第14回数値流体力学シンポジウム
B06-1

差分法ダイナミックSGSモデルに適したSGS渦粘性係数の構築

Proper representation of the subgrid-scale eddy viscosity for the dynamic procedure in LES using FDM

坪倉　誠，東工大総合理工，横浜市緑区長津田4259, E-mail: tsubo@depe.titech.ac.jp
Makoto Tsubokura, Interdisciprinary Graduate School, Tokyo Institute of Tech., Nagatsuta, Midoriku, Yokohamasi

Alternative representation of the dynamic eddy viscosity coefficient to the traditional Smagorinsky's is investigated for the application of the model to the finite difference method. The model is derived by considering the consistency of the numerical error between L_{ij} and M_{ij} in the dynamic procedure. The proposed model is validated in the plane channel flow at the Re_τ of up to 590 and is found to be less sensitive to the discretized test filtering operation.

1. はじめに

Germanoら[1]により提案されたダイナミックスマゴリンスキーモデルは、グリッドスケール（Grid Scale; GS）の速度場からモデルに含まれるモデル係数を陽的に求める手法として数々の流れ場に対して、その有用性が確かめられている。しかしダイナミックモデルに差分法を適用した場合、次に示す問題が起こる事が知られている。

[1]モデルパラメータ$\tilde{\bar{\Delta}}/\bar{\Delta}$に対してスペクトル法で提案されている値を用いても、スマゴリンスキー定数が十分に最適化されない。この問題の代表的な例として差分法ダイナミックLESにおけるチャネル乱流の平均流速の対数則領域の過大評価は有名である[2]。

[2]テストフィルタの差分法による離散化において新たなパラメータ$\tilde{\Delta}/h$が現れる（ただしhは格子幅）。すなわち結果として二つのモデルパラメータが存在する[3]。

[1]については、Cabotら[2]はスペクトル法と異なるモデル係数を適用することで、チャネル乱流の平均流速の過大評価を改善している。またYoshizawaら[4]はスマゴリンスキーモデルに対して、異なる渦粘性係数表記によるモデルを導出し、ダイナミック手法を用いた差分法においてスマゴリンスキーモデルと比較して良好な解を得ている。いずれにしてもこれらの二つの事例はいずれも、上記[1]の問題を明確に表している。
[2]については、差分法ダイナミックスマゴリンスキーモデルにおける二つのモデル係数、$\tilde{\bar{\Delta}}/\bar{\Delta}$と$\tilde{\Delta}/h$の最適化は容易ではなく、解がこれらの値に大きく依存する事が既報により報告されている[3]。
これらの問題を解決する方法として、次の二つが考えられる。即ち一つはダイナミックモデルの手法自体を差分誤差を考慮する方法[5]。もう一つはダイナミックモデルの手法に対して、差分誤差を考慮して、この誤差に対してより整合性のとれた渦粘性係数を用いる方法である。
本研究の目的は、この後者の視点に着目し、上述の問題を解決するような、差分法ダイナミックSGSモデルに適した渦粘性係数を提案する事である。実際、ダイナミックモデルにおいては、渦粘性係数に含まれるモデル係数は、最小自乗法により求められる為[6]、渦粘性係数の定式化における物理的解釈よりも、その定式化における差分誤差の影響がより重要であると考える。
提案したモデルはMoserら[7]によるレイノルズ数180~590のチャネル乱流に対するDNSデータを用いて、その有用性を検討する。

2. 基礎式

非圧縮性流体の支配方程式に空間フィルタ操作を施す事で本研究で用いるLESの基礎式を得る。ここでグリッドフィルタ操作を次のように表す。

$$f^g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(x'-x;\Delta^g)\, f(x')\, dx' \tag{1}$$

Gはフィルタ関数であり、フィルタ幅Δ^gでフィルタ操作された関数をf^gで表している。異なるフィルタ幅に対するフィルタ操作を連続して施した時、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x'-x;\Delta^T)\, f^g(x')\, dx' = (f^g)^T = f^{gT} \tag{2}$$

と表す。以降、右上添え字「g」をグリッドフィルタ操作、「T」をテストフィルタ操作とする。
今、非圧縮性流体の運動方程式に対して、グリッドフィルタ操作を施す事で次の運動方程式を得る。

$$\frac{\partial u_i^g}{\partial t}+\frac{\partial u_i^g u_j^g}{\partial x_j}=-\frac{\partial p^g}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i^g}{\partial x_j \partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} \tag{3}$$

u_i、p、νはそれぞれ速度、圧力、動粘性係数である。ここで、右辺最終項はフィルタ操作により発生するSGS乱流応力であり、次のように表される。

$$\tau_{ij}=(u_i u_j)^g - u_i^g u_j^g \tag{4}$$

3. SGSモデリング

(4)式で表されるSGS乱流応力のモデル化について考える。ここでは乱流応力と歪み率テンソルに対して比例関係を仮定した等方型渦粘性モデルを考える。尚、モデル中に含まれるモデル係数はすべてダイナミックモデルにより求める事に注意されたい。等方型渦粘性モデルとしてLESにおいて一般に用いられるスマゴリンスキーモデルは次のように与えられる。

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\tau_{kk}\,\delta_{ij}=-2\,C\,\{\,\Delta^{g2}\left|S^g\right|\,\}\,S_{ij}^g \tag{5}$$

ただし、

$$S_{ij}^{g} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^g}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^g}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

$$\left|S^g\right| = \sqrt{2S_{ij}^g S_{ij}^g} \tag{7}$$

本研究では(6)式を「*DS モデル*」と呼ぶ。

これに対して、坪倉ら[8]は Yoshizawa ら[4]により提案されたSGSレイノルズ応力項の生成項に着目したモデル化に対して、乱流時間スケールを修正した次のモデルを提案し、その有用性をチャネル乱流に対して示している。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\,\delta_{ij} = -2\,C\,\{\,(u_k^g - u_k^{gg})(u_k^g - u_k^{gg})\,/\left|S^g\right|\}S_{ij}^g \tag{8}$$

このモデルはスマゴリンスキーモデルの導出において用いられるSGSの乱流エネルギーの生成と散逸の釣り合い、即ち局所平衡の仮説を用いないという物理的側面がある一方、数値解析的な大きな特徴としてモデル中に長さスケールを陽的に含んでいない。この結果、ダイナミックモデルをモデル係数の決定に適用した場合、アプリオリに決定するべきパラメータであるテストフィルタとグリッドフィルタの比 $\tilde{\bar{\Delta}}/\bar{\Delta}$ に対する解の依存性を回避できる点にある。このモデルの一般形は次のように与える事ができる。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\,C\,\frac{k}{\left|S^g\right|}\,S_{ij}^g \tag{9}$$

ここで k は速度の自乗の次元を持つ適当な関数である。$\left|S^g\right|$ は「1 / 時間」の次元を持つ事に注意されたい。(8)式においては

$$k = (u_k^g - u_k^{gg})(u_k^g - u_k^{gg}) \tag{10}$$

で与えているが、このモデル化には必然性がなく、その他のモデル化が可能である。これに対して Tsubokura[9]は k の定式化に対して、ダイナミックモデルの手法において差分誤差に整合性が保たれるよう考慮した定式化を行った。この方法について述べる。

ここでダイナミックモデルの手法を考える。ダイナミックモデルにおいて SGS 応力のモデル化の他にサブテスト(Subtest-scale; STS）スケール、

$$T_{ij} = (\,u_i\,u_i\,)^{g\,T} - u_i^{g\,T}\,u_j^{g\,T} \tag{11}$$

のモデル化が必要となる。SGS 応力とこの STS 応力の間の関係式、

$$L_{ij} = T_{ij} - \tau_{ij}^T = (\,u_i^g\,u_j^g\,)^T - u_i^{g\,T}\,u_j^{g\,T} \tag{12}$$

に対して、T_{ij} と τ_{ij} をモデル化した時、次に示す誤差テンソルの積 $e_{ij}e_{ij}$ が最小となるように最小自乗法を用いて、モデル係数を求めるのが、Lilly[6]により修正されたダイナミックモデルの手法である。

$$e_{ij} = L_{ij} - (\,T_{ij} - \tau_{ij}^T\,) \tag{13}$$

(5)式で示されるスマゴリンスキーモデルに対してこの手法を適用した場合、

$$e_{ij} = L_{ij} + C\,M_{ij} \tag{14}$$

$$L_{ij} = (\,u_i^g\,u_i^g\,)^T - u_i^{g\,T}\,u_j^{g\,T} \tag{15}$$

$$M_{ij} = \left(\Delta^{gT}\right)^2\left|S^{g\,T}\right|S_{ij}^{g\,T\,2} - \left\{\left(\Delta^g\right)^2\left|S^g\right|S_{ij}^g\right\}^T \tag{16}$$

で与えられる。この式を差分法を用いて離散化した場合、L_{ij} と M_{ij} の間には差分誤差の整合性はない。これは M_{ij} には陽的な長さスケールが含まれている事からも明らかであろう。

これに対して、(9)式に対するSTS応力のモデル化を次のように与えると、

$$T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk} = -2\,C\,K\,\frac{S_{ij}^{g\,T}}{\left|S^{g\,T}\right|} \tag{17}$$

(14)式における M_{ij} は次のように与えられる。

$$M_{ij} = K\,\frac{S_{ij}^{g\,T}}{\left|S^{g\,T}\right|} - \left(k\,\frac{S_{ij}^g}{\left|S^g\right|}\right)^T \tag{18}$$

この(18)式を差分法により離散化する場合、歪み率テンソルがそのテンソル積により割られているため、M_{ij} の差分誤差に対する歪み率テンソルの差分誤差の影響が小さくなると仮定する。（この仮定は、剪断乱流等の歪み率テンソルの成分の一つが他に比べて卓越するような場にたいしては特に有効であろう。）この時、M_{ij} の差分誤差は $K - k^T$ の定式化に大きく依存すると考えることができる。今、L_{ij} がテストフィルタ操作に対するグリッド速度の一般化二次モーメント[10]で与えられていることを考慮すると、L_{ij} と M_{ij} に対して差分誤差の整合性を有する為には、$K - k^T$ がこのテストフィルタ操作における一般化二次モーメント $(ab)^T - a^T b^T$ で記述されればよいと考えられる。そこで、以降、「整合性」を有しているとは、定式化においてこの $(ab)^T - a^T b^T$ が現れる場合を言うことにする。

今、k と K のモデル化に対して次の四種類を考える。

$$\text{(I)}\;k = (u_l^g\,u_l^g)^g - u_l^{gg}\,u_l^{gg},\;\; K = (u_l^g\,u_l^g)^{g\,T} - u_l^{ggT}\,u_l^{ggT} \tag{19}$$

$$\text{(II)}\;k = (u_l^g\,u_l^g)^g - u_l^{gg}\,u_l^{gg}\;,\;\; K = (u_l^{g\,T}\,u_l^{g\,T})^{g\,T} - u_l^{gTgT}\,u_l^{gTgT} \tag{20}$$

$$\text{(III)}\;k = (u_l^g - u_l^{gg})(u_l^g - u_l^{gg})\;,\;\; K = (u_l^{g\,T} - u_l^{g\,g\,T})(u_l^{g\,T} - u_l^{g\,g\,T}) \tag{21}$$

$$\text{(IV)}\;k = (u_l^g - u_l^{gg})(u_l^g - u_l^{gg})\;,\;\; K = (u_l^{g\,T} - u_l^{g\,T\,g\,T})(u_l^{g\,T} - u_l^{g\,T\,g\,T}) \tag{22}$$

(I)と(II)は k のモデル化に対し修正レナード項[10]を適用した物であり、(III)と(IV)はレイノルズ応力項をスケール相似則モデル[11]でモデル化した物である。K のモデル化に対しては与えられた k のモデルからの導出方法として二つの手法が考えられる。(I)、(III)は Zang ら[12]による方法、(II)、(IV)が Vreman ら[13]による方法により求められた K を示している。坪倉ら[8]が既報において提案したモデルは(IV)に相当する。

この時、それぞれのモデル化に対して、$K - k^T$ は次のように与えられる。

$$\text{(I)}\ K-k^T=\left(u_i^{gg}u_j^{gg}\right)^T-u_i^{ggT}u_j^{ggT} \tag{23}$$

$$\text{(II)}\ K-k^T=\left(u_i^{gT}u_j^{gT}\right)^{gT}-u_i^{gTgT}u_j^{gTgT}-\left(u_i^{g}u_j^{g}\right)^{gT}+\left(u_i^{gg}u_j^{gg}\right)^T \tag{24}$$

$$\text{(III)}\ K-k^T=-\left\{\left(u_i^{gg}u_j^{gg}\right)^T-u_i^{ggT}u_j^{ggT}\right\}+2\left\{\left(u_i^{g}u_j^{gg}\right)^T-u_i^{gT}u_j^{ggT}\right\}-\left\{\left(u_i^{g}u_j^{g}\right)^T-u_i^{gT}u_j^{gT}\right\} \tag{25}$$

$$\text{(IV)}\ K-k^T=-\left\{\left(u_i^{gg}u_j^{gg}\right)^T-u_i^{gTgT}u_j^{gTgT}\right\}+2\left\{\left(u_i^{g}u_j^{gg}\right)^T-u_i^{gT}u_j^{gTgT}\right\}-\left\{\left(u_i^{g}u_j^{g}\right)^T-u_i^{gT}u_j^{gT}\right\} \tag{26}$$

(I)は$\boldsymbol{u}^{gg}$を$\boldsymbol{u}^{g}$に置き換えればL_{ij}と同じ一般化二次モーメントで与えられ、整合性を有する。一方(II)については整合性を持つ項が存在しない。(III)については三つの項それぞれは一般化二次モーメントで表されているため整合性を有するが、各項の係数の和はゼロとなる。(IV)については三つの項のうち、第三項のみ整合性を有している。以降、(I)~(IV)までのモデルをそれぞれ「DI_I~IV」モデルと呼ぶ。kの定式化からのKの定式化については、フィルタ操作に対する相似性という観点からは、Vremanらによる方法が適切であるように見受けられるが、Zangらによる方法を適用した場合、$K-k^T$の定式化がすべてテストフィルタ操作における一般化二次モーメントで与えられるのは興味深い。

4．数値解析手法

4.1 支配方程式の離散化

支配方程式の離散化にはスタッガード格子系の有限差分法を用いる。この時、森西により提案された[14]運動量運動エネルギー同時保存スキームを用い、離散精度は四次である。

時間進行法は基本的に三次精度ルンゲ・クッタ法であり、粘性項のうち壁方向の二階微分項にのみ二次精度のクランク・ニコルソン法を適用している。

圧力ポアソン方程式の解法には主流方向とスパン方向に対しては高速フーリエ変換（FFT）を用いている。

4.2 フィルタ操作の離散化

ダイナミックモデルにおける定式化、及び、(19)式~(22)式に含まれるグリッド・テスト両フィルタ操作に対して、フィルタ操作を離散化する必要がある。被フィルタ関数に対してテイラー展開をする事で、フィルタ操作を次のような微分形で記述する事ができる[15]。

$$f^a(x)=f(x)+\frac{\left(\Delta^a\right)^2}{24}\frac{d^2f(x)}{dx^2}+O(\Delta^4) \tag{27}$$

この時、フィルタ関数に関して、ガウシアンフィルタ、及び実空間カットオフフィルタはフィルタ幅に対して四次の精度までは係数が同じとなる[16]。この時、被フィルタ関数の二階微分に対して中心差分を適用する事で、差分法により離散化されたフィルタ操作を得る。

$$f_i^a=f_i+\frac{\left(\Delta^a\right)^2}{24}\frac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{h^2}+O(\Delta^4) \tag{28}$$

式中右下の添え字はここでは差分操作におけるステンシルを表しているものとする。またhは差分格子の格子幅を表している。この時、フィルタ幅と格子幅の比が離散フィルタ操作に対するパラメータとしてアプリオリに決定する必要がある。本研究において用いたフィルタ操作のパラメータを表1に示す。以下、テストフィルタ操作に対しては大文字、グリッドフィルタ操作に対しては小文字で表す。例えばフィルタ操作(Ba)は$\left(\Delta^T/h\right)^2=6$、$\left(\Delta^g/h\right)^2=1$を表すものとする。

尚、本研究で対象とするチャネル乱流に対しては、乱流場の統計的一様方法にのみフィルタ操作を施す。従って壁に垂直方向に対してはフィルタ操作を行わない。

4.3 解析対象

本研究では平板チャネル乱流を解析対象とする。レイノルズ数は壁面摩擦速度（u_τ）とチャネル半幅（δ）で無次元化した180, 395, 590の三ケースである。解析結果はMoserらにより最近公表されたDNS結果[7]と比較する。主流方向とスパン方向に対しては周期境界条件を与え、壁面上では滑りなし条件を与える。主流方向、壁に垂直方向、スパン方向をそれぞれx、y、z方向とする。それぞれのレイノルズ数における代表的な解析領域と解像度を表2に示す。

5．解析結果

5.1 低レイノルズにおける各モデルの予測精度

まず低レイノルズ数(Reτ=180)における各モデルの基本的性質を調べる。参考の為、ダイナミックスマゴリンスキーモデル(DS)の結果、及び、SGSモデルを外した結果(no_model)も示す。

DSモデルに対しては二つのモデルパラメータを予め決定しておく必要がある。ダイナミックモデルのパラメータに対しては、主流方向、スパン方向にのみフィルタ操作を陽的に行っている事を考慮して、$\Delta^{gT}/\Delta^g=2^{2/3}$を適用する。（各フィルタ方向に対してフィルタ関数の長さスケールの比としてスペクトル法の結果から$\Delta_\alpha^{gT}/\Delta_\alpha^g=2$が提案されている[1]。ここではこの関係と、壁方向にフィルタをかけない場合の、スマゴリンスキーモデルに含まれる長さスケールの定義、$\Delta^g=\left(\Delta_x^g\Delta_y^g\Delta_z^g\right)^{1/3}$と$\Delta^{gT}=\left(\Delta_x^{gT}\Delta_y^g\Delta_z^{gT}\right)^{1/3}$の関係から。）この時、本研究ではまた陽的テストフィルタ操作のパラメータと

	a	b	c	A	B	C
$\left(\Delta^g/h\right)^2$	1	4 / 3	2			
$\left(\Delta^T/h\right)^2$				4	6	8

Table 1: Parameters for discretized *grid* and *test* filtering operations

Re_τ	$N_x\times N_y\times N_z$	$L_x\times L_z$	Δx^+	Δz^+
180	32 × 65 × 32	$4\pi\delta\times 4/3\pi\delta$	70.7	23.6
395	48 × 65 × 48	$2\pi\delta\times\pi\delta$	51.7	25.8
590	64 × 65 × 64	$2\pi\delta\times\pi\delta$	57.9	29.0

Table 2: Representative grid resolutions and computational domains at each Reynolds number (δ is the channel half width, N is a gird number and L is a domain size).

しては$\left(\Delta_\alpha^T/h_\alpha\right)^2=4$を採用する。この値はトップハットフィルタ関数を想定したテストフィルタ操作においてシンプソン則を適用した事に相当する。一方DIモデルに対しても陽的グリッドフィルタとテストフィルタ操作に対するフィルタパラメータを予め定義しておく必要がある。ここではDSモデルとの整合性を保つ為に、テストフィルタ操作に対してはDSモデルと同じ$\left(\Delta_\alpha^T/h_\alpha\right)^2=4$を採用する。グリッドフィルタ操作に対してはテストフィルタに対する値4と、ガウシアンフィルタに対して成り立つ、$\left(\Delta_\alpha^{gT}\right)^2=\left(\Delta_\alpha^g\right)^2+\left(\Delta_\alpha^T\right)^2$の関係、及びDSモデルにおいて採用した$\Delta_\alpha^{gT}/\Delta_\alpha^g=2$の関係から、$\left(\Delta_\alpha^g/h_\alpha\right)^2=4/3$を採用する。即ち、表1において(*Ab*)を採用している。図1に平均流速分布、及び渦粘性係数の分布を示す。DSモデルによる対数則領域の過大評価がDIモデルを用いる事で改善されているのがわかる。DIモデルの中では整合性を有しない(II)モデルは対数則の過小評価を示し、その結果はモデルを含まない計算(no_model)とほぼ一致した。これに対して完全な整合性を有する(I)モデルはやや過大評価であり、テストしたモデルの中では部分的に整合性を有する(IV)がDNSとの一致が一番良好である。ただし、対数則領域の評価値は格子解像度に大きく依存する事が予測される。この結果については次節において示す。

尚、対数則の過大評価と渦粘性係数の値との間には密接な関係がある事が図1の下図からわかる。即ち、対数則を一番過大評価しているDSモデルが渦粘性係数のピーク値を一番大きく評価し、一番過小評価しているDI_(II)がピーク値を小さく評価している。整合性の度合いと渦粘性係数の値との間に大きな関係があるのは興味深い。尚、(I)と同様完全な整合性を有する(III)モデルについては、評価されたモデル係数が流れ場全域で負値となった。この原因の一つとして、(25)式で表される通り、整合性を有する三項の係数がゼロとなったことが原因ではないかと推測する。ただし詳細については不明である。

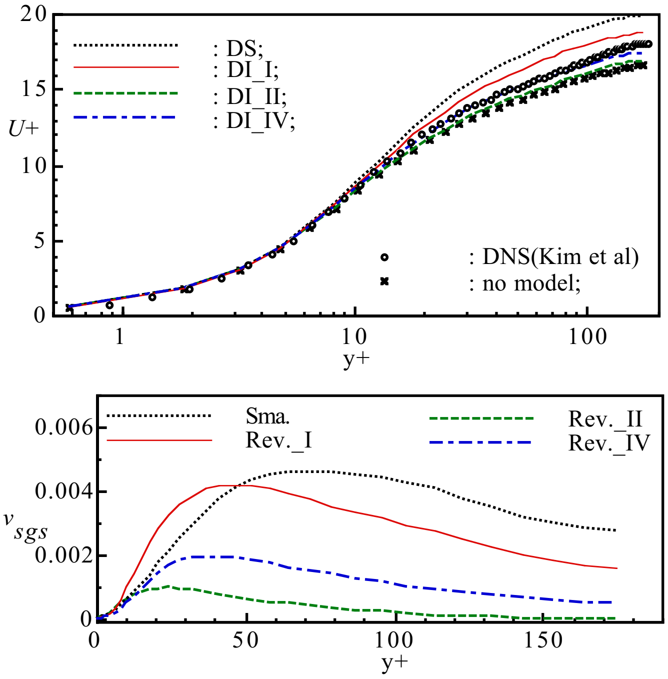

Fig. 1. Mean velocity (above) and eddy viscosity (below) in wall coordinate at Reτ=180 in the case of filtering operation (Ab)

5.2 格子解像度に対するバルク流速予測値の依存性

特に低次の差分法を採用した場合、運動方程式の離散化誤差に起因して、格子解像度により解が大きく変化する事が報告されている[17]。従って、差分法LESにおいて、格子解像度の影響なしにSGSモデルの有用性を検討する事は大変危険である。そこで解析領域は表2のままで、格子数を主流方向、スパン方向に24×24、32×32、48×48、64×64、96×96と変化させた時のバルク流速、$U_b=\int_{-1}^{1}U(y)\,dy/2$の変化を調べる。ここでは図示しないが全ての解析結果において粘性底層での分布は一致しており、バルク流速のDNSの結果に対する過大過小の評価は、対数則領域の過大過小評価と対応がある。ここでは特に表1で表されるフィルタ操作のパラメータに対する依存性も検討する。

図2(a)に各モデルの各種フィルタ操作において評価されたバ

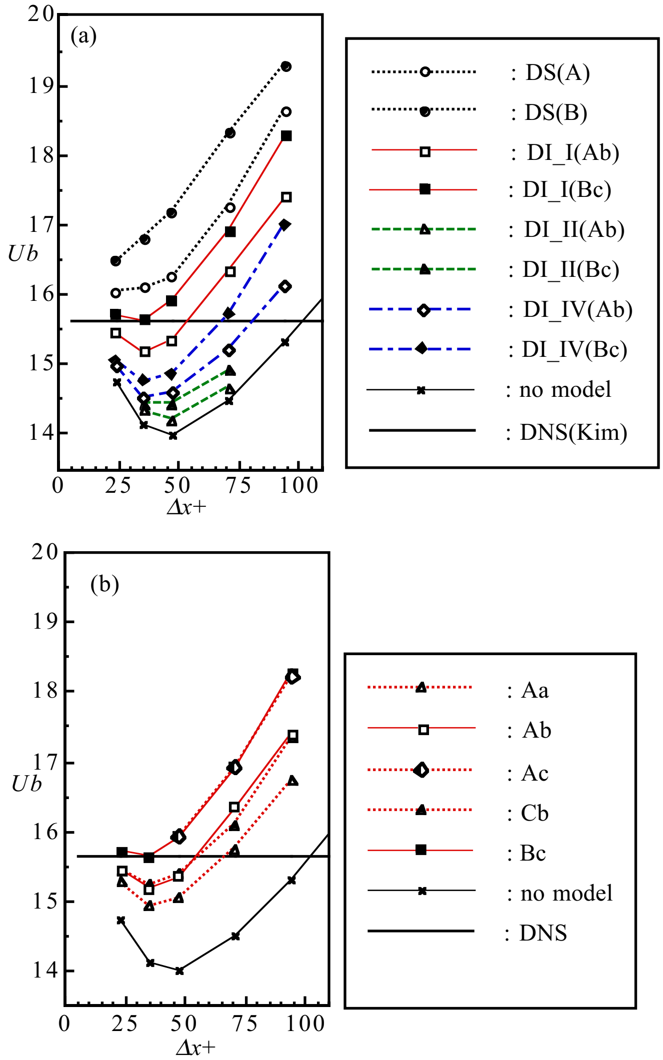

Fig. 2. Bulk velocity v.s. mesh resolution at Reτ=180
(a)Dependence of each model on discretized filtering operation
(b)Dependence of the DI_I model on discretized filtering operation

ルク流速の格子依存性を示す。横軸には主流方向格子解像度を示している。尚、参考の為、DNSの結果を実線で、モデルを外した差分法計算の結果をxで表している。モデルを外した計算結果から四次精度差分法解析においては、打ち切り誤差の影響で、Δ_x^+がおおよそ50程度でバルク流速が最小となり、それ以降は格子を粗くするに従い、バルク流速は増大し、100程度で、モデルを含まない結果とスペクトル法の結果がほぼ一致する事に注意されたい。この傾向は各種SGSを用いた場合にも現れる。全ての計算は格子解像度を上げるに従い、DNSの結果に漸近していく傾向を示しているが、DSモデルの結果は、今回テストした全ての解像度において過大評価を示した。図1で見た通り、DIモデルはこの過大評価傾向を緩和するが、整合性を持たないDI_IIモデルは明らかに過小評価している。各モデル共、格子解像度、フィルタ操作パラメータに対するバルク流速の依存性は顕著である。従って、格子解像度によってDNSともっとも一致する乱流モデル、フィルタパラメータの最適値は異なり、各種モデルの優位性を示すのは容易ではない。しかしDNS解析で観察されている壁面近傍の組織構造が捕らえられる程度の格子解像度という観点から、Δ_x^+が50程度より小さい解像度においてはDI_Iモデルでフィルタパラメータ(Ab)を用いた場合が、一番良い予測を示しているのがわかる。

図2(a)から、スマゴリンスキーモデルの主流流速の過大評価はDI_Iモデルにより改善されている、従って「はじめに」で述べた問題[1]は解決されている。しかし問題[2]については、DIモデルにおいては予め決めるべきモデル係数について、テストフィルタ操作とグリッドフィルタ操作に対する二つのモデル係数が存在する為、スマゴリンスキーモデルと比較して優位さはない。そこで、DI_Iモデルについてこのモデル係数に対する依存性を詳細に検討した結果を図2(b)に示す。即ち、図2(a)ではスマゴリンスキーモデルに用いたモデルパラメータとの整合性から$\left(\Delta_\alpha^{gT}\right)^2=\left(\Delta_\alpha^g\right)^2+\left(\Delta_\alpha^T\right)^2$、$\Delta_\alpha^{gT}/\Delta_\alpha^g=2$の関係を考慮してテストフィルタパラメータ値からグリッドフィルタパラメータ値を決定したが、図2(b)においてはそれぞれのパラメータが独立であると仮定して比較を行った。

テストフィルタパラメータを$\left(\Delta^T/h\right)^2=4$に固定し、グリッドフィルタパラメータを変化させた(Aa)、(Ab)、(Ac)を比較した場合、グリッドフィルタ値によりバルク流速は大きく変化し、大きなグリッドフィルタパラメータを採用する程、見積もられるバルク流速も大きくなる傾向を示している。これに対してグリッドフィルタパラメータを$\left(\Delta^g/h\right)^2=4/3$に固定し、テストフィルタ変化させた(Ab)、(Cb)の両者や、同様にグリッドフィルタを$\left(\Delta^g/h\right)^2=2$に固定し、テストフィルタを変化させた(Ac)、(Bc)を比較した場合、結果はほぼ同じ値を示した。即ち、図2(b)の結果からDI_Iモデルはテストフィルタパラメータに対する、バルク流速の依存性が小さく、最適化すべきパラメータはグリッドフィルタパラメータのみである事がわかる。これは、はじめに述べた、スマゴリンスキーモデルの問題[2]を解決する事になり、ダイナミックモデルの適用を考慮した場合、(19)式で表されるDI_Iモデルの優位性を示す物である。

5.3 $\mathrm{Re}_\tau=395, 590$における結果

最後に、DSモデル、DI_Iモデル、DI_IVモデルの$\mathrm{Re}_\tau=395, 590$における結果を図3に示す。モデルパラメータについては、DSモデルに対しては$\Delta^{gT}/\Delta^g=2^{2/3}$、$\left(\Delta_\alpha^T/h_\alpha\right)^2=4$、DIモデルについては$\left(\Delta_\alpha^g/h_\alpha\right)^2=4/3$、$\left(\Delta_\alpha^T/h_\alpha\right)^2=4$を採用している。低レイノルズ数の場合に見られた傾向はここでも見られ、DSモデルによる対数則領域の平均流速の過大評価はDIモデルを用いる事で改善されている。図1と比較すると、DI_IVモデルはやや過小評価傾向を示しているが、これは図2の格子解像度依存性の評価で見た通り、図1と比較して図3では壁座標で見た場合の格子解像度が上がっており、この影響がでた物である。この解像度におけるDI_IモデルとDNSとの一致は良好である。また主流方向乱流強度についてもDSモデルと比較してDI_Iモデルの有用性は明らかである。

6. 結論

ダイナミックモデルの適用を考慮して、L_{ij}とM_{ij}に対して差分誤差の整合性に着目して渦粘性係数のモデル化を行った。得られたモデルをチャネル乱流において評価した結果、一般的にダイナミックスマゴリンスキーモデルの欠点であると考えられる、対数則領域の過大評価が改善された。また提案したモデルはテストフィルタ操作に対する離散化に際して現れるパラメータΔ^T/hに対する依存性が小さいことが確認され、ダイナミックモデルの適用を考えた場合、スマゴリンスキーモデルと比較して有用なモデルである事がわかった。

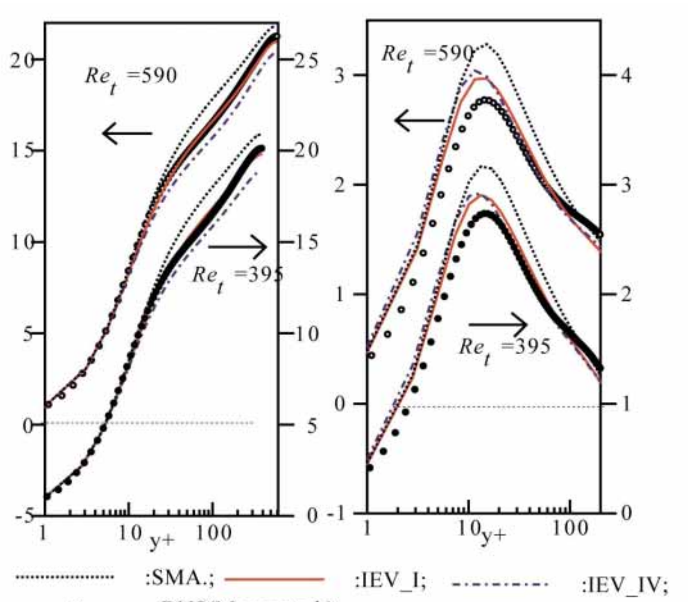

Fig.3 Mean velocity(left) and GS streamwise turbulent intensity (right) in wall coordinate at Reτ=395 and 590

謝辞
本研究に対してして、堀内潔（東工大）、森西洋平（名工大）の両博士より貴重な御助言を頂いた。ここに感謝の意を表する。

参考文献

(1)Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. H., "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", Phys. Fluids, vol. A3(1991), pp.1760

(2)Cabot, W. and Moin, P. , "Large eddy simulation of scalar transport with the dynamic subgrid-scale model", in Large Eddy Simulation of Complex Engineering and Geophysical Flows, edited by B. Galperin and S. A. Orszag (Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1993), 141

(3) Tsubokura, M., Kobayashi, T. and Taniguchi, N., "The assessment of eddy viscosity type SGS models by simulating turbulent channel flow", Proc. of the First AFOSR Int. Conf. on DNS/LES (1997), pp.326

(4) Yoshizawa, A., Tsubokura, M., Kobayashi, T. and Taniguchi, N., "Modeling of the dynamic subgrid-scale viscosity in large eddy simulation", Phys. Fluids, vol. 8 (1996), pp.2254

(5) 森西洋平 , 「ベクトル・レベルの Identity を用いるダイナミック SGS モデリング」, 機械学会論文集 B 編 vol.66, pp.2764(2000)

(6) Lilly, D. K., "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", Phys. Fluids, vol. A4(1992), pp.633

(7) Moser, R. D., Kim, J. and Mansour, N. N., "Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Ret=590, Phys. Fluids, vol. 11(1999), pp.943

(8) 坪倉誠 , 小林敏雄 , 谷口伸行 , 「差分法ダイナミック SGS モデルに適した等方渦粘性型 SGS モデルの構築とその平板チャネル乱流における評価」, 機械学会論文集 B 編 vol.66, pp.1975-1983 (2000)

(9)Tsubokura, M., "Proper representation of the subgrid-scale eddy viscosity for the dynamic procedure in Large Eddy Simulation using finite difference method", Phys. Fluids, vol. 13 (2001), to appear

(10)Germano, M. , "Turbulence: the filtering approach", J. Fluid Mech. 238, 325 (1991)

(11)Bardina, J. , Ferziger, J. H. , and Reynolds, W. C. , "Improved turbulence models based on LES of homogeneous incompressible turbulent flows", Dep. of Mech. Eng., Report No. TF-19, (Stanford University, Stanford , 1984)

(12)Zang, Y. , Street, R. L. , & Koseff, J. , "A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows", Phys. Fluids A5, 3186 (1993)

(13)Vreman, B. , Geurts, B. , and Kuerten, H. , "On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model", Phys. Fluids 6, 4057 (1994)

(14)Y. Morinishi, T. S. Lund, O. V. Vasilyev, & P. Moin, "Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow", J. Comput. Phys. 143, 90 (1998)

(15)A. Leonard, "Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows", Adv. in Geophys. A18, 237 (1974)

(16)堀内潔,「差分法によるLESについて」, 生産研究（東京大学生産技術研究所所報）, vol. 42(1990), pp.43

(17) 森西洋平他 , 「壁乱流の LES における差分精度と格子解像度の影響」, 機械学会論文集 B 編 vol.66, pp.1750-1757 (2000)