マルチスケール法による LES の基礎的研究

A Fundamental Study of the Variational Multiscale Method for LES

○ 奥村 弘, 中央大院, 〒 112-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail：oku@kc.chuo-u.ac.jp
川原 睦人, 中央大理工, 〒 112-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail：kawa@civil.chuo-u.ac.jp
Hiroshi OKUMURA, Dept. of Civil Engrg., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27 Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551
Mutsuto KAWAHARA, Dept. of Civil Engrg., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27 Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551

A Large Eddy Simulation (LES) formulation is developed from the variational multiscale method. Modeling is confined to the effect of a small–scale Reynolds stress, in contrast with classical LES in which entire subgrid–scale stress is modeled. All other effects are accounted for exactly by scale separation employing *bubbles*. It is argued that many shortcomings of the classical LES/constant–coefficient Smagorinsky model are eliminated by *a priori* scale separation in the present approach.

1. はじめに

マルチスケール (variational multiscale) 法 (1) は, 安定化有限要素法の起源への解釈, また SGS (subgrid–scale) モデルに対する変分法的枠組みを与えるために独自に誘導されてきたことは良く知られている．後に続く発展としては, residual–free bubble や事前誤差評価などの数値解析における問題へ主に焦点が当てられてきた．本研究では, SGS モデルに対する変分法的枠組みを進展させることを目的とし, 非圧縮 Navier–Stokes 方程式に対してマルチスケール法を適用することを考える．また, Navier–Stokes 方程式の変分法的定式化において, 気泡関数空間 (2) の概念を用いることにより Large Eddy Simulation (LES) の概念への十分な解釈および一般化を行う．ここではまず, 非圧縮 Navier–Stokes 方程式に対する古典的 LES による定式化の再検討することからはじめる．特に, フィルタリング, SGS 応力または Smagorinsky モデルについての議論を進める．Lilly による Smagorinsky パラメータの推定について言及し, 古典的 LES によるアプローチの欠点をまとめることからはじめる．

2. 非圧縮 Navier–Stokes 方程式

十分に滑らかな境界 $\Gamma = \partial\Omega$ を有する空間領域 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^d (d = 2, 3)$ と時間領域 $[0, T], T > 0$ を定義し, それらかなる領域 $\mathsf{Q} = \Omega \times [0, T]$; $\mathsf{P} = \Gamma \times [0, T]$ を考えていく．初期値・境界値問題は, 流速 $\boldsymbol{u} : \overline{\mathsf{Q}} \mapsto \boldsymbol{R}^d$ と圧力（密度を含む）$p : \mathsf{Q} \mapsto \boldsymbol{R}$ を見出す以下の方程式によって表される．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \mathsf{Q} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathsf{Q} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad \mathsf{P} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}(0) \quad \text{on} \quad \Omega \quad (4)$$

ここで, $\boldsymbol{f} : \mathsf{Q} \mapsto \boldsymbol{R}^d$ は既知の体積力, ν は動粘性係数である．また, $\otimes$ は tensor 積 ($[\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}]_{ij} = u_i v_j$) を示す．式 (1)–(4) はそれぞれ, 線形の運動量のつりあい, 非圧縮の制約条件, non–slip 境界条件および初期条件を表している．

3. 古典的 LES における問題点

従来, 乱流の予測不可性により統計的な平均量をもって Navier–Stokes 方程式に対し定式化を行ってきた．Large Eddy Simulation (LES) においては特にフィルタリングの操作により空間の平均量を用いている．一般的に, 未知量 $\boldsymbol{u}$ に関するフィルタリングされた場 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ は以下のように書ける．

$$\widetilde{\boldsymbol{u}} = \int_{D_\Delta(\boldsymbol{x})} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}, t)\, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \quad (5)$$

ここで, フィルター関数 g は, 全ての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ の近傍における積分領域 $D_\Delta(\boldsymbol{x}) \subset \Omega$ によって定義される一様 (homogeneous) な関数である． また, $D_\Delta(\boldsymbol{x})$ はフィルター幅 Δ によって特徴付けられ, これには様々な選択肢があるが, 通常は $D_\Delta(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ を中心点とする半径 $\Delta/2$ の開球として用いられている．

フィルタリングされた場 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ は一般的に巨視的で粗く, あるいは解像できるスケールとして用いられ, 流れの大きな構造は十分に表すことができるものと仮定される．差 $\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}$, つまり $\boldsymbol{u}'$ は $\boldsymbol{u}$ の変動成分となり, 一般的には微視的で細かく, あるいは解像できない成分として用いられる．

フィルタリングの一様性構造は結果的に空間微分とフィルタリングの操作によってフィルタリングされた場の支配方程式が得られる．しかしながら, 方程式 (1)–(4) に対応するフィルター方程式を得るためには, 全ての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ においてフィルター操作を施さなくてはならず, この場合において, フィルター操作における範囲は領域 Ω の境界を超えてしまうという問題点がある．周期境界条件を完全に満足する領域においては特に問題はないが, 一般的にこのことは数学的あいまいさを生む．この問題点を解決するためには, 境界においてフィルターの幅を適応的に変化させるといったようなアプローチが考えられてきたが, ますます数学的取り扱いが複雑になる．

式 (1)–(4) に対応するフィルタリングされた方程式は, 以下の形式を得る．

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\widetilde{\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}}) + \nabla \widetilde{p} = \nu \nabla^2 \widetilde{\boldsymbol{u}} + \widetilde{\boldsymbol{f}} \quad \text{in} \quad \mathsf{Q} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{in} \quad \mathsf{Q} \quad (7)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad \mathsf{P} \quad (8)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}^0 = \widetilde{\boldsymbol{u}}(0) \quad \text{on} \quad \Omega \quad (9)$$

式 (6) における非線型項 $\widetilde{\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}}$ により完結問題を生むため, 一般的には SGS (subgrid–scale) 応力 $\boldsymbol{T}$ を定義し, フィルタリングされた運動方程式 (6) は以下のように書きかえられる．

$$\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t}+\nabla\cdot(\widetilde{\boldsymbol{u}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}})+\nabla\widetilde{p}=\nu\nabla^2\widetilde{\boldsymbol{u}}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}+\widetilde{\boldsymbol{f}} \tag{10}$$

ここで, 全ての SGS 応力 $\boldsymbol{T}$ は以下のように表せる.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \widetilde{\boldsymbol{u}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}-\widetilde{\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}} \\
&= \widetilde{\boldsymbol{u}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}-\widetilde{(\widetilde{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}')\otimes(\widetilde{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}')} \\
&= \widetilde{\boldsymbol{u}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}-\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{u}}\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}} \qquad \text{Leonard 応力} \\
&\quad -\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{u}}\otimes\boldsymbol{u}'}-\widetilde{\boldsymbol{u}'\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}} \qquad \text{Cross 応力} \\
&\quad -\widetilde{\boldsymbol{u}'\otimes\boldsymbol{u}'} \qquad \text{Reynolds 応力}
\end{aligned}$$

一般的に, $\boldsymbol{T}$ は式 (10) を完結するために, LES においてはモデル化される. さらに明確に言えば, SGS 応力 $\boldsymbol{T}$ の偏差部分;

$$\mathrm{dev}\,\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}-(\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T})\boldsymbol{I} \tag{11}$$

のみモデル化され, 拡張部 $\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}$ は $\widetilde{p}$ に含まれる.

古典的でもっとも広く用いられているモデル手法としてSmagorinsky 渦粘性モデルがある. これによれば, SGS 応力 $\boldsymbol{T}$ は以下のようにモデル化される.

$$\boldsymbol{T}_s=\mathrm{dev}\,\boldsymbol{T}_s=2\nu_T\nabla^s\widetilde{\boldsymbol{u}} \tag{12}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\nu_T &= (C_s\Delta)^2 && (13)\\
\nabla^s\widetilde{\boldsymbol{u}} &= \frac{1}{2}\left(\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}+(\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}})^T\right) && (14)\\
|\nabla^s\widetilde{\boldsymbol{u}}| &= (2\nabla^s\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla^s\widetilde{\boldsymbol{u}})^{1/2} && (15)
\end{aligned}$$

また, C_s は Smagorinsky 定数である.

これまでに Smagorinsky モデルに対する様々な批評が出ている. その中で典型的なものをいくつか挙げると,

- モデル化された SGS 応力 $\boldsymbol{T}_s$ は壁近傍において $\boldsymbol{T}$ の漸近的挙動を再現せず, 特に壁面上において消えない.
- 一様等方性乱流理論から得られる C_s の値は大きくなりすぎる傾向がある.
- $\boldsymbol{T}_s$ は backscatter を表現できない.
- $\boldsymbol{T}_s$ は非定常的に解像できるスケールにおいて過度の減衰を生み, 結果的に撹乱における不適切な生成を与えてしまう. つまり, 渦粘性は解像できるスケールにおいて人工粘性と同様の働きをしてしまう.

これらの欠点に対して, 多くの改善案が出されている. 恐らくもっとも注目すべき成果はダイナミック SGS モデルであり, この中で C_s は次の関数

$$C_s=C_s(\boldsymbol{x},\,t)$$

として仮定され, 適応的に同定される. このダイナミックモデルは様々な流れ場に対してアプローチされ, ほとんどのケースにおいて改善された結果が得られている. しかしながら, 最近の研究成果によれば, Smagorinsky の概念に基づく LES のいかなる新しいモデルも結局上述の問題すべてを解決することはできないといわれている.

4. マルチスケール変分法と気泡関数空間

問題 (1)–(4) に対して, 変分法的定式化を適用する. 定式化に際し, 試行関数空間 $\boldsymbol{\mathcal{S}}=\mathcal{S}_u\times\mathcal{S}_p$ と重み関数空間 $\boldsymbol{\mathcal{V}}=\mathcal{V}_u\times\mathcal{V}_p$ を導入する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_u=\mathcal{V}_u=(H^1_0(\Omega))^d\\
\mathcal{S}_p=\mathcal{V}_p=L^2(\Omega)/\boldsymbol{R}
\end{aligned}$$

この関数空間を用いることにより, 非圧縮 Navier–Stokes 方程式に対する弱表現は, 全ての $\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{w},\,q\}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}$ に対し, 次の弱形式を満たす満たす $\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{u},\,p\}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}$ を見出す変分問題を得ることができる.

$$B(\boldsymbol{W},\,\boldsymbol{U})=(\boldsymbol{W},\,\boldsymbol{F})\quad\forall\boldsymbol{W}\in\boldsymbol{\mathcal{V}} \tag{16}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{W},\,\boldsymbol{U}) &= <\boldsymbol{w},\,\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}>-<\nabla\boldsymbol{w},\,\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}> \\
&\quad +<q,\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}>-<\nabla\cdot\boldsymbol{w},\,p> \\
&\quad +<\nabla^s\boldsymbol{w},\,2\nu\nabla^s\boldsymbol{u}> \qquad (17)
\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{W},\,\boldsymbol{F})=<\boldsymbol{w},\,\boldsymbol{f}> \tag{18}$$

また, $<\cdot,\cdot>$ は領域 Ω における L^2 内積 $<u,\,v>=\int_\Omega u\,v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ を示している.

マルチスケール法の根本的な考え方は, 未知量 v に対して以下の定義により成り立つ.

$$v=\overline{v}+v' \tag{19}$$

一般的に $\overline{v}$ は解像できるスケール (large–scale) として扱われ, 流れの大きな構造を表すのに十分であるものとする. また, 差 $v-\overline{v}=v'$ は v の変動成分となり, 一般的に v' は解像できないスケール (small–scale) として扱われる.

本研究においては, このマルチスケールモデルに基づき有限要素近似空間および気泡関数空間を用いて近似することを考える. 気泡関数要素は, 要素毎に定義された気泡関数を通常の有限要素 (三角形一次要素) に加えた有限要素近似空間を用いる近似手法である. 通常 (三角形一次要素) の有限要素空間 $\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}},\,\overline{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ と気泡関数の空間 $\boldsymbol{\mathcal{S}}',\,\boldsymbol{\mathcal{V}}'$ を導入する. 気泡関数要素では, この二つの有限要素空間の和;

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \overline{\mathcal{S}}\oplus\mathcal{S}' && (20)\\
\mathcal{V} &= \overline{\mathcal{V}}\oplus\mathcal{V}' && (21)
\end{aligned}$$

を用いて近似が行われる. 以上のことを踏まえ, 気泡関数要素による混合型の Petrov–Galerkin 近似 (2, 3) を適用することにより, 全ての $\boldsymbol{W}_h=\{\boldsymbol{w}_h,\,q_h\}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ に対し, 次の弱形式を満たす満たす $\boldsymbol{U}_h=\{\boldsymbol{u}_h,\,p_h\}\in\boldsymbol{\mathcal{S}}_h$ を見出す近似問題を得ることができる.

$$B(\boldsymbol{W}_h,\,\boldsymbol{U}_h)=(\boldsymbol{W}_h,\,\boldsymbol{F}_h)\quad\forall\boldsymbol{W}_h\in\boldsymbol{\mathcal{V}}_h \tag{22}$$

近似空間 (20)–(21) を用いることにより, 式 (22) は以下に示す二つの問題に分けることができる.

$$\begin{aligned}
B(\overline{\boldsymbol{W}}_h,\,\overline{\boldsymbol{U}}_h+\boldsymbol{U}'_h) &= (\overline{\boldsymbol{W}}_h,\boldsymbol{F}_h) && (23)\\
B(\boldsymbol{W}'_h,\,\overline{\boldsymbol{U}}_h+\boldsymbol{U}'_h) &= (\boldsymbol{W}'_h,\boldsymbol{F}_h) && (24)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\boldsymbol{U}_h = \overline{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{U}'_h \qquad (25)$$
$$\boldsymbol{W}_h = \overline{\boldsymbol{W}}_h + \boldsymbol{W}'_h \qquad (26)$$

いま, 流速場の近似解 $\boldsymbol{u}_h$ と近似重み関数 $\boldsymbol{w}_h$ は以下のように表現できる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_h &= \overline{\boldsymbol{u}}_h + \boldsymbol{u}'_h \\ &= \overline{\boldsymbol{u}}_h + \sum_e \phi_e \boldsymbol{b}_e \\ \boldsymbol{w}_h &= \overline{\boldsymbol{w}}_h + \boldsymbol{w}'_h \\ &= \overline{\boldsymbol{w}}_h + \sum_e (\varphi_e + \nu'_T \phi_e) \boldsymbol{c}_e\end{aligned}$$

ここで, ϕ_e, φ_e は要素毎に定義される C_0 連続性を有する適合型の気泡関数であり, $\boldsymbol{b}_e, \boldsymbol{c}_e$ は気泡関数に対応する自由度である. 変数 ν'_T は, 後に定義する渦粘性係数である. 気泡関数要素による混合型の Petrov–Galerkin 近似において, 一般的に $\phi_e \neq \varphi_e$ となる特徴を持ち, 次の関係を満足する.

$$< \phi_e, 1 >_e = < \varphi_e, 1 >_e = A_e \qquad \text{正規化}$$

ここで, A_e は要素 Ω_e における体積 (2 次元では面積) である. 一方, 圧力場の近似解 p_h とその近似重み関数 q_h においては, 流速場と同様にして $p_h = \overline{p}_h + p'_h$ および $q_h = \overline{q}_h + q'_h$ のように表すことが考えられるが, $\boldsymbol{u}'_h$ は要素毎に非圧縮条件を満足する必要があり, p'_h には inf–sup 条件が課せられる. このため, 本研究における気泡関数要素による離散化においては $p'_h = q'_h = 0$ を選ぶ必要がある. ここで用いている $\overline{(\cdot)}$ と $(\cdot)'$ は, それぞれ large–scale および small–scale における場に対応しており, 古典的 LES において用いられるフィルター理論によるものと幾分異なっている. ここで, $\overline{\boldsymbol{U}}_h$ と $\boldsymbol{U}'_h$ はそれぞれ, 空間 $\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}}_h$ と $\boldsymbol{\mathcal{S}}'_h$ における $\boldsymbol{U}_h$ の写像である.

次に B に対する第一変分および第二変分を以下のように定義する.

$$B_1(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} B(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h + \varepsilon \boldsymbol{U}'_h)\right|_{\varepsilon=0} \qquad (27)$$
$$B_2(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) = \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2} B(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h + \varepsilon \boldsymbol{U}'_h)\right|_{\varepsilon=0} \qquad (28)$$

これらのことを用いることにより, 次の関係式を得ることができる.

$$\begin{aligned}& B(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{U}'_h) \\ =\ & B(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h) \\ +\ & B_1(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) \\ +\ & \frac{1}{2} B_2(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) \end{aligned} \qquad (29)$$

ここで,

$$\frac{1}{2} B_2(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) = - < \nabla \boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{u}'_h \otimes \boldsymbol{u}'_h > \qquad (30)$$

また, $B_1(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h)$ は, 線形化された Navier–Stokes 作用素であり, 以下のように表される.

$$\begin{aligned}& B_1(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) \\ =\ & < \boldsymbol{w}_h, \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t} > \\ -\ & < \nabla \boldsymbol{w}_h, \overline{\boldsymbol{u}}_h \otimes \boldsymbol{u}'_h + \boldsymbol{u}'_h \otimes \overline{\boldsymbol{u}}_h > \\ +\ & < q_h, \nabla \cdot \boldsymbol{u}'_h > \\ +\ & < \nabla^s \boldsymbol{w}_h, 2\nu \nabla^s \boldsymbol{u}'_h > \\ +\ & < \nabla^s \boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{R}'_s > \end{aligned} \qquad (31)$$

この中で, $\boldsymbol{R}'_s$ は以下のような SGS 応力型の形式をとる.

$$\boldsymbol{R}'_s = 2\nu'_T \nabla^s \boldsymbol{u}' \qquad (32)$$

式 (29)–(31) の関係を用いて, 式 (23)–(24) は以下のように書きかえられる.

$$\begin{aligned}& B(\overline{\boldsymbol{W}}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h) + B_1(\overline{\boldsymbol{W}}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) \\ & = < \nabla \overline{\boldsymbol{w}}_h, \boldsymbol{u}'_h \otimes \boldsymbol{u}'_h > + (\overline{\boldsymbol{W}}_h, \boldsymbol{F}_h) \end{aligned} \qquad (33)$$

$$\begin{aligned}& B_1(\boldsymbol{W}'_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h, \boldsymbol{U}'_h) - < \nabla \boldsymbol{w}'_h, \boldsymbol{u}'_h \otimes \boldsymbol{u}'_h > \\ & = - \left[B(\boldsymbol{W}'_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h) - (\boldsymbol{W}'_h, \boldsymbol{F}_h) \right] \end{aligned} \qquad (34)$$

上式の導出に関して, 通常（三角形一次要素）の有限要素空間の元と気泡関数の空間の元における, エネルギー内積の直交性を用いている.

$$< \nabla^s \overline{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{R}'_s > = \sum_e < \nabla^s \overline{\boldsymbol{w}}_h, 2\nu'_T \nabla^s \boldsymbol{u}' >_e = 0 \qquad (35)$$

式 (33)–(34) は, 通常の有限要素近似解および気泡関数の自由度に関して連立された近似方程式になっている. また, 式 (33) は large–scale における方程式, 式 (34) は small–scale における方程式とそれぞれ対応させることができる. 式 (34) の右辺項は通常の有限要素近似解に関する残差になっていることがわかる. このため, 通常の有限要素近似解が解析解に近づけば, 気泡関数の自由度の値は 0 に収束するといえる.

古典的 LES のにおいて, 全ての SGS 応力 $\boldsymbol{T}$ は Reynolds, corss そして Lenard 応力に分けられた. 一方, 本研究のおける定式化においても古典的 LES に類似する項が以下のように現れる.

$$< \nabla \overline{\boldsymbol{w}}_h, \boldsymbol{u}'_h \otimes \boldsymbol{u}'_h > \ \text{Reynolds 応力} \qquad (36)$$
$$< \nabla \overline{\boldsymbol{w}}_h, \overline{\boldsymbol{u}}_h \otimes \boldsymbol{u}'_h + \boldsymbol{u}'_h \otimes \overline{\boldsymbol{u}}_h > \ \text{Cross 応力} \qquad (37)$$
$$\begin{aligned}& < \nabla \overline{\boldsymbol{w}}_h - \nabla \boldsymbol{w}_h, \overline{\boldsymbol{u}}_h \otimes \overline{\boldsymbol{u}}_h > \\ & = - < \nabla \boldsymbol{w}'_h, \overline{\boldsymbol{u}}_h \otimes \overline{\boldsymbol{u}}_h > \ \text{Lenard 応力} \end{aligned} \qquad (38)$$
$$< \nabla^s \boldsymbol{w}'_h, \nu'_T \nabla^s \boldsymbol{u}'_h > = < \nabla^s \boldsymbol{w}'_h, \boldsymbol{R}'_s > \ \text{SGS 応力} \qquad (39)$$

ここで, (36)–(37) は式 (33) において見られ, (38)–(39) は式 (34) において見られる. これらの導出に関して, いかなる仮定も用いておらず, 気泡関数空間を用いた結果, 古典的 LES との類似性が見出せる. 本研究においては, 古典的 Reynolds 応力項 $< \nabla \overline{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}' >$ と区別するために項 $< \nabla \boldsymbol{w}', \boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{u}' >$ を small–scale Reynolds 応力項と定義することにする.

ここで注意すべきことは, もし $\overline{\boldsymbol{U}}_h$ が Navier–Stokes 方程式の解析解であるとすると,

$$B(\boldsymbol{W}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h) = (\boldsymbol{W}_h, \boldsymbol{F}_h) \qquad \forall \boldsymbol{W}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h \qquad (40)$$

特に,

$$B(\boldsymbol{W}'_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h) = (\boldsymbol{W}'_h, \boldsymbol{F}_h) \qquad \forall \boldsymbol{W}'_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}'_h \tag{41}$$

において, $\boldsymbol{U}'_h = \boldsymbol{0}$ となり, 次式を満たすことになる.

$$B(\overline{\boldsymbol{W}}_h, \overline{\boldsymbol{U}}_h) = (\overline{\boldsymbol{W}}_h, \boldsymbol{F}) \qquad \overline{\boldsymbol{W}}_h \in \overline{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_h \tag{42}$$

この結果は恒等的に large–scale 方程式を満たす．つまり, small–scale 方程式はモデル化しているにも関わらず, large–scale 方程式は適合性を満足し, 古典的 LES と対比させれば, このことは本手法の大きな利点であるといえる．さらに, 気泡関数の性質により要素境界 $\partial\Omega_e$ あるいは領域 Ω の境界 Γ において 0 となり, また領域 Ω において $\nabla \cdot \boldsymbol{u}'_h = 0$ を満たすことから, $\boldsymbol{u}'_h$ は壁面近傍において正確な漸近的挙動を示すと考えられる.

また, 数値安定性の面においては, 気泡関数要素による混合型の Petrov–Galerkin 近似 (3) において得られる安定化パラメータ

$$\boldsymbol{\tau}_e = < \nabla^s \varphi_e, 2\nu\nabla^s \phi_e >_e^{-1} \frac{< \varphi_e, 1 >_e < \phi_e, 1 >_e}{A_e} \tag{43}$$

により, large–scale の成分に関してのみ適切な安定化効果が働く.

5. 気泡関数と Smagorinsky モデル

流体力学的な観点から, small–scale Reynolds 応力項 $< \nabla \boldsymbol{w}'_h, \boldsymbol{u}'_h \otimes \boldsymbol{u}'_h >$ は small–scale における変動成分の挙動を示す．しかしながら, この効果は離散化された場合, 直接数値シュミレーション (DNS) のような十分な細かい有限要素の分割を行わない限り, 正確に表現することはできず, さらに乱流散逸 (消散) を説明するには不十分である．結果的にわれわれは離散系において, 項 $< \nabla \boldsymbol{w}'_h, \boldsymbol{u}'_h \otimes \boldsymbol{u}'_h >$ の効果を正確に説明するためにモデル化するべきである．古典的 LES と比較し, 本手法では全ての SGS 応力 $\boldsymbol{T}$ をモデル化する必要性はなく, 解像できないスケールにおける粘性散逸のモデル化に伴う問題を減少させている．本研究では, 古典的 LES において導出される渦粘性モデルに対応する渦粘性係数 ν'_T が項 (32) のように small–scale 方程式 (34) において現れる.

古典的 LES では連続系においてフィルター場を導出することによって SGS 応力のモデル化を渦粘性によって行い, それに伴って上述の様々な問題を引き起こしてきた．一方, 本研究による定式化では, 元の連続系における Navier–Stokes 方程式には一切のモデル化を行わず, 離散系の有限要素近似モデルにおいて気泡関数空間を取り入れることで古典的 LES との類似性が見出すことができる. 結果的に本研究の定式化によって渦粘性項が自ずと現れ, 気泡関数の形状に対応して渦粘性係数 ν'_T が決定されることになる.

気泡関数による渦粘性係数 ν'_T の定義には二通りの可能性がある．どちらの場合においても Lilly の解析に基づくパラメータの推定法を用いる.

$$\nu'_T = (C'_s \Delta')^2 |\nabla^s \boldsymbol{u}'_h| \tag{44}$$

$$\nu'_T = (C'_s \Delta')^2 |\nabla^s \overline{\boldsymbol{u}}_h| \tag{45}$$

はじめのケースにおいては, ν'_T は small–scale の流速成分に強く依存する．二つ目のケースにおいては, large–secale の成分に部分的に依存しているといえる．直感的にはじめのケースは物理モデルとして整合性がとれているように思われ, $\boldsymbol{R}'_s$ は large–scale において全く感度を持たないことになる．しかしながら, 一つ目のケースにおいては, 渦粘性係数を求めるためには非線型問題を解くため, 二つ目のほうが数値解析上単純になり, $\boldsymbol{R}'_s$ は large–scale に対して部分的に反応を示すことになる.

6. おわりに

本研究において, マルチスケール法の概念に対して気泡関数による有限要素近似を用いることにより LES の一般化および解釈を行った．フィルタリングにおける SGS 応力のモデル化を伴う古典的 LES をスケールの事後 (*a posteriori*) 分離法と呼べば, 本手法におけるマルチスケール有限要素近似は, スケールの事前 (*a priori*) 分離法として別の解釈もできる． 本定式化の中では small–scale Reynolds 応力の効果を small–scale 方程式の中で形式上モデル化していることになる．以下に古典的 LES と本手法との比較をまとめる.

- 解像できないスケール (small–scale) に対する近似方程式には渦粘性モデルが施される．解像できるスケール (large–scale) における近似方程式にはモデルは含んでおらず, 恒等的に Navier–Stokes 方程式の解析解 $\boldsymbol{u}'_h = \boldsymbol{0}$ (つまり適合条件) を満たす.
- 全ての SGS 応力に対し, 変動成分 $\boldsymbol{u}'_h = \boldsymbol{u}_h - \overline{\boldsymbol{u}}_h$ は壁面近傍の正確な漸近挙動を表現する.
- 渦粘性項 $< \nabla^s \boldsymbol{w}'_h, 2\nu'_T \nabla^s \boldsymbol{u}'_h >$ は変動成分 (small–scale) のみに働くため, 古典的 LES において問題であった解像成分の過度な減衰を改善する.
- 気泡関数には安定化作用のみならず, フィルタリング作用素に類似した働きを持つ.

本アプローチでは消散（散逸）構造において Smagorinsky 定数は強くは依存しないと考えられる．しかしながら, 変動成分に関する散逸の効果を生んでしまうことが考えられる．結果的にそのことが, Smagorinky 定数を空間に一定とした場合でも, 様々な流れに対して十分なアプローチができるといえる．ここで, 強調したいことは, 本研究で得られた large–scale 方程式はモデル化は含まれておらず, 恒等的に全ての Navier–Stokes 方程式の解析解を満たす．このことは, 古典的 LES の Smagorinsky モデルでは得られなかった誤差推定において重要となる適合条件を見たしている．一方, 本渦粘性モデルは非常に単純であるが, 境界層での挙動を数値計算で追う場合に非構造および過度のアスペクト比を持ったメッシュを用いることができる.

参考文献

1. Hughes, T.J.R., Feijòo, G.R., Mazzei, L. and Quincy, J.-B., “The Variational Multiscale Method — A Paradigm for Computational Mechanics,” *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 166, (1998), pp. 3-24.
2. 奥村, 川原, “非圧縮体に対する非適合気泡関数を用いた MINI 要素による Petrov–Galerkin 有限要素法,” 応用力学論文集, Vol. 3, (2000), pp. 275-280.
3. Okumura, H. and Kawahara, M., “A new stable bubble element for incompressible fluid flow based on a mixed Petrov–Galerkin finite element formulation,” *J. Appl. Mech.*, (to appear).