非線形 k- ε モデルによる複断面流れの水平渦と抵抗特性に関する検討

Prediction of Flow Characteristics in Compound Open Channels by Means of a Non-linear k-ε Model

木村 一郎, 四日市大学環境情報学部, 四日市市萱生町 1200, E-mail: kimura@yokkaichi-u.ac.jp
細田 尚, 京都大学工学研究科, 京都市左京区吉田本町, E-mail: hosoda@riv.kuciv.kyoto-u.ac.jp
櫻井 寿之, 建設省土木研究所, つくば市旭１, E-mail: tsakura@pwri.go.jp
Ichiro Kimura, Yokkaichi University, 1200 Kayo-cho, Yokkaichi-shi, Mie-ken 512-8512, Japan
Takashi Hosoda, Kyoto University, Yoshida, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan
Toshiyuki Sakurai, Public Works Research Institute, Ministry of Construction, 1 Asahi, Tsukuba 305, Japan

Large-scale coherent vortices with vertical axes due to the shear instability are generated at the junction between a main channel and a flood plain in compound open channel flows. Prediction of unsteady flow structures induced by the vortices is important for flood control because the vortices affect the resistance of the flows. A non-linear k-ε model is applied to a compound open channel flow with different depths and the predicted flow resistances are compared with experimental results and the results by a divided-area method. The difference of the results between quadratic and cubic non-linear models is also discussed.

１．はじめに

複断面開水路流れでは，低水路と高水敷の境界面付近がせん断混合層となり，流れの不安定性に起因する大規模組織渦が発生する．特に，実際の河川のように低水路に比べて高水敷の粗度係数が大きい場合，低水路・高水敷間の流速差が大きくなり，渦は顕著に発達する．この渦は鉛直方向の軸を有し，水深が不連続に変化する箇所に発生するため，三次元的な流れ（湧昇流や沈降流）を誘発することが既往の実験において指摘されている[1,2]．また，渦の発生は流れの抵抗を増加させるため，従来の断面分割法が，流量を過大評価する可能性が実験的に指摘されている[1]．

一方，大規模渦に着目した複断面流れの数値解析に関する研究も報告されている[3-6]，複断面流れでは水深が不連続に変化するため，河川の流れの計算において従来から一般的に用いられてきた平面二次元モデルの適用は困難である．三次元モデルによらずに複断面流れを効率的に再現するモデルとして，平面二層位モデルによる解析法が提案されている[3]．この手法は，高水敷の高さで流れを上下二層に分割し，各層で鉛直方向に積分された式を用いて計算を行うものであり，渦に伴う湧昇流や沈降流をある程度再現できることが確認されている．しかしながら，大規模渦と断面内の第二種二次流の相互作用等，より詳細な現象を検討するためには，三次元モデルによる解析が必要となる．三次元計算の例としては，非線形 k-εモデル[6]や LES[7]による計算が行われている．

本研究は，高水敷上の粗度が低水路内の粗度よりも大きい場合の複断面開水路流れに対して，二次，及び三次非線形 k-εモデルの適用を行い，大規模渦と抵抗特性の検討を行うものである．福岡ら[1]の実験を対象に，水深の異なる３通りの場合で計算を実施し，抵抗特性（合成粗度係数）を実験値や断面分割法による値と比較する．また，断面二次元計算と三次元計算による合成粗度係数の比較することにより，抵抗増加に対する大規模渦の影響を検討する．

２．数値解析法

(1) 基礎式

k-εモデルの基礎式は，次の通りである．

[連続式]

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_jU_i}{\partial x_j}=g_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial -\overline{u_iu_j}}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^{\,2}} \tag{2}$$

[k-方程式]

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial kU_j}{\partial x_j}=-\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{D_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right\} \tag{3}$$

[ε -方程式]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j}=-C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_iu_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{D_t}{\sigma_\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right\} \tag{4}$$

ここに，x_i：空間座標，t：時間，U_i：流速，p：圧力，u_i：乱れ速度，ν：動粘性係数，ρ：流体の密度，k：乱れエネルギー，ε：乱れエネルギー散逸率，D_t：渦動粘性係数を表わす．モデル定数には，一般にσ_k=1.0, σ_ε=1.3,$C_{\varepsilon 1}$=1.44, $C_{\varepsilon 2}$=1.92 が用いられ，本研究でもこの値を用いる．

(2) 乱流モデル

乱流モデルとしては，二次及び三次の非線形 k-εモデルを用いる．二次の非線形項までを考慮した非線形 k-εモデルの構成則は Yoshizawa[8]の表現によると次式で表される．

$$-\overline{u_iu_j}=D_tS_{ij}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}-\frac{k}{\varepsilon}D_t\sum_{\beta=1}^{3}C_\beta\left(S_{\beta ij}-\frac{1}{3}S_{\beta\alpha\alpha}\delta_{ij}\right) \tag{5}$$

$$S_{ij}=\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i},\ D_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon},\ S_{1ij}=\frac{\partial U_i}{\partial x_r}\frac{\partial U_j}{\partial x_r},$$

$$S_{2ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial x_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_r}+\frac{\partial U_r}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_r}\right),S_{3ij}=\frac{\partial U_r}{\partial x_i}\frac{\partial U_r}{\partial x_j}$$

上式の非線形項の表現は，Pope[9]および Gatski and Speziale[10]らによる表現と等価である．

係数 C_1～C_3 については，単純せん断流に関する既往の実験結果[11,12]との比較等を考慮して，次のように与えた[13]．

$$C_1=0.4f_M(M),\quad C_2=0,\quad C_3=-0.13f_M(M)$$

$$f_M(M)=1/(1+0.01M^2),\ M=\max[S,\Omega] \tag{6}$$

$$S=\frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2},\ \Omega=\frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2} \tag{7}$$

$C\mu$については Realizability[14]等を考慮し，次式のような関

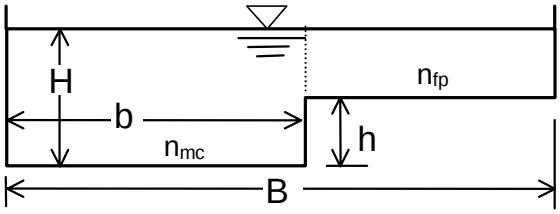

Fig.1 Cross-section of a compound open channel.

Table 1 Hydraulic parameters.

Run	B(cm)	b(cm)	H(cm)	h(cm)	Slope	n_{mc}	n_{fp}
1	200	75.7	7.5	5	1/1000	0.01	0.028
2	200	75.7	10.0	5	1/1000	0.01	0.028
3	200	75.7	12.5	5	1/1000	0.01	0.028

Table 2 Numerical method.

Run	Turbulence model	Dimension of calculated field
QS	2nd order	2D
QL	2nd order	3D
CS	3rd order	2D
CL	3rd order	3D

数形を採用した[13].

$$C(M)_\mu = \min\left[0.09, 0.3/(1+0.09M^2)\right] \tag{8}$$

三次モデルでは次の三次非線形項を式(6)に付加する．

$$[\text{Cubic Term}] = -C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} D_t (\Omega_{ik} S_{kl} S_{lj} - S_{ik} S_{kl} \Omega_{lj})$$

$$-C_5 \frac{k^2}{\varepsilon^2} D_t (\Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lj} + S_{ik} \Omega_{kl} \Omega_{lj} - \frac{2}{3} S_{mn} \Omega_{no} \Omega_{om} \delta_{ij}) \tag{9}$$

上式の係数 C_4, C_5 は，次式で与えた．

$$C_4 = -0.02 f_M(M), \quad C_5 = 0 \tag{10}$$

(3) 計算法の概要

計算法は有限体積法とし，圧力，k およびεを直方体格子の中央で，流速ベクトルの成分を側面で定義するスタッガード格子を用いた．運動方程式の移流項の離散化には QUICK スキームを，k およびε方程式の移流項には Hybrid 法を用いている．時間積分には二次の Adams Bashforth 法を用いる．圧力は時間ステップ毎に収束計算で求める．

モデルの単純化のため，壁面の k とεについては壁関数法で与え，流速は対数則で評価した．表層の連続式と運動方程式には水面を考慮した表層のコントロールボリュームで基礎式を積分した式を用い，水面変動を計算する[15]．水面のεは杉山ら[16]の提案する次式で評価した．

$$\varepsilon_s = \frac{C_{\mu 0}^{3/4} k_s^{3/2}}{0.4 \Delta y_s}, \qquad (C_{\mu 0} = 0.09) \tag{11}$$

上式中，添字 s は表層の値を，Δy_s は水面から定義点までの距離を表す．水面の k には slip 条件を課す．また，水面近傍の鉛直方向の乱れの減衰を考慮するため，次の減衰関数を渦動粘性係数に乗じる[17]．

$$f_s = 1 - \exp\left\{-B(h-y)\varepsilon_s / k_s^{3/2}\right\}, \quad (B = 10) \tag{12}$$

(4) 計算条件等

本研究では福岡らの実験[1]と同条件で計算を行う．Fig.1 は計算対象とした複断面水路の断面形状と記号の定義を示したもので，水路右岸にのみ高水敷が存在する場合を取り扱う．Table 1 に水理諸量を示す．高水敷水深を 3 通りに変化させて計算を行っている．また，各 Run で，二次非線形モデル（記号 Q で表す）と，三次非線形モデル（記号 C で表す）による計算を行う．また，主流方向の水理諸量の変化を無視した断面二次元計算（記号 S で表す）と，三次元計算（記号 L で表す．）を実施した．これは，大規模渦が抵抗特性に及ぼす寄与分を評価するためである．計算条件の記号の表記については，例えば，Run1 の二次非線形モデルによる三次元計算を Run1-QL のように表すことにする．Table 2 に本研究で用いたモデルの一覧を示す．なお，三次元計算では，上下流端の境界条件に周期境界条件を用いている．計算格子数は，各 Run とも，主流方向（x 方向）が 200，横断方向（y 方向）が 42，鉛直方向（z 方向）が 11 となっている．

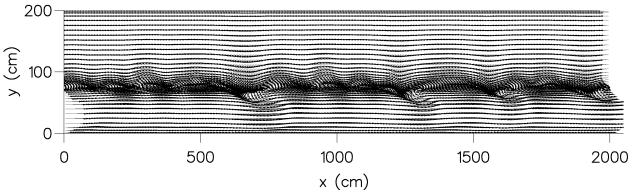

Fig.2(a) Plan view of the flow pattern in Run1-QL.

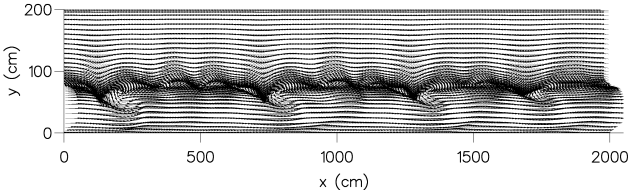

Fig.2(b) Plan view of the flow pattern in Run1-CL.

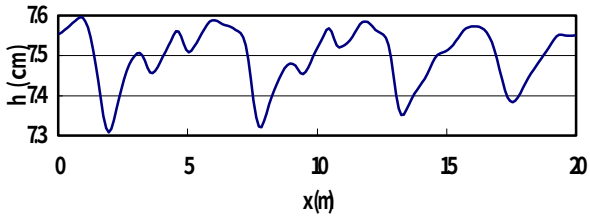

Fig.3 (a) Depth variation along the junction (Run1-CL).

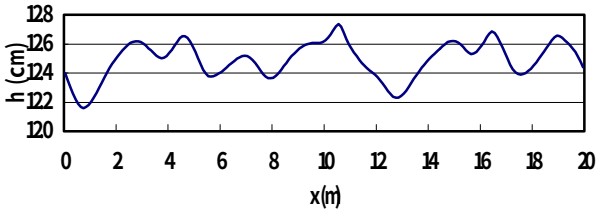

Fig.3 (b) Depth variation along the junction (Run3-CL).

3．計算結果の考察

（1）大規模渦の再現

主流・高水敷界面の大規模渦は，全ての Run（三次元計算）において再現された．Fig.2(a)，Fig.2(b)は，Run1-QL（二次非線形モデル）と Run1-CL（三次非線形モデル）における平面内（水深 1cm）の流速ベクトルを示したものである．いずれの Run でにおいても大規模渦は明確な周期性は示さず，大きな渦の間に 2，3 個の小さい渦が存在する不規則な構造を呈している．また，二次非線形モデルによる計算（Run1-QL）と比較して，三次非線形モデルの結果（Run1-CL）の方が，渦がより大きく発達している様子がわかる．

Fig.3(a), (b)は，ある瞬間における境界面に沿った水面の凹凸を，Run1-CL と Run3-CL で比較したものである．Run1-CL では，3～4m 間隔で明確な谷が認められる．Run3-CL では Run1-CL に比べてより不規則な振動となっている．

(2) 二次流に関する考察

Fig.4 (a)と Fig.4(b)は，それぞれ Run1-CS と Run1-CL における横断面内の第二種二次流の再現の様子を示したものである．Run1-CL では主流方向の計算格子の各横断面の流速を空間的に平均した流れを示している．いずれの図にも，低水

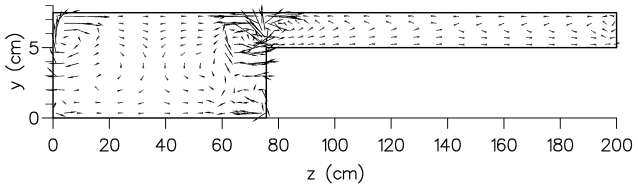

Fig.4 (a) Secondary flow pattern in Run1-CS.

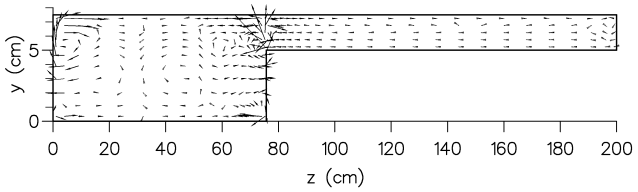

Fig.4 (b) Secondary flow pattern in Run1-CL.
(Averaged in *x*-direction)

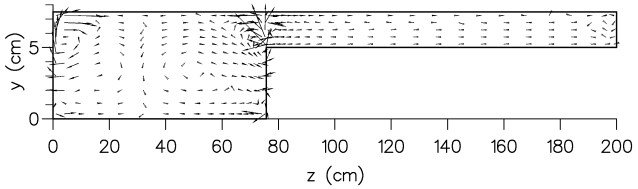

Fig.4 (c) Secondary flow pattern in Run1-QL.
(Averaged in *x*-direction)

路内には水面付近と底面付近にそれぞれ左右１対の渦が形成されている．また，高水敷・低水路界面付近には，低水路に向かって斜めに上昇する流れ（斜昇流）が再現されている．福岡らの実験では断面内二次流の計測は行われていないが，図に示される二次流の様子は従来の実験結果[18]と定性的に適合する．また，断面二次元計算（Run1-CS）に比べて三次元計算（Run1-CL）における斜昇流が若干弱くなっている．これより，大規模渦が斜昇流に影響を及ぼしていることが予想される．

次に，乱流モデルの相違による二次流の再現性を比較する．Fig.4(c)は，Run1-QL における二次流の計算結果である．これと Run1-CL による結果を比較すると，あまり大きな相違は認められない．しかしながら，底面付近の渦の規模は，Run1-CL による結果の方が Run1-QL よりも若干大きいことがわかる．

(3) 流れの抵抗特性に関する検討

境界面に発生する大規模渦の存在により、高水敷と低水路の間で運動量の輸送が生じる。この混合現象により高水敷・低水路境界面に付加的なせん断力が発生し、流下能力に影響を及ぼす。このため、抵抗予測を行うためには、この付加的抵抗をどのように評価するかが重要であると考えられる。まず、合成粗度係数の予測法について、従来から用いられてきた断面分割法と福岡ら[1]による界面の付加的なせん断力を考慮した予測法について簡単に述べる。

a) 断面分割法[1]

断面分割法では、高水敷・低水路境界面に相互干渉がなく、干渉による抵抗増加がないと仮定する。Fig.1 中の破線で示すように断面を高水敷と低水路に鉛直に分割し、それぞれの断面内で等流条件が成立するという仮定から、次式により流量 Q が得られる。ただし、ここでは水路片側のみに高水敷が存在する場合について考えている。

$$Q = \frac{A_{fp}}{n_{fp}}\left(\frac{A_{fp}}{S_{fp}}\right)^{2/3} I_b^{\,1/2} + \frac{A_{mc}}{n_{mc}}\left(\frac{A_{mc}}{S_{mc}}\right)^{2/3} I_b^{\,1/2} \tag{13}$$

ここに、I_b：河床勾配、A：断面積、S：潤辺、n：マニング粗度係数であり、添字の fp，mc はそれぞれ高水敷、低水路の値であることを示す。断面分割法では、高水敷・低水路境界面（Fig.1 の点線）におけるせん断応力を無視し、潤辺 S にはこの境界面を含めない。このとき、合成粗度係数 Nc は次式で計算される。

$$N_c = \frac{A_{mc} + A_{fp}}{Q} R_c^{\,2/3} I_b^{\,1/2} \tag{14}$$

ここに，Rc は合成径深であり、次式で表される井田法[19]による径深を用いる。

$$R_c = \left[\frac{A_{mc}(A_{mc}/S_{mc})^{2/3} + A_{fp}(A_{fp}/S_{fp})^{2/3}}{A_{mc} + A_{fp}}\right]^{3/2} \tag{15}$$

b) 福岡ら[1]による見かけのせん断応力を考慮した予測法

高水敷・低水路境界面の流れの相互干渉により、境界面に付加的なせん断力が作用すると考えられる。この見かけのせん断力τ_{as}を次のように仮定する．

$$\tau_{as} = \rho f (u_{mc} - u_{fp})^2 \tag{16}$$

ここに，係数 f は低水路と高水敷の境界面における流体混合の激しさを表す境界混合係数である．次に，高水敷と低水路それぞれについて次のような釣り合い式を立てる。

$$\tau_{mc} S_{mc} + \tau_{as}(H - h) = \rho g A_{mc} I_b \tag{17a}$$

$$\tau_{fp} S_{fp} - \tau_{as}(H - h) = \rho g A_{fp} I_b \tag{17b}$$

ここに，τ_{mc}，τ_{fp} は，それぞれ低水路，高み敷の潤辺における平均せん断応力であり，次式で表される．

$$\tau_{mc} = \frac{\rho g n_{mc}^{\,2} u_{mc}^{\,2}}{R_{mc}^{\,1/3}} \quad , \quad \tau_{fp} = \frac{\rho g n_{fp}^{\,2} u_{fp}^{\,2}}{R_{fp}^{\,1/3}} \tag{18}$$

ここに、$R_{mc} = A_{mc}/S_{mc}$，$R_{fp} = A_{fp}/S_{fp}$であり，u_{mc}，u_{fp}はそれぞれ低水路および高水敷の平均流速を表す。これらの式より流量 Q が求まり，式(14)，(15)により合成粗度係数を計算することができる．

c) 数値解析結果における合成粗度係数

Table 3 に，本研究で行った４通りの計算方法（Table 2 参照）により得られた合成粗度係数（低水路の粗度係数 n_{mc} で無地原化）を示した．いずれの計算法のもとでも，Run1→Run3 の順，すなわち相対水深 H/h が大きくなるにつれて合成粗度係数の値も大きくなる．また，断面二次元計算と三次元計算を比べると，全ての Run，乱流モデルで三次元計算における合成粗度係数の方が大きい．これは，大規模渦の発生

Table 2 Nc/n_{mc} in numerical results.

	QS	QL	CS	CL
Run1	1.12	1.23	1.20	1.23
Run2	1.36	1.43	1.36	1.44
Run3	1.48	1.55	1.48	1.55

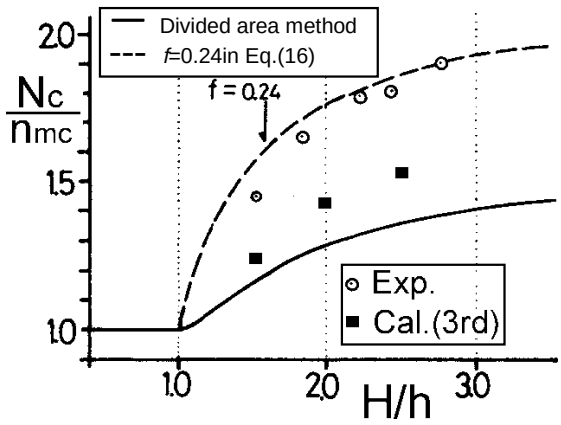

Fig.5 Relation between H/h and Nc.

による抵抗増加を示唆するものと考えられる．一方，乱流モデルの影響についてみると，Run1 の断面二次元計算の結果以外は，ほとんど相違がみられない．

Fig.5 は，合成粗度係数を相対水深 H/h に対してプロットしたものである．この図で，点○は福岡ら[(1)]による実験値を示し，破線は福岡ら[(1)]による見かけのせん断応力を考慮する方法で，式(16)の f の値を 0.24 とした場合の曲線を示している．また，実線は断面分割法による値を示す．点■は本研究における数値解析結果（三次非線形モデル，Run1-CL, Run2-CL, Run3-CL）をプロットしたものである．数値解析によける合成粗度係数は界面の抵抗を無視した断面分割法よりも大きいものの，実験値に比べるとかなり小さい値となっている．この原因については，今後さらに検討を要する．

４．おわりに

高水敷の粗度が低水路より大きい場合の複断面開水路流れ（福岡・藤田[(1)]の実験）について，非線形 k-εモデルによる三次元計算を行った．得られた成果を次にまとめる．

１．非線形次数が二次および三次のいずれのモデルにおいても高水敷・低水路界面付近の大規模渦が再現された．また，断面内の二次流の再現性についても定性的にほぼ妥当な結果となった．

２．三次元解析と断面二次元解析の合成粗度係数を比較すると，大規模渦の再現された三次元解析における値の方が大きいことがわかった．これは，大規模渦に伴う流れの抵抗増加を示唆するものと考えられる．

３．三次元解析における合成粗度係数は，高水敷・低水路界面のせん断応力を無視した断面分割法より得られる合成粗度係数よりも大きいが，福岡・藤田の実験値よりも小さい値となった．

参考文献

(1) 福岡，藤田，"複断面河道の抵抗予測と河道計画への応用," 土木学会論文集, **411**(1989), pp. 63-72.

(2) 池田，村山，空閑，”複断面開水路水平渦の安定性とその３次元構造,” 土木学会論文集，**509**/Ⅱ-30 (1992), pp.131-142.

(3) 木村，細田，村本，安永，“平面二層モデルによる複断面開水路流れの水平渦運動解析,” 水工学論文集，**40**(1996), pp.699-704.

(4) 福岡，渡辺，津森，”樹木群を有する開水路における平面せん断流の構造とその解析,” 土木学会論文集，**491**(1994), Ⅱ-27, pp.41-50.

(5) 池田，佐野，福元，河村，“複断面開水路に生じる大規模組織渦と浮遊砂輸送,” 土木学会論文集，**656**(2000)，Ⅱ-52, pp.135-144.

(6) Hosoda, T., Sakurai, T., Kimura, I. and Muramoto, Y., “3-D Computations of compound open channel flows with horizontal vortices and secondary currents by means of non-linear k-ε Model,” J. Hydroscience and Hydraulic Engineering, **17**(2000), No.2, pp.87-96.

(7) 佐藤，河原，玉井，”Smagorinsky モデルによる複断面開水路乱流の解析，” 土木学会論文集，**628**(1999)，Ⅱ-48, pp.115-130.

(8) Yoshizawa, A., “Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation,” Phys. Fluids **27**(1984), pp.1377-1387.

(9) Pope, S.B., “A more general effective viscosity hypothesis, J. Fluid Mech.,” **72**(1975), pp.331-340.

(10) Gatski, T.B. and Speziale, C.G., “On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows,” J. Fluid Mech., **254**(1993), pp.59-78.

(11) Gatski, T. B. and Speziale, C. G., “On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows,” J. Fluid Mech., **254**(1993), pp.59-78.

(12) Champagne, F. H., Harris, V. G. and Corrsin, S., “Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow,” J. Fluid Mech., **41**(1970), pp.81-139.

(13) 木村，細田，“乱れ強さ非負条件を考慮した非線形k-εモデルによる立方体周辺の流れの三次元解析,” 水工学論文集, **44**(2000), pp. 599-604.

(14) Schumann, U., “Realizability of Reynolds-stress turbulence models,” Phys. Fluids, **20**(1977), pp.721-725.

(15) 岩佐，細田，平岡，岡川，“無巻水路トンネル内の流れの抵抗則について，” 京都大学防災研究所年報，**34**(1991), B-2，pp.337-353.

(16) 杉山，秋山，松原，“複断面開水路内の乱流構造解析と縦渦生成に関する研究,” 土木学会論文集， **515**(1995)，Ⅱ-31, pp.55-65.

(17) 細田，”開水路流れにおける乱流拡散機構に関する水理学的研究,” 京都大学博士論文，1990.

(18) Tominaga, A and Nezu, I., “Turbulent structure in compound open-channel flows,” J. Hydraulic Eng., **117**(1991), pp.21-41.

(19) 井田，“広巾員水路の定常流－断面系の影響について－,” 土木学会論文集，**69**(1960)，別冊(3-2).