

# 回転チャネル乱流を予測するための乱流モデル

## Improved Turbulence Model for Rotating Channel Flows

○ 服部 博文, 名古屋工業大学工学部, 〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町, Email: hattori@heat.mech.nitech.ac.jp  
長野 靖尚, 名古屋工業大学工学研究科, Email: nagano@heat.mech.nitech.ac.jp

Hirofumi HATTORI, Dept. of Mech. Eng., Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466-8555, JAPAN

Yasutaka NAGANO, Dept. of Environmental Tech., Graduate School of Eng., Nagoya Institute of Technology

We propose an improved non-linear  $k-\varepsilon$  model for predicting rotating channel flows. First, we have evaluated the existing non-linear  $k-\varepsilon$  model using the direct numerical simulation (DNS) database on a fully developed rotating turbulent channel flow. It is found that the transport equation for the turbulent energy dissipation-rate and the expressions for the Reynolds stresses give results in disagreement with the DNS data. Next, we have assessed the non-linear  $k-\varepsilon$  model at various rotation numbers. Predictions from the non-linear  $k-\varepsilon$  model indicate weak dependence on the rotation number. Finally, based on these assessments, we have modified the non-linear  $k-\varepsilon$  model. This revised model provides good agreement with the DNS data at any rotation numbers.

### 1. 緒言

高度分散エネルギーシステムで用いられるマイクロガスタービンの設計・開発において、その効率を正確に把握するためには流動と伝熱の詳細な解析は不可欠である。近年のコンピュータの性能向上に伴い、数値シミュレーションによる流動と伝熱の解析は広く行われるようになってきた。しかし、目標とするマイクロガスタービンは、非常に高温、高回転で運転されるため、乱流遷移現象が翼列内で起こり、また翼周りなどでは、曲り、剥離、再付着等様々な現象が同時に影響するため、正確なシミュレーションは非常に困難である。それらの現象をより正確に予測できるかどうかは乱流モデルの性能によるところが非常に大きい。

マイクロガスタービンの現象解明における基礎的な場は回転を伴うチャネル乱流であるが、スパン方向に回転軸を持つ場合、運動方程式に陽的な回転の項が含まれないため、線形渦粘性近似を使用した 2 方程式乱流モデルには回転の効果を表す項は現れない。従って、これを解析するためには、非線形渦粘性モデルもしくは応力方程式モデルが必要となる。実用上の問題から応力方程式モデルはその取り扱いが困難であり、非線形渦粘性モデルに対しても回転チャネル乱流の予測において詳細な評価が必要である。

本研究では、非線形  $k-\varepsilon$  モデル<sup>1</sup>を基に回転チャネル乱流に適した乱流モデルを提案する。モデル構築の際には、DNS データベースを用いた評価方法<sup>2</sup>を基に、モデル方程式を回転チャネル乱流において評価する。また、モデルの回転数に対する予測値の依存性も調べ、回転場に対するモデル予測値の改善を図る。

### 2. 基礎方程式

回転チャネル乱流における、レイノルズ平均化された基礎方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\bar{U}_i}{D\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) - 2\epsilon_{ikl} \Omega_k \bar{U}_l \quad (2)$$

ここで、 $\Omega_k$  は回転角速度、 $\epsilon_{ikl}$  は交替テンソルである。遠心力は圧力として扱うことができるため、次式のように圧力を定義しその効果を含めた。

$$\bar{P} = \bar{P}' - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 \quad (3)$$

式 (2) は、図 1 に示すような、スパン方向を軸に  $\Omega$  で回転する発達した回転 2 次元チャネル乱流では以下のようになる。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \overline{uv} \right) \quad (4)$$

つまり、スパン方向を回転軸とする場合、方程式中に回転にかかる項が陽的に残らない。そこで、レイノルズ応力に回転の項を含むモデルが必要となる。また、回転乱流におけるモデリングの問題点は、レイノルズ応力輸送方程式に現れる回転項

$$C_{ij} = 2\Omega_m (\overline{u_i u_k} \epsilon_{mkj} + \overline{u_j u_k} \epsilon_{mki}) \quad (5)$$

が、 $C_{ii} = 0$  となるため、乱流エネルギー  $k$  と散逸率  $\varepsilon$  の輸送方程式に現れないことにある。このため、回転乱流を予測するためには非等方成分が表現できる非線形  $k-\varepsilon$  モデル以上を用いなければならない。そこで、本研究では以下に示すレイノルズ応力が非線形表現で与えられる Abe-Kondoh-Nagano モデル<sup>1</sup> (NLAKN) を元にモデルの改良を施す。

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & (2/3)k\delta_{ij} - (1/f_R) [2\nu_t S_{ij} \\ & + 4C_D(\nu_t^2/k) (S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}S_{kj}) \\ & - 4C_D(\nu_t^2/k) (S_{ik}S_{kj} - S_{mn}S_{mn}\delta_{ij}/3)] \quad (6) \end{aligned}$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu (k^2/\varepsilon) \quad (7)$$

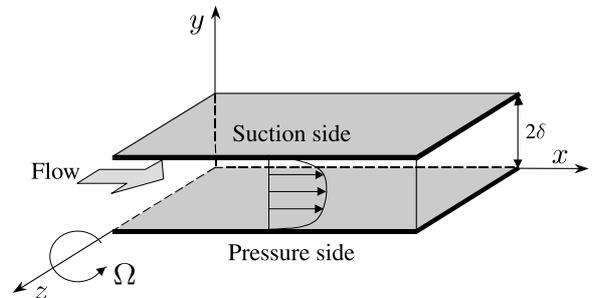


Fig. 1: Rotating channel flow and coordinate system

$$f_R = 1 + (C_D \nu_t / k)^2 \times [(22/3)\Omega^2 + (2/3)(\Omega^2 - S^2) f_B] \quad (8)$$

$$f_B = 1 + C_n (C_D \nu_t / k)^2 (\Omega^2 - S^2) \quad (9)$$

$$f_\mu = [1 - f_w(26)] \times \left\{ 1 + \left( 35/R_t^{3/4} \right) \exp \left[ - (R_t/30)^{3/4} \right] \right\} \quad (10)$$

ここで,  $S_{ij}$  はひずみ速度テンソル  $[= (\partial \bar{U}_i / \partial x_j + \partial \bar{U}_j / \partial x_i) / 2]$ ,  $\Omega_{ij}$  は渦度テンソル  $[= (\partial \bar{U}_i / \partial x_j - \partial \bar{U}_j / \partial x_i) / 2]$ ,  $S$  はひずみパラメータ  $= (2S_{ij} S_{ij})^{1/2}$ ,  $\Omega$  は渦度パラメータ  $= (2\Omega_{ij} \Omega_{ij})^{1/2}$ ,  $S^2 = S_{ij} S_{ij}$ ,  $\Omega^2 = \Omega_{ij} \Omega_{ij}$  である. また, 回転系においては, 式中の渦度テンソル  $\Omega_{ij}$  は次式の絶対渦度テンソルに置き換えなければならない<sup>3</sup>.

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \epsilon_{ijk} \Omega_k \quad (11)$$

乱流エネルギー  $k$  とその散逸率  $\epsilon$  は次式で与えられる.

$$\frac{Dk}{D\tau} = D_k + T_k + \Pi_k + P_k - \epsilon \quad (12)$$

$$\frac{D\epsilon}{D\tau} = D_\epsilon + T_\epsilon + \Pi_\epsilon + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} f_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} f_{\epsilon 2} \epsilon) \quad (13)$$

式(12), (13)中の  $D_k, D_\epsilon$  は粘性拡散項,  $T_k, T_\epsilon$  は乱流拡散項,  $\Pi_k, \Pi_\epsilon$  は圧力拡散項,  $P_k$  は生成項である. 但し, NLAKN モデルでは  $\Pi_k = \Pi_\epsilon = 0$  である.

### 3. モデルの評価

#### 3.1 散逸方程式の評価

まず, 応力方程式モデルを含め, すべてのモデルの予測値に影響を与える  $\epsilon$  方程式の評価を DNS データベース<sup>5</sup> ( $Re_\tau = u_\tau^* \delta / \nu = 150$ ,  $Ro_\tau = 2\Omega \delta / u_\tau^* = 2.5$ :  $u_\tau^*$  は両壁面の平均摩擦速度) を用いて行った. 評価を行ったモデルは, 我々のグループでこれ迄開発してきた Nagano-Shimada (NS) モデル<sup>4</sup>, 線形 Abe, Kondoh and Nagano (AKN) モデル<sup>6</sup>, 非線形 Abe, Kondoh and Nagano (NLAKN) モデル<sup>1</sup> である.

図2に各モデルにおける  $\epsilon$  方程式の評価結果を示した. 図から, 線形 AKN モデルが Pressure Side の壁面近傍において過剰予測を示し, 他のモデルは DNS の結果に追従

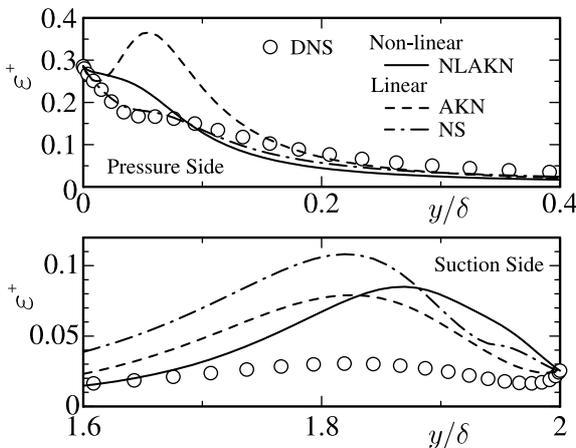


Fig. 2: A priori test for  $\epsilon$ -equations

していることが分かる. また, Suction Side においては流れが層流化の傾向にあり, そのため乱流エネルギー散逸量そのものが減少している. ここで, NS モデルが他のモデルと比較して過剰予測を示しているのは, その方程式に AKN, NLAKN では無視している壁面近くの散逸の生成を担う生成項を有しているためである. さらに, 壁面影響関数中に, 壁面摩擦速度  $u_\tau$  (NS) もしくは Kolmogorov の速度スケール  $u_\epsilon [= (\nu \epsilon)^{1/4}]$  (AKN, NLAKN) を用いている差が結果に影響を与えていると考えられる.

#### 3.2 モデル方程式の評価

次に, NLAKN モデル<sup>1</sup> を用い, 回転数を変えて対象場を解析した. 回転チャンネル乱流においては, 回転率  $S = -2\Omega / (d\bar{U}/dy)$  が  $S = -1$  となる中立安定状態の領域が存在することが知られ<sup>7</sup>, この関係から次の関係が導かれる.

$$\bar{U}^+ = Ro_\tau \left( \frac{y}{\delta} \right) + C \quad (14)$$

この関係式から, チャンネル内の中立安定領域では,  $Ro_\tau$  の勾配を持った速度分布が観察される. モデルがこの関係式を, その予測値から満足できるかどうかを調べた結果を図3に DNS データ<sup>7</sup> と共に示す. DNS で  $Ro_\tau = 3.05, 7.63$  において, モデル計算では, それぞれ  $Ro_\tau = 8.0, 20.0$  で DNS が示すこの関係式と同じ勾配が予測できることが分かった. これより, モデルの回転数依存性が約3倍程度低いことが分かる.

次に高回転時におけるモデルの予測値を DNS データ<sup>8</sup> ( $Ro = 2\Omega \delta / U_b = 1.5$ ,  $Re_b = 2U_b \delta / \nu = 3750$ :  $U_b$  は断面平均速度) と併せて評価したものを図4に示した. NLAKN モデルは, 先の結果どおり3倍程度の回転数依存性が低いため,  $Ro = 4.2$  として計算を行った. ここでの問題点は, Suction Side において DNS では乱流エネルギーがほぼ0となっているのに対し, モデル予測では

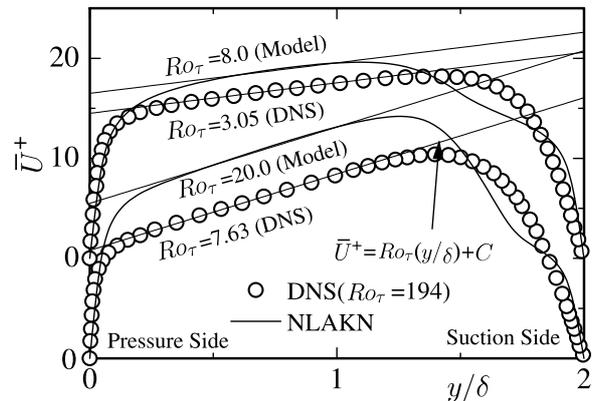


Fig. 3: Mean velocity profiles in a rotating channel flow

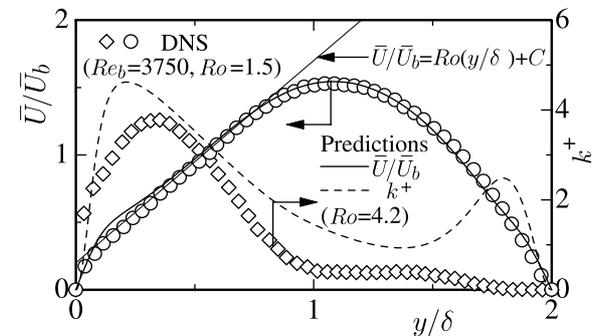


Fig. 4: Profiles of turbulent quantities in a rotating channel flow ( $Ro = 1.5$ )

かなりの値をとってしまい、層流化の傾向が捉えられないことにある。

以上により、モデル改良に関する指針を得ることが出来た。

#### 4. モデルの改良

回転チャネル乱流におけるモデルの予測性能を向上させるために、本研究では散逸方程式に Shimimura<sup>9</sup>による回転付加項を付加しその効果を高めた。また、回転を伴う壁乱流においては、その乱流諸量の分布が非対称形となることから、奇関数であるこのモデルが有意であると考え採用した。さらに、回転数に対する依存性を上げるために若干の修正を行った。

$$R = C_{\Omega} f_{\Omega} k \epsilon_{ij\ell} W_{ij} \Omega_{\ell} \quad (15)$$

$$f_{\Omega} = C_{f_{\Omega 1}} \exp \left[ - \left( \frac{Ro_{\tau}}{12} \right)^{0.1} \right] + C_{f_{\Omega 2}} \exp \left( - \frac{R_{tm}}{10} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{Ro_{\tau}}{12} \right)^2 \right] \right\} \quad (16)$$

ここで、 $C_{\Omega} = -0.15$ ,  $C_{f_{\Omega 1}} = 10.0$ ,  $C_{f_{\Omega 2}} = 0.7$  である。

また、上式中の関数  $R_{tm}$  は Suction Side での層流化現象を捉えるため、壁面影響関数中の無次元距離  $y^* = u_{\varepsilon} y / \nu$  の代わりに乱流レイノルズ数  $R_t$  と  $y^*$  の調和平均からなる以下の形を与えたものである。

$$R_{tm} = \frac{C_{tm} y^* R_t^{1/4}}{C_{tm} R_t^{1/4} + y^*} \quad (17)$$

ここで、 $C_{tm} = 1.3 \times 10^2$  である。これに伴い、方程式中のモデル関数は次式のように再定義されている。

$$f_{\mu} = [1 - f_w(24)] \left[ 1 + \left( \frac{55}{R_t^{3/4}} \right) \exp \left( - \frac{R_{tm}}{150} \right) \right] \quad (18)$$

$$f_{\varepsilon} = \left\{ 1 - 0.3 \exp \left[ - \left( \frac{R_t}{6.5} \right) \right] \right\} [1 - f_w(3.5)] \quad (19)$$

$$f_w(\xi) = \exp \left[ - \left( \frac{R_{tm}}{\xi} \right)^2 \right] \quad (20)$$

次に、乱流エネルギーと散逸方程式には、壁面漸近挙動を正確に満たすよう次式で示される Nagano-Shimada<sup>4</sup> による圧力拡散項を付加した。

$$\Pi_k = \max \left[ -0.5\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} f_{wk} \right), 0 \right] \quad (21)$$

$$\Pi_{\varepsilon} = C_{\varepsilon 4} \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (1 - f_{w\varepsilon}) \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial k}{\partial x_j} f_{w\varepsilon} \right] \quad (22)$$

ここで、 $f_{wk} = f_{w\varepsilon} = f_w(5) = \exp \left[ - (R_{tm}/5)^2 \right]$ ,  $C_{\varepsilon 4} = 0.5$  である。

また、Loss 側への影響を考慮し乱流拡散項に、式(17)で定義される関数形を用い次式のように再定義した。

$$T_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_s f_{t1} \frac{\nu_t}{k} u_j u_{\ell} \frac{\partial k}{\partial x_{\ell}} \right) \quad (23)$$

$$f_{t1} = 1 + 8f_w(5), \quad C_s = 1.4$$

$$T_{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{\varepsilon} f_{t2} \frac{\nu_t}{k} u_j u_{\ell} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{\ell}} \right) \quad (24)$$

$$f_{t2} = 1 + 8f_w(5), \quad C_{\varepsilon} = 1.4$$

さらに、散逸方程式には付加生成項である  $P_{\varepsilon 3}$  項<sup>4</sup>も付加した。

$$P_{\varepsilon 3} = C_{\varepsilon 3} \nu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial u_{\ell} u_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_{\ell}} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k} + C_{\varepsilon 5} \nu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial u_{\ell} u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_k \partial x_{\ell}} \quad (25)$$

モデル定数  $C_{\varepsilon 3}$ ,  $C_{\varepsilon 5}$  はそれぞれ  $C_{\varepsilon 3} = 0.02$ ,  $C_{\varepsilon 5} = 0.015$  である。また、示していないモデル定数、モデル関数は NLAKN モデルと同一である。

#### 5. 計算結果

図5, 6に本研究で提案したモデルと、NLAKN モデルとの比較を DNS データを含めて示した。レイノルズ応力、乱流エネルギー分布については、特に Suction Side において大幅に予測値が改善されていることが分かり、導入したモデル関数および回転付加項が適切に機能していることがわかる。

次に、回転数に対する予測の依存性を本モデルにより評価したものを図7~10に示す。各回転数における平均速度は、本モデルによりほぼ十分に予測されていることが分かり、回転に対する依存性が改善されていることが分かる。また、高回転時には Suction Side 側のレイノルズ応力、乱流エネルギーがほぼ零となってしまうことが、DNS の結果より観察されるが、モデルの予測値はこれを十分に捉えていることが分かる。

最後に、さらに高回転時における計算結果を DNS データと比較して図10, 11に示した ( $Ro_{\tau}$  で換算すると  $Ro_{\tau} = 33$  である)。この場においてはチャネル中央から Suction Side に向かってほぼ層流下していることが観察され、乱流モデルの適用条件としては最も過酷な条件の一つである。本モデルの予測値を見ると、層流化している部分がチャネル中央より Pressure Side まで若干およんでおり、そのため平均速度分布に影響が見られ

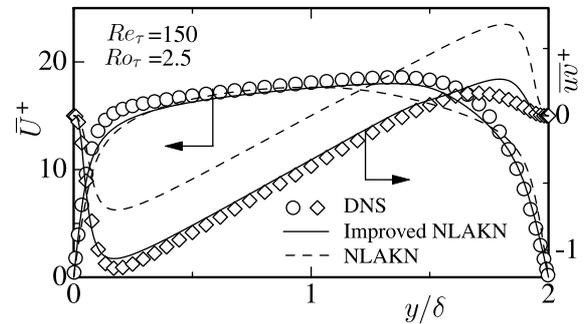


Fig. 5: Distributions of mean velocity and Reynolds shear stress in rotating channel flow ( $Ro_{\tau} = 2.5$ )

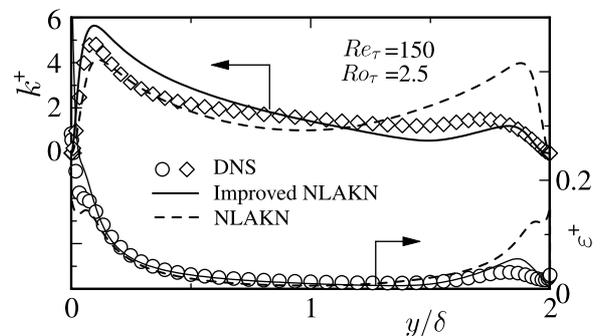


Fig. 6: Distributions of turbulence energy and its dissipation-rate in rotating channel flow ( $Ro_{\tau} = 2.5$ )

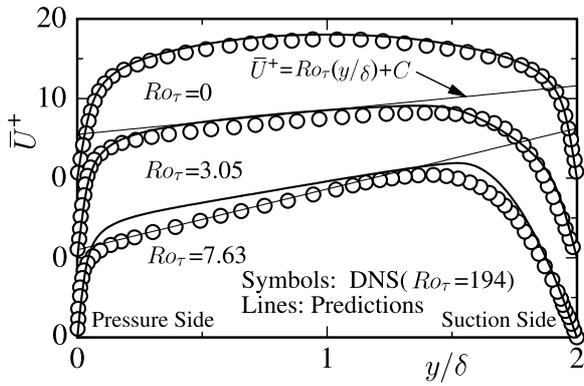


Fig. 7: Mean velocity profiles in various rotation number flows

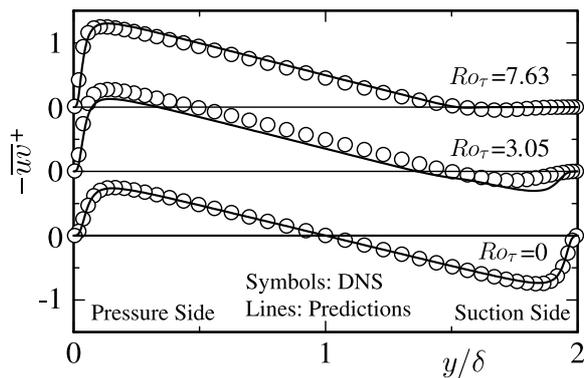


Fig. 8: Distributions of Reynolds shear stress in various rotation number flows

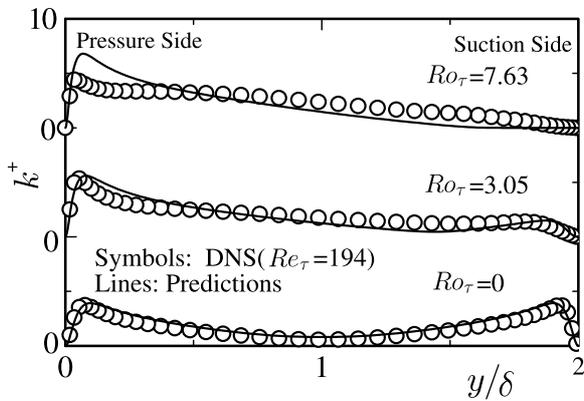


Fig. 9: Distributions of turbulence energy in various rotation number flows

る。しかし、NLAKN モデルと比較して大幅な修正が施され、本モデルが回転チャネル乱流に対し予測精度の向上が図れたことが分かる。

## 6. 結言

回転チャネル乱流において非線形  $k-\varepsilon$  方程式モデルの評価を行い、その評価結果を基に、回転流に対する乱流モデルの予測性能を改善させる提案を行った。改良された非線形モデルは十分に回転チャネル乱流の挙動を予測し得ることを示した。

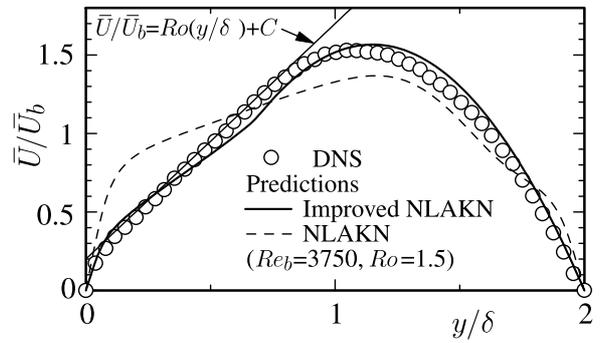


Fig. 10: Mean velocity profiles in high rotation number flow ( $Ro = 1.5$ )

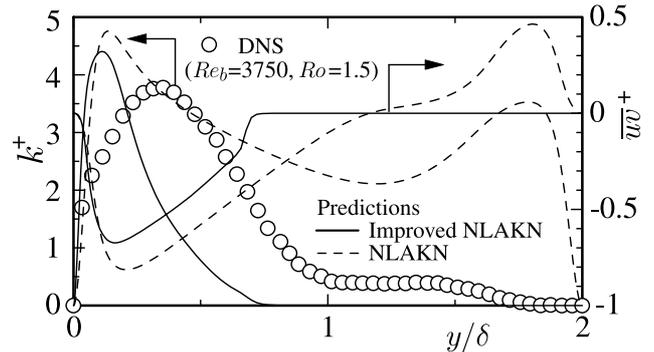


Fig. 11: Distributions of turbulence energy and Reynolds shear stress in high rotation number flow ( $Ro = 1.5$ )

本研究は、科学技術振興事業団戦略的基礎研究 (CREST) により援助を受けた。記して謝意を表する。

## 参考文献

1. K. Abe, T. Kondoh and Y. Nagano, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **18** (1997), 266.
2. Y. Nagano and M. Shimada, *The Recent Developments in Turbulence Research* (Z. S. Zhang et al. eds.), (1994), Int. Academic Publishers, 189.
3. T. B. Gatski and C. G. Speziale, *J. Fluid Mech.*, **254** (1993), 59.
4. Y. Nagano and M. Shimada, *JSME Int. J.*, **38B** (1993), 51.
5. M. Nishimura and N. Kasagi, *Proc. 3rd KSME-JSME Thermal Engineering Conf.* Kyongju, Korea, (1996) **3**, 77.
6. K. Abe, T. Kondoh and Y. Nagano, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **37** (1994), 139.
7. R. Kristoffersen and H. Andersson, *J. Fluid Mech.*, **256** (1993), 163.
8. E. Lamballais, M. Lesieur and O. Métais, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **17** (1996), 324.
9. Y. Shimomura, *J. Physical Society of Japan*, **58** (1989), 352.