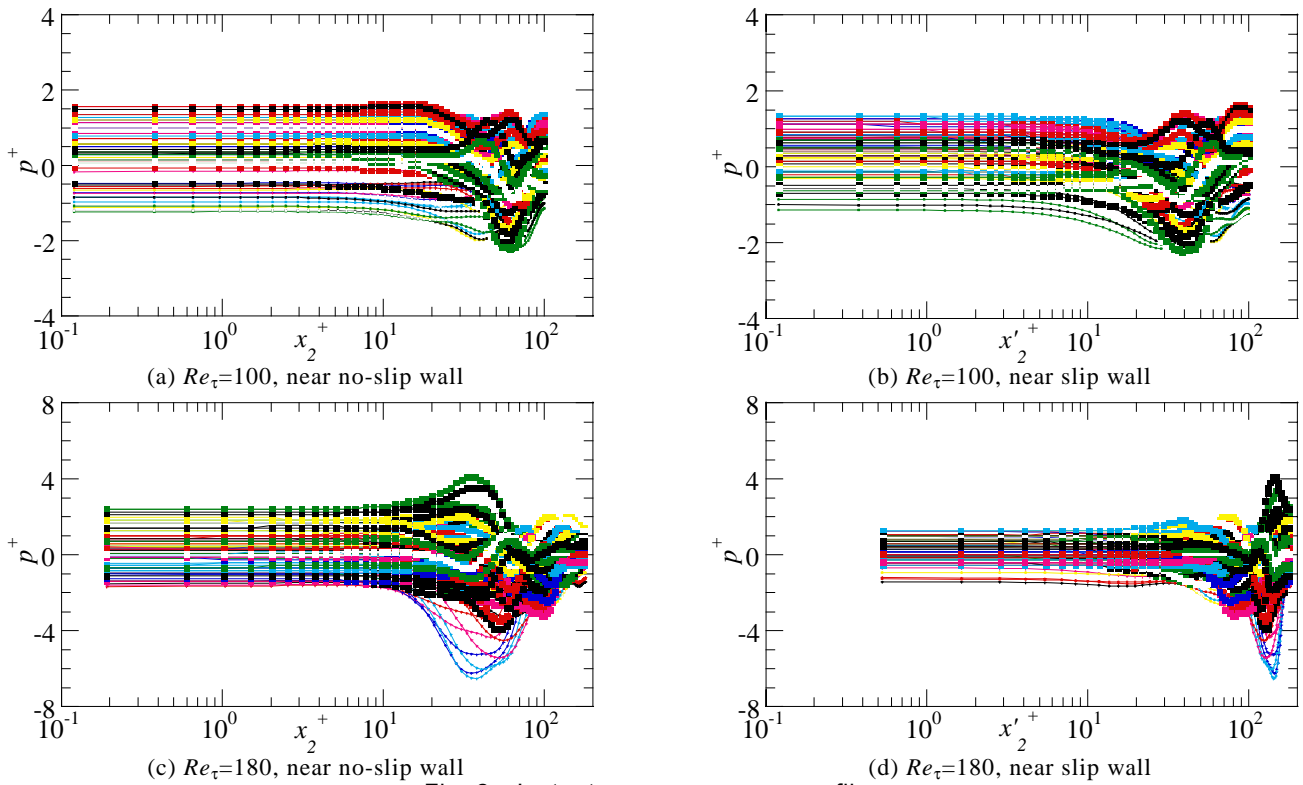


Fig. 2 Instantaneous pressure profiles.

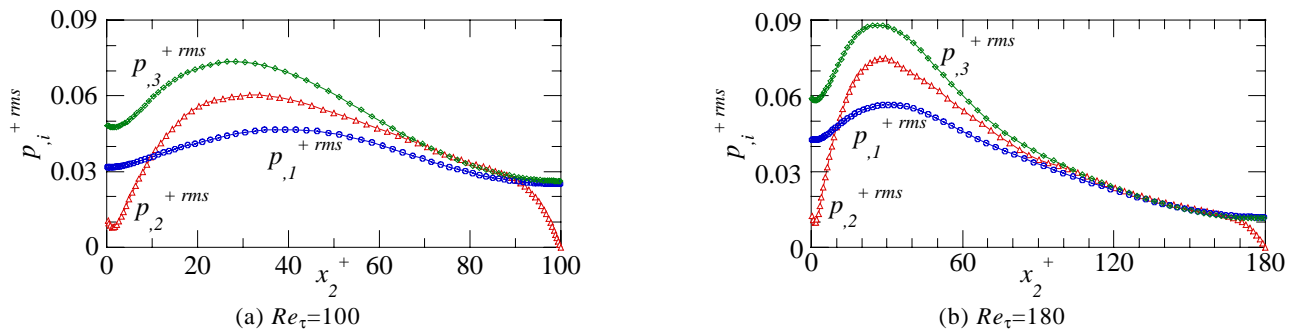


Fig. 3 Profiles of RMS pressure gradient fluctuations.

3. 数值計算法

3.1 支配方程式の離散化手法

本章では、前章で見られた圧力場特性を数値解法の効率化に結びつける具体的な計算手法を示す。緒論で述べたように本報では DNS に話を限定し、支配方程式を差分法で離散化する。変数配置にはスタガード格子系を採用し、空間微分項は二次精度対流補間法⁽³⁾で近似し、時間積分法には二次精度 Adams-Bashforth 法を用いた。これらで離散化された差分方程式を SMAC 法を基本とするアルゴリズムに基づき時間進行する。圧力の Poisson 方程式の解法には、ここでは最も一般的な SOR 法を用いる。差分アルゴリズムの詳細は 3.3 節で述べる。

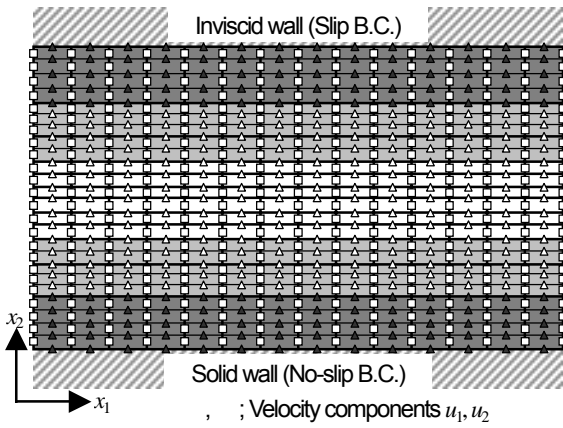
3.2 圧力定義点の粗視化

開水路等流の計算にスタガード格子を用いた場合、通常 Fig. 4(a)のように速度成分が配置され、各セル中央で圧力が定義される。壁近傍流れの特性を考慮し、圧力の法線方向勾配がほぼゼロとみなせる領域を境界条件に

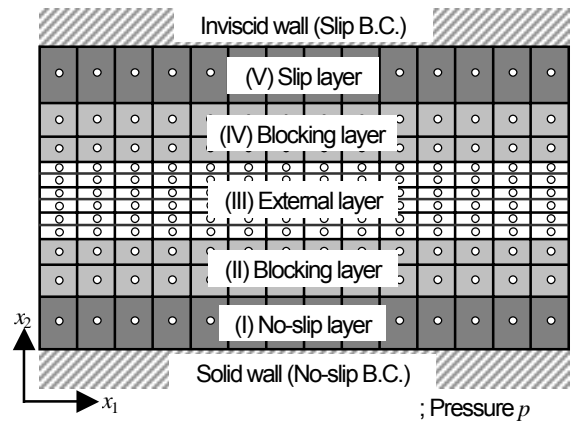
じてそれぞれ「粘着層」及び「すべり層」、ゼロではないが変化が小さい領域を「ブロッキング層」、それ以外の領域を「外部層」とすると、それらの配置は Fig. 4(b)のようになる。「粘着層」及び「すべり層」の圧力を法線方向に一点で代表して圧力算出アルゴリズムから切り離し、また「ブロッキング層」で圧力定義点を間引いて粗視化しても計算精度はそれほど低下しないと予想される。粗視化された圧力場用のセル(以下、圧力セル, Fig. 4(b))と速度場用のセル(以下、速度セル, Fig. 4(a))を完全に独立にすると今回用いたアルゴリズムでは保存量を数値的に保存することが困難となるため、ここでは x_2 方向に隣接する速度セルを複数個結合して圧力セルを生成した。

3.3 差分アルゴリズム

3.1 節の離散化手法を用いれば、連続式及び運動方程式は以下のように表される。ただし、簡便化のために瞬時量を示す記号*は省略する。



(a) Velocity cell



(b) Pressure cell

Fig. 4 Arrangement of positions of velocity components and pressure.

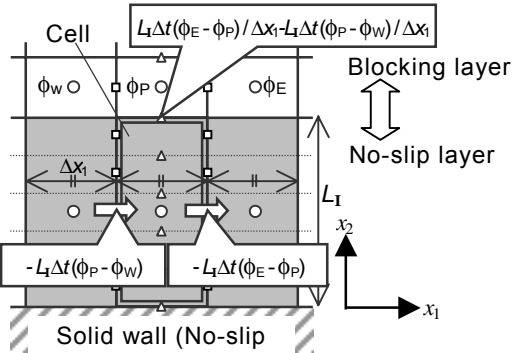


Fig. 5 Boundary condition for scalar potential ϕ .

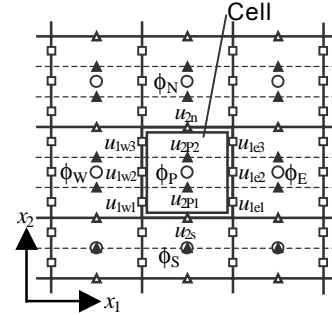


Fig. 6 Velocity correction at corrector step.

$$D^{n+1} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -G_i(p^{n+1}) + \frac{3}{2}F_i^n - \frac{1}{2}F_i^{n-1} \quad (2)$$

ここで Δt は時間刻みで, G_i は勾配を示す差分オペレータを, D , F_i はそれぞれ離散化された速度ベクトルの発散及び対流項と粘性項の和を指す. 通常の SMAC 法では式(2)は以下のように分割される.

1. Predictor (予測段階)

$$u_i^p = u_i^n + \Delta t \left\{ -G_i(p^n) + \frac{3}{2}F_i^n - \frac{1}{2}F_i^{n-1} \right\} \quad (3)$$

2. Corrector (修正段階)

$$u_i^{n+1} = u_i^p - \Delta t G_i(\phi) \quad (4)$$

添え字 P は Predictor 終了時(中間段階)での値を指す. また, Predictor と Corrector の間に, 式(4)を連続式(式(1))に代入して得られる Poisson 方程式

$$G_i(G_i(\phi)) = D^p / \Delta t \quad (5)$$

を解き, スカラーポテンシャル ϕ を求める必要がある. 本報では平均圧力勾配が既知である流れ場を扱うので, 式(3)の圧力勾配には平均圧力勾配を与え, ϕ は圧力変動を表現する. すなわち平均圧力を P とすれば

$$p^{n+1} = P + \phi \quad (6)$$

となる. 以下に圧力定義点の粗視化に伴い必要となる, 計算手順の修正の詳細を示す.

まず Predictor として, SMAC 法と同様に式(3)より中間流速 u_i^p を求める. ただし粘着及びすべり層内の速度成分 u_2^p (Fig. 4(a)中の) は式(3)を用いず中間速度場で連続式を満たすように決定される. すなわち中間段階にこの両層では連続式が満たされる.

次に, 外部層及びブロッキング層内の圧力セルに対し, ϕ の Poisson 方程式(式(5))を解く. ブロッキング層と粘着・すべり両層界面での ϕ の境界条件は, 反復解法を用いた場合には以下のように求められる. n 回の反復計算の後, 界面に接する圧力セル上の ϕ の分布が Fig. 5 のような場合を考える. 境界近傍では圧力の法線方向勾配は微小であるので, 反復の過程において粘着(又はすべり)層内でも同じく ϕ_p , ϕ_e , ϕ_w の分布を仮定すれば, このような ϕ の分布は Corrector (式(4))段階で図中の圧力セル P に対し

$$\Delta t \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x_1} L_1 - \Delta t \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x_1} L_1 \quad (7)$$

の流入をもたらす. ただし L_1 は粘着(又はすべり)層の厚さである. 粘着(又はすべり)層では中間速度場が既に連続式を満たすため, 新たな時刻で圧力セル P の連続式を満たすには, 式(7)と同じ流量がセル界面を通じブロッキング層に移動する必要がある. よって, $n+1$ 回目の反復計算時にはそれに等価な圧力勾配

Table 1 Cell arrangement in x_2 direction.

	Run1			Run2			Run3			Run4			Run5		
	Np	Nv	LH	Np	Nv	LH	Np	Nv	LH	Np	Nv	LH	Np	Nv	LH
Layer I	-	-	-	1	8	6.7	1	8	6.7	1	8	6.7	-	-	-
Layer II	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	14	34.3	-	-	-
Layer III	64	64	180	56	56	173.3	48	48	166.6	20	20	98.0	32	32	180
Layer IV	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	14	34.3	-	-	-
Layer V	-	-	-	-	-	-	1	8	6.7	1	8	6.7	-	-	-
Total	64	64	180	57	64	180	50	64	180	32	64	180	32	32	180

Np; Number of pressure cells, Nv; Number of velocity cells, LH; Layer height in viscous unit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_{x_2=L_1} &= - \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_1} L_1 - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_1} L_1 \right) / \Delta x_1 \\ &= \frac{\phi_E - 2\phi_P + \phi_W}{\Delta x_1^2} L_1 \end{aligned} \quad (8)$$

を境界条件とすればよい。これの繰り返しにより領域全体で連続式を満たす ϕ が得られる。反復開始時には勾配ゼロの条件を課せばよい。簡素化のため二次元場で話を進めたが、式(8)の三次元への拡張は容易である。

最後に Corrector で、求めた ϕ に応じて速度場を修正する。ある圧力セル P 及び周囲のセルの速度成分、 ϕ が Fig. 6 のような場合、図中の u_{1w1} , u_{1w2} , u_{1w3} は ϕ_P , ϕ_W の, u_{1e1} , u_{1e2} , u_{1e3} は ϕ_E , ϕ_P の, u_{2n} は ϕ_N , ϕ_P の, そして u_{2s} は ϕ_P , ϕ_S の差に応じて式(4)により修正され、圧力セル P での連続式が満たされる。一方 u_{2p1} , u_{2p2} は圧力セル内の個々の速度セルで連続式が満たされるように決定される。すなわち、圧力セル界面上の速度成分 (Fig. 6 中の) は SMAC 法の手順に従うが、圧力セル内の速度成分 u_2 (Fig. 6 中の) は個々の速度セルの連続式により算出される。以上の操作により、全ての圧力セル及び速度セルで連続式が満足される。

本報では、後述するようにエネルギー収支における圧力拡散項及び圧力ひずみ相関項も DNS 結果と比較するため、上述の手順で得られる各圧力セルの ϕ の分布から従来のスタガード格子と同じく速度セル中央での ϕ を補間している。しかしながら平均流速や乱れ強度、エネルギー生成・散逸の評価には圧力セルでの ϕ のみが記憶されればよく、圧力セル内部の速度成分 (Fig. 6 中の) も省略可能である。すなわち本手法は、境界に平行な速度成分に対して圧力及び法線方向速度成分の粗視化を行ったものと捉えられる。これにより計算負荷の軽減と省メモリ化が同時に達成される。

4. 検証及び考察

4.1 計算ケース

ここでは、本手法による予測精度及び計算負荷の軽減の程度を検証するため、計算は粘着及びすべり壁面より構成される開水路等流 (Fig. 1) を対象としたベンチマ

ークテストを行う。Re 数は以前著者ら⁽²⁾が DNS を実施した $Re_\tau=180$ とし、計算は 5 種類の格子について行った。それらの詳細を Table 1 に示す。表中の層 ~ はそれぞれ粘着層、(底面側)ブロッキング層、外部層、(水面側)ブロッキング層及びすべり層を示す (Fig. 4(b)参照)。

Run1 は計算格子数 $64 \times 64 \times 64$ の通常の DNS である。なお、水平方向の格子数は Run1~ Run5 の全てで 64×64 (格子解像度は $\Delta x_1^+=18$, $\Delta x_3^+=9$) に固定しており、時間刻み Δt も全ケースで $\Delta t^+=0.018$ で一定とした。Run1 の x_2 方向解像度は $\Delta x_2^+=0.56-5.4$ である。Run2 では底面から粘性スケールで 6.7 の領域を粘着層として取り扱った。また、Run3 は Run2 に対し、更にすべり面から粘性スケールで 6.7 の領域をすべり層とした。すなわち、Run2、Run3 の Poisson 方程式はそれぞれ $64 \times 57 \times 64$, $64 \times 50 \times 64$ 元の連立方程式となる。Run4 は Run3 に対し、更に粘性スケールで約 30 の領域をブロッキング層として底面及び水面側に配置し、そこでの圧力定義点の粗視化により元数を $64 \times 32 \times 64$ に半減させたものである。Run5 は格子数 $64 \times 32 \times 64$ の通常の DNS ($\Delta x_2^+=1.18-10.8$) で、Poisson 方程式の元数が Run4 と一致する。つまり、Run2, 3, 4 はそれぞれ粘着層、すべり層、ブロッキング層のモデリングの妥当性を検討するためのものであり、Run5 は単に Run4 と同じ計算負荷になるよう格子点を減らしたので、Run4 と Run5 の比較により本手法の実用性を検証できる。

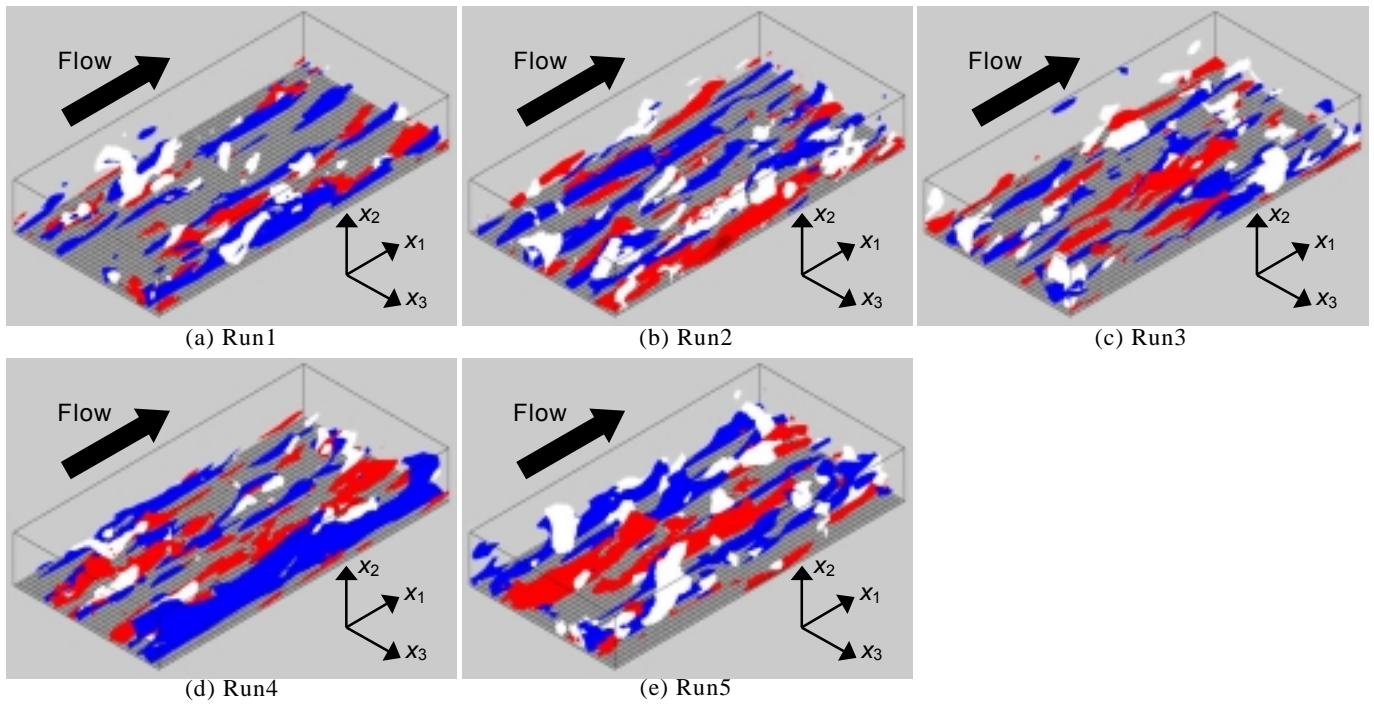
計算は全ての Run に対し同じ完全発達流れ場から初期条件を作成し、個々の格子に流れが十分馴染んだ後の 100,000 ステップに渡る時空間平均で統計諸量を評価した。結果は全て内層表示されたものである。

4.2 流れの瞬時構造

Fig. 7 に流れの瞬時構造を可視化したものを示す。格子が粗くなるにつれ細かい構造が観察されなくなるが、ストリーク構造や管状渦は概ね捉えられていると考えられ、瞬時組織構造の再現性への影響はほとんど見られない。

4.3 平均流及び二次相関の予測性能評価

本節及び次節では、乱流統計諸量を Run1 と Run2 ~ Run5 それぞれとの比較という形で、Kim et al.⁽⁴⁾によるチ



$u_1^+ < -3.0$; blue or dark-gray, $u_1^+ > 3.0$; red or light-gray, $p^+ < -3.0$; white

Fig. 7 Instantaneous flow structure in terms of high-speed, low-speed and low pressure regions

チャンネル流 DNS (KMM) 及び著者ら⁽²⁾による開水路等流 DNS (格子数 $116 \times 96 \times 128$, YN) 結果と併せて、特に断らない場合には一点置きで格子位置での結果を示す。また、ここでは示さないが、各 Run の全せん断応力分布はいずれも与えた圧力勾配と良好にバランスすることを確認している。平均流速分布 (Fig. 8) では Run2, Run3 の結果が KMM や YN に近いのに対し、Run4, Run5 は Run1 に近い結果となった。しかしこれらの差は小さく、平均速度分布結果に問題はないと考えられる。乱れ強度分布 (Fig. 9) では底面近傍では各 Run に有意な差は見られないが、すべり面近傍では Run5 において水平方向成分が共に過大予測されており、再分配率の変化に加えてエネルギー自体が過大評価されている。

4.4 応力収支及び三次相関の予測性能評価

二次モーメント収支として、底面近傍の乱流エネルギー及び x_2 方向の Reynolds 垂直応力収支をそれぞれ Fig. 10, 11 に示す。乱流エネルギー収支では Run5 の散逸項が小さいことを除けば、概ね良好な結果が得られている。オーダーが一桁下がる x_2 方向 Reynolds 垂直応力収支では Run1 でも格子依存性が確認されるが、各 Run の Run1 からのズレを検査することで精度評価は可能である。Run2 ~ Run4 では圧力定義点の粗視化により圧力を含む統計量 (圧力拡散項及び圧力ひずみ相関項を指す) の予測に影響が見られ、特に Run4 では粗視化の領域が広いことにより上記の影響も広い範囲に及ぶ。圧力定義点を粗視化する本手法では、圧力を含む統計量の各速度セル上での予測精度の若干の低下は避けられないが、本手法のメリットはむしろそのように圧力場を粗視化し計算負荷の低減を図った領域においても、速度場はより高い解像度で

精度良く捉えられる点にある。

開水路乱流の大きな特徴として水面近傍でのエネルギー再分配機構が挙げられ、この特性の再現性を見るため、水面近傍での鉛直方向 Reynolds 垂直応力収支を Fig. 12 に示す。Fig. 12 では全格子点での値をプロットしているので注意されたい。底面近傍に比べて更に一桁オーダーが下がるため予測の難しい領域であるが、Run5 で圧力拡散項及び圧力ひずみ相関項の絶対値が共に過大予測 (つまりエネルギー再分配が過剰) されている点を除けば有意な差はほとんど見られない。

最後に三重速度相関 $T_{ijk} = \overline{u_i u_j u_k}$ の分布を Fig. 13 に示す。Run4, Run5 で Run1 からのズレが見られるが、特に Run5 の T_{122} (Fig. 13 中の) については定性的にも異なる分布が得られた。Run2, Run3 では定量的にも Run1 と良好に一致し、境界近傍の粘着層及びすべり層での圧力定義点の粗視化は高次相関の予測にもあまり影響を及ぼさない。

4.5 圧力定義点粗視化の効果、影響

前節までの検証の結果、粘着、すべり、ブロッキング各層での粗視化が瞬時構造や統計量の予測にもたらす誤差はわずかであり、格子解像度を下げた DNS (Run5) よりも良好な結果が得られた。ブロッキング層を粗視化した場合に三次相関の予測精度が低下したが、二次相関については十分捉えられた。また粘着、すべり両層の粗視化は三次相関についても十分な結果をもたらす、非常に良い近似であることが確認された。最後に本手法による計算負荷の低減効果を Table 2 に示す。Case1 は Poisson 方程式の SOR 法において反復回数を固定し、Case2 は許容相対誤差を固定した場合に $1\Delta t$ 時間進行するのに必要

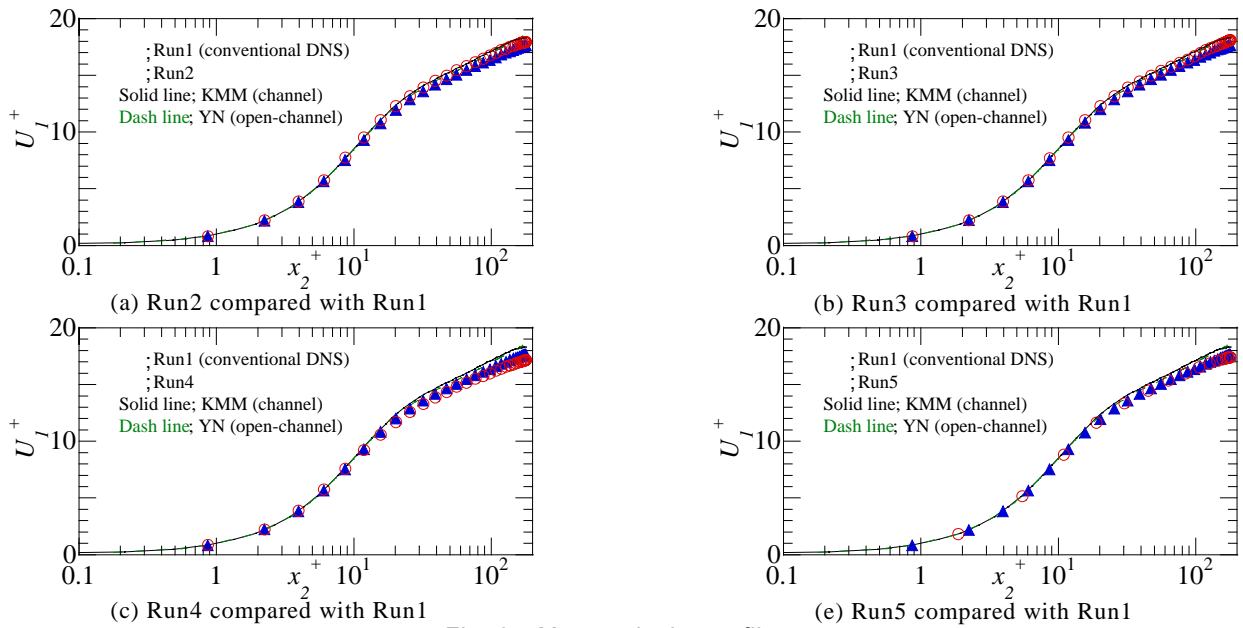


Fig. 8 Mean velocity profiles.

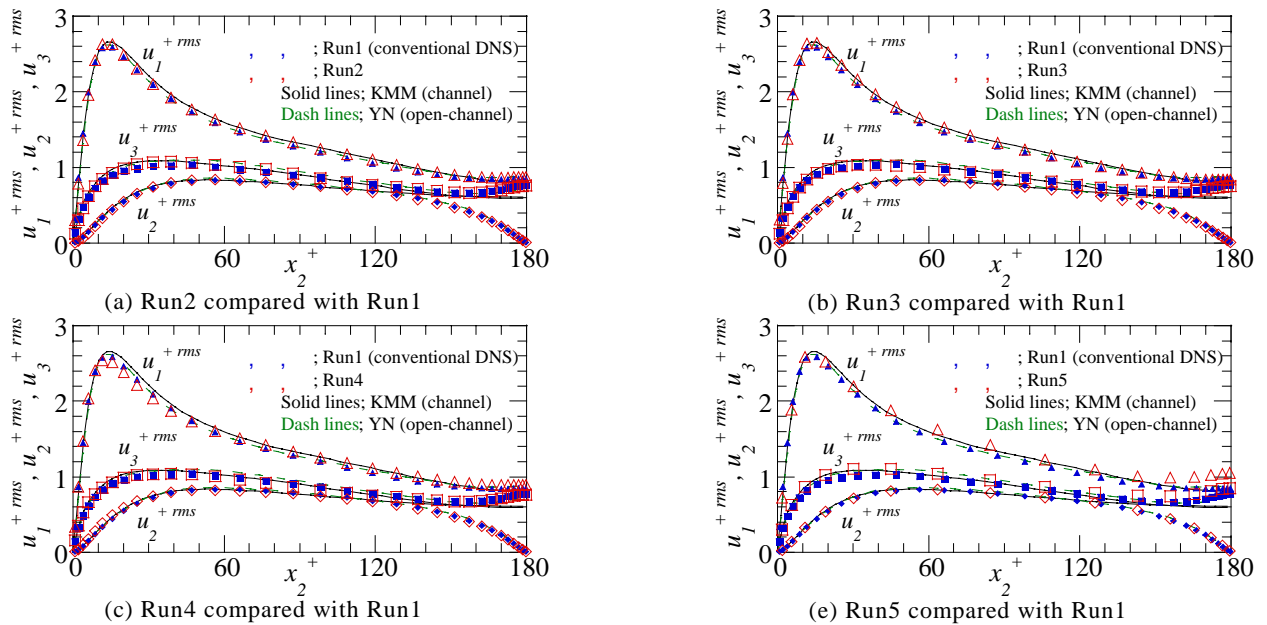


Fig. 9 RMS fluctuations.

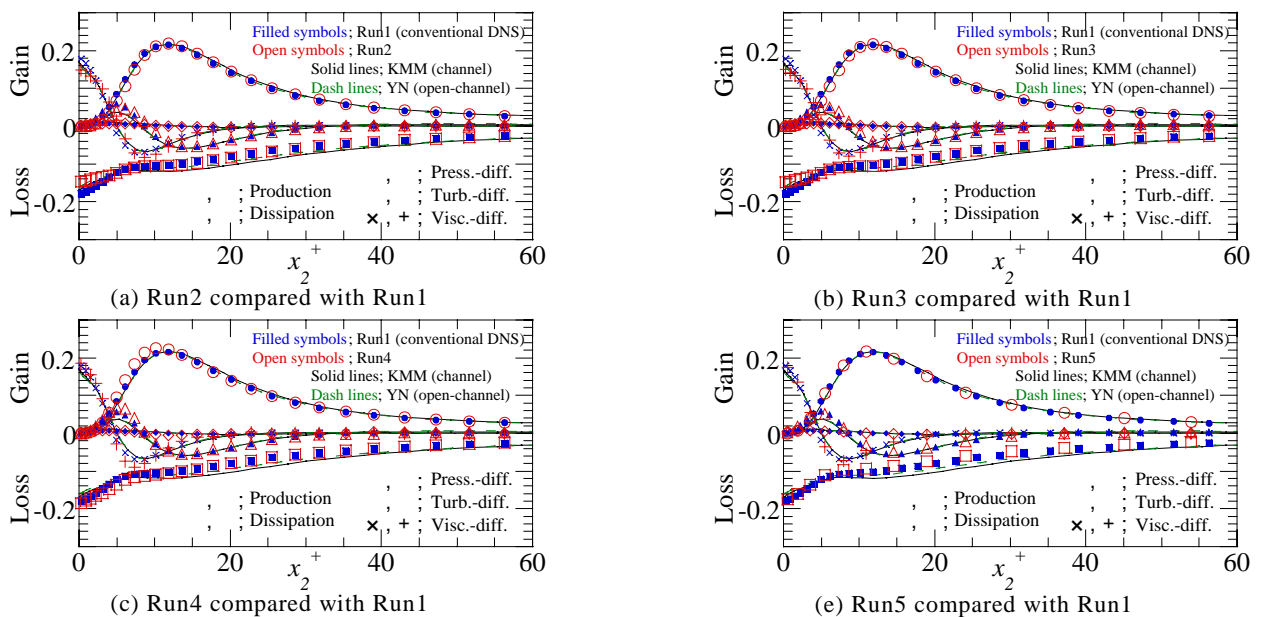
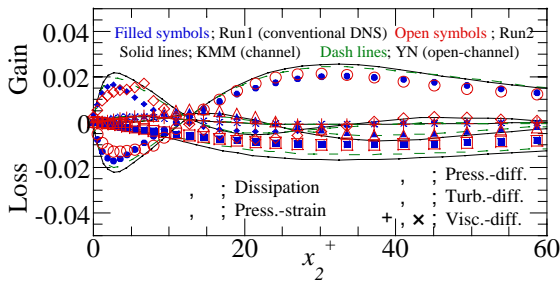
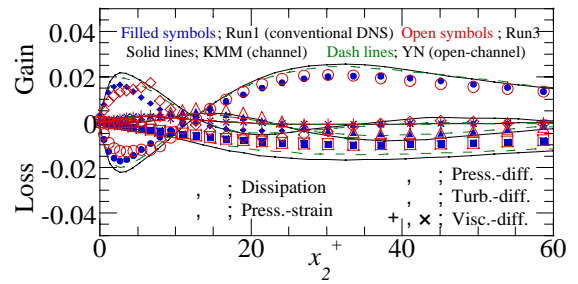


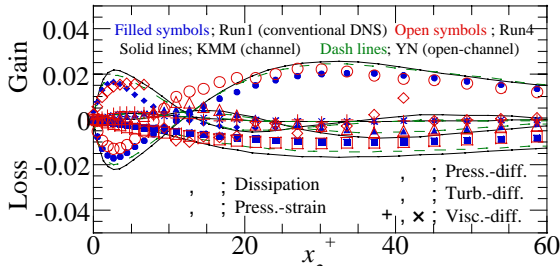
Fig. 10 Budget for turbulent kinetic energy.



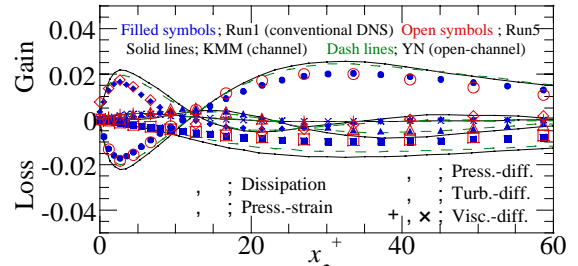
(a) Run2 compared with Run1



(b) Run3 compared with Run1

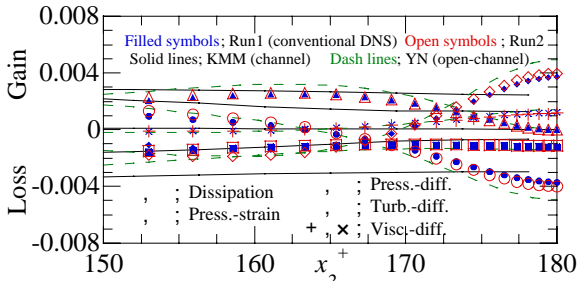


(c) Run4 compared with Run1

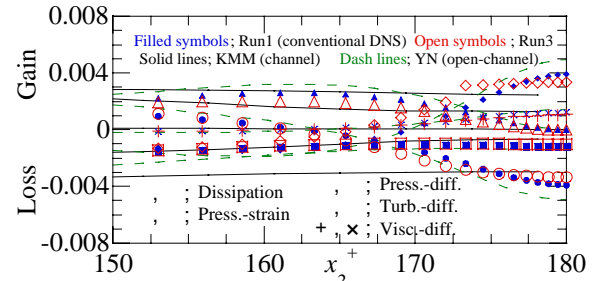


(e) Run5 compared with Run1

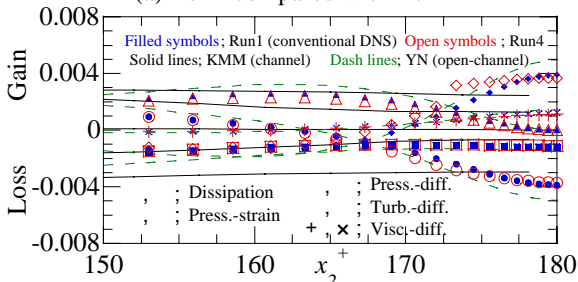
Fig. 11 Budget for normal Reynolds stress in x_2 direction (near no-slip wall).



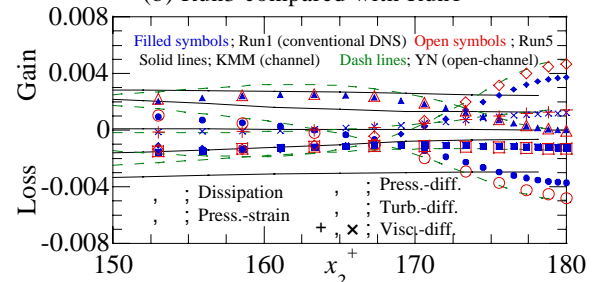
(a) Run2 compared with Run1



(b) Run3 compared with Run1

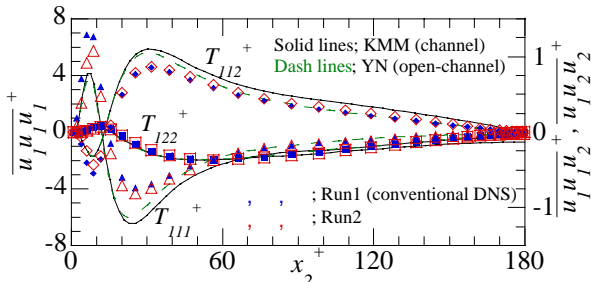


(c) Run4 compared with Run1

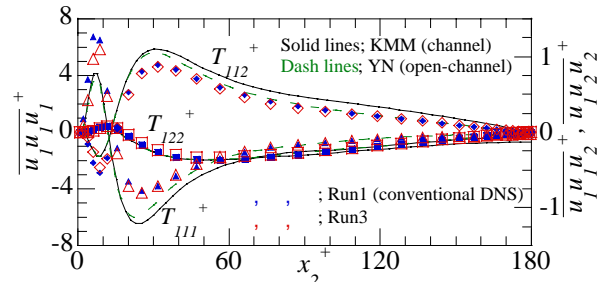


(e) Run5 compared with Run1

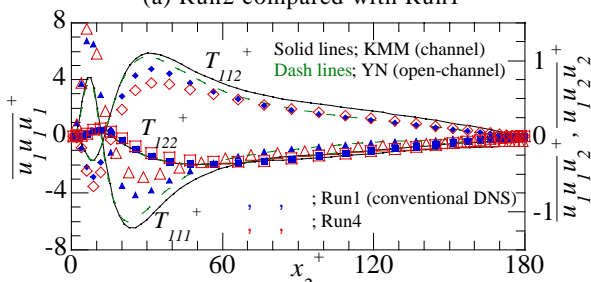
Fig. 12 Budget for normal Reynolds stress in x_2 direction (near slip wall).



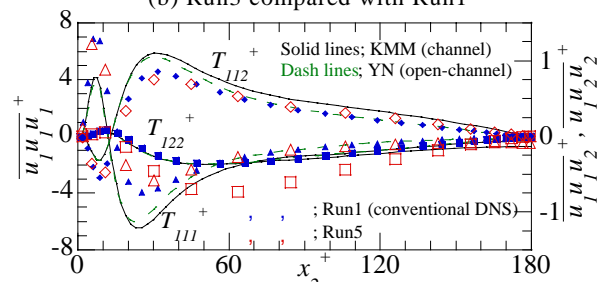
(a) Run2 compared with Run1



(b) Run3 compared with Run1



(c) Run4 compared with Run1



(e) Run5 compared with Run1

Fig. 13 Triple velocity correlations.

Table 2 Comparison of cost performance.

	Run1	Run2	Run3	Run4	Run5
Case1	1	1.70	1.57	0.80	0.42
Case2	1	0.80	0.58	0.22	0.17

な計算時間を Run1 で規格化したものである。粗視化に伴う付加処理のため、1 回の反復に要する計算量はあまり低減されず、Run2, Run3 ではむしろ増加することが Case1 の結果よりわかるが、実際の計算で重要となる、一定の許容誤差に収束するまでの時間を比較した Case2 では粗視化の範囲が広がるにつれ計算負荷は大きく減少し、Run4 の計算負荷は Run5 と同程度で Run1 に対して約 80% の低減が見られた。今回は速度セルを複数個結合することで圧力セルを作成したため、圧力セルの分布はあまり滑らかでない。セル分布が反復計算に与える影響は決して小さくないと考えられ、この点が改良されれば更なる効率化が期待できる。

5. 結論

本報では、高 Re 数壁面近傍の流れ特性を利用した Navier-Stokes 方程式数値解法の効率化手法を提案し、DNS において手法の基礎的な性能評価を行った。

境界層理論によれば、壁上のせん断応力の有無によらず壁面近傍の法線方向速度成分が抑制される領域では、

境界法線方向の圧力勾配が水平方向のそれらに比べて微小となるが、DNS 結果から、境界から粘性スケールで約 10 以内の領域でそのような特性が確認された。この特性を利用し、非圧縮性流体の数値予測において計算負荷の大部分を占める圧力解法の効率化手法を提案した。ベンチマークテストの結果、計算負荷は最大で約 80% の軽減が確認され、予測精度についても瞬時構造、統計量とも良好に再現されることが示された。本報では DNS への適用例を示したが、本手法は高 Re 数流れの LES や RANS 法に対しても応用可能であると考えられ、CFD の汎用化を進める上で有用な手法となり得る。

参考文献

- (1) 須賀一彦, "低レイノルズ数乱流モデルの壁乱流における計算格子依存性", 日本機械学会論文集 **64**-626, B(1998), pp. 3315-3322.
- (2) 横嶋哲, 中山昭彦, "直接数値シミュレーションによる開水路乱流における乱流統計量及びその収支評価", 応用力学論文集 **3**(2000), pp. 753-762.
- (3) 梶島岳夫, "対流項の差分形式とその保存性", 日本機械学会論文集 **60**-574, B(1994), pp. 2058-2063.
- (4) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., "Turbulent statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", *J. Fluid Mech.* **177**(1987), pp. 133-166.