

擬似圧縮性解法を用いた二次元円柱渦励振動の数値計算

Numerical Simulation of Vortex-Induced Vibration of a Two-Dimensional Circular Cylinder Using Artificial Compressibility

○ 矢部 広和, 京都工芸繊維大学大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: yabe@fe.mech.kit.ac.jp
 森西 晃嗣, 京都工芸繊維大学工学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: morinisi@ipc.kit.ac.jp
 里深 信行, 京都工芸繊維大学工学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: satofuka@ipc.kit.ac.jp
 Hirokazu YABE, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
 Koji MORINISHI, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
 Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

The two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations are solved using the method of artificial compressibility. The scheme can be used to compute both steady-state and unsteady flow problems. Time accuracy is obtained in the numerical solutions by subiterating the equations in artificial time for each physical time step. In this paper, a lower-upper symmetric gauss-seidel(LU-SGS) implicit relaxation method is used for iterative scheme. A computational method based on composite oversetting grids is presented for the two-dimensional analysis of flow-induced vibration of a rigid circular cylinder. A flow region around the body is covered with a static mesh and a dynamic mesh fixed to the body. The frequency and amplitude of cylinder oscillation and the vortex-shedding frequency were computed around the lock-in region.

1. 序論

流体中における物体は、流体より力を受け様々な運動をする。本研究では CFD を用いてその運動を正しく再現し、工業製品の設計や物理現象のメカニズムの解析に役立てることを目指す。スキームの検定問題として報告例が多い渦励振動を起こす円柱周り流れを取り扱う。この流れ場において、レイノルズ数が約 40 程度では円柱後方に流れの中心軸に対し左右対称の一对の渦（双子渦）が生じ後流はほぼ直線状に流下する定常な流れとなる。レイノルズ数が約 40 以上になると、円柱後方に互いに逆方向に回転する渦が交互に規則的に剥離し列をなして流下する非定常流れとなる。このカルマン渦列により発生する周期的な揚力変動は、繰り返し応力による材料の疲労破壊の原因となる。渦列の発生は周期性があり、その周波数はストローハル数と呼ばれる。物体の固有振動数が渦放出周波数に同期すると共振が起こり物体は激しく振動する。

2. 擬似圧縮性解法

非圧縮性粘性流体は、一般に連続の式と非圧縮性ナビエ・ストークス方程式により記述される。数値計算流体力学における擬似圧縮性法は、連続の式に圧力の擬似時間微分項を付加し、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に速度の擬似時間微分項を付加することにより、ポアソン方程式を解くことなく非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の解を時間発展的に求める事が出来る。擬似的な圧縮性を加えているため、各擬似時間ステップは現実の流れとは異なるが、収束解（擬似時間に関する定常解）が得られれば擬似時間微分項は零となり消え、本来のナビエ・ストークス方程式に一致する。

二次元デカルト座標系 (x, y) において、無次元化された連続の式と非圧縮ナビエ・ストークス方程式に、圧力 p と x, y 方向の速度成分 u 及び v の擬似時間微分項を付加し次のように表示される。

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

ここで、連続の式の圧力の擬似時間微分項には擬似圧縮係数 β が含まれている。

任意形状の流れ場の数値計算を行うためにデカルト座標系 (x, y, t) から一般座標系 (ξ, η, τ) に座標変換すると、

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t) \quad (2)$$

の関係式より、以下のように無次元化ベクトル表示される。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta V \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x R_2 + \xi_y S_2 \\ \xi_x R_3 + \xi_y S_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x R_2 + \eta_y S_2 \\ \eta_x R_3 + \eta_y S_3 \end{bmatrix}$$

ここで、反変速度 U, V 、変換ヤコビアン J 、及びメトリックス $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v, \quad J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (5)$$

ただし、連続の式においては次式となる。

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (6)$$

また、以下のような関係式が成り立つ。

$$\xi_x = Jy_\eta, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \eta_x = -Jy_\xi, \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (7)$$

移流項に対する流束ヤコビアン行列は、

$$\hat{\mathbf{A}}_\xi = \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \hat{\mathbf{q}}}, \quad \hat{\mathbf{A}}_\eta = \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \hat{\mathbf{q}}} \quad (8)$$

で定義される。これを成分で示すと、次のように表せる。

$$\hat{\mathbf{A}}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & \xi_x \beta & \xi_y \beta \\ \xi_x & U + \xi_x u & \xi_y u \\ \xi_y & \xi_x v & U + \xi_y v \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_\eta = \begin{bmatrix} 0 & \eta_x \beta & \eta_y \beta \\ \eta_x & V + \eta_x u & \eta_y u \\ \eta_y & \eta_x v & V + \eta_y v \end{bmatrix} \quad (9)$$

圧縮性流れの音速に対応する擬音速 c_ξ, c_η は、次のように表せる。

$$c_\xi = \sqrt{U^2 + \beta(\xi_x^2 + \xi_y^2)}, \quad c_\eta = \sqrt{V^2 + \beta(\eta_x^2 + \eta_y^2)} \quad (10)$$

また、それぞれの固有値の絶対値の最大値を固有値半径と呼び、次式で表せる。

$$\lambda_\xi = |U| + c_\xi, \quad \lambda_\eta = |V| + c_\eta \quad (11)$$

3. 数値計算法

本研究では、線の方法の原理に基づき空間と時間を個別に取扱い、空間の離散化には2次精度中心差分を用い、時間積分には陰的法であるLU分解対称ガウス・ザイデル法(LU-SGS)を用いた。

3.1 LU分解対称ガウス・ザイデル(LU-SGS)法

$$\mathbf{q}_{i,j}^{m+1} = \mathbf{q}_{i,j}^m + \Delta \mathbf{q}_{i,j} \quad (12)$$

今、上式の右辺は既知な量であり、 $\Delta \mathbf{q}$ に対する連立方程式を得るが、その係数行列は多くの成分を持ち直接解くには多くの演算量とメモリーが必要となる。そこで、何らかの緩和法を用いて解くことが一般的である。

Yoonによって提案されたLU分解対称ガウス・ザイデル法を示す。陰的部分の空間微分項の離散化に1次精度風上差分を適用すると、次式のようになる。

$$\left[\mathbf{I}' + \left(\delta_\xi^- \mathbf{A}_\xi^+ + \delta_\eta^- \mathbf{A}_\eta^+ + \delta_\xi^+ \mathbf{A}_\xi^- + \delta_\eta^+ \mathbf{A}_\eta^- \right) \right] \Delta \mathbf{q}_{i,j} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}^m)_{i,j} - \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right)^{n+1,m} \quad (13)$$

ここで、 δ^+, δ^- は、それぞれ前進及び後退差分演算子である。

そして、さらに左辺をLU分解すると次式を得る。

$$\left(\mathbf{I}' + \delta_\xi^- \mathbf{A}_\xi^+ + \delta_\eta^- \mathbf{A}_\eta^+ - \mathbf{A}_\xi^- - \mathbf{A}_\eta^- \right) \left(\mathbf{I}' + \mathbf{A}_\xi^+ + \mathbf{A}_\eta^+ - \mathbf{A}_\xi^- - \mathbf{A}_\eta^- \right)^{-1}$$

$$\left(\mathbf{I}' + \delta_\xi^+ \mathbf{A}_\xi^- + \delta_\eta^+ \mathbf{A}_\eta^- + \mathbf{A}_\xi^+ + \mathbf{A}_\eta^+ \right) \Delta \mathbf{q}_{i,j} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}^m)_{i,j} - \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right)^{n+1,m} \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{A}_\xi, \mathbf{A}_\eta$ に対して、次のような近似分割法を用いる。

$$\mathbf{A}_\xi^\pm = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_\xi \pm b_\xi \mathbf{I}), \quad \mathbf{A}_\eta^\pm = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_\eta \pm b_\eta \mathbf{I}) \quad (15)$$

$$b_{\xi i,j} \geq \text{Max} |\lambda_{\xi i,j}|, \quad b_{\eta i,j} \geq \text{Max} |\lambda_{\eta i,j}| \quad (16)$$

本研究においては、

$$b_{\xi i,j} = \text{Max} (|\lambda_{\xi i,j}|), \quad b_{\eta i,j} = \text{Max} (|\lambda_{\eta i,j}|) \quad (17)$$

とした。このような近似分割法により、次のような2段階で解ける。

1段階目

$$\Delta \mathbf{q}_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{\mathbf{I}' + b_{\xi i,j} + b_{\eta i,j}} \left[\mathbf{Q}(\mathbf{q}^m)_{i,j} - \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right)^{n+1,m} + \left(\mathbf{A}_\xi^+ \Delta \mathbf{q}^{(1)} \right)_{i-1,j} + \left(\mathbf{A}_\eta^+ \Delta \mathbf{q}^{(1)} \right)_{i,j-1} \right] \quad (18)$$

2段階目

$$\Delta \mathbf{q}_{i,j} = \Delta \mathbf{q}_{i,j}^{(1)} - \frac{1}{\mathbf{I}' + b_{\xi i,j} + b_{\eta i,j}} \left[\left(\mathbf{A}_\xi^- \Delta \mathbf{q} \right)_{i+1,j} + \left(\mathbf{A}_\eta^- \Delta \mathbf{q} \right)_{i,j+1} \right] \quad (19)$$

1次精度時間積分の場合では、

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (20)$$

の関係を用いて式変形すると

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta \tau} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \end{bmatrix} \quad (21)$$

と表される。

3.2 境界条件

3.2.1 個体壁面境界における条件 個体壁面では、粘着条件(no-slip)により壁面が静止している場合は速度成分は零とし、壁面が運動している場合は壁面と同じ速度成分を持つ。圧力に関しては、以下の式から求められる。

$$p_\eta = -\frac{1}{\eta_x^2 + \xi_y^2} \{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi + (\xi_x u_t + \eta_y v_t) \} \quad (22)$$

また、近似的に

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (23)$$

として求められる。ここで、 n は壁面に対する法線方向である。

3.2.2 流入・流出境界における条件 流入境界においては圧力を線形外挿により求め速度を一樣流速度で固定する。一方、流出境界においては圧力を一樣流圧力で固定し速度を線形外挿により求める。流入・流出境界の領域の判別は、境界での速度と外向き法線ベクトルの内積つまり反変速度が正の所では流出境界、負の所では流入境界となる。

3.3 重畳格子法

流れ場全域に物体に関係無く切った格子に、物体周りに沿わせて切った格子を重ね、互いの格子の境界での物理量を内挿し合う事により複雑形状物体、複数物体や移動する物体の周りの流れの解析を可能とする。

Fig.1において、「 \square 」で示された点は物体内部、物体近傍または計算領域からはみ出た格子点であり、計算からは除外される。また、「 \circ 」で示された点は計算上で境界となる格子点であり、もう一方の格子より物理量を内挿する。(Fig.2)内挿される格子点(P)は、その格子を囲むもう一方の格子の4点(\circ ABCD)より内挿される。内挿される格子点がどの格子点のセルを用いるかは次式により判定する。

$$\begin{aligned} f_{AB}(x_P, y_P) f_{DC}(x_P, y_P) &\leq 0 \\ f_{BC}(x_P, y_P) f_{AD}(x_P, y_P) &\leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ここで $f_{AB} = 0$ は直線 AB を表す。内挿には式 (25) の 2次元線形内挿を用い、物理量 q_P を内挿する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ q_P \end{bmatrix} &= (1-X)(1-Y) \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ q_A \end{bmatrix} + X(1-Y) \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ q_B \end{bmatrix} \\ &+ XY \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ q_C \end{bmatrix} + (1-X)Y \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ q_D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

3.4 剛体の運動方程式とその離散化

剛体の運動は、ナビエ・ストークス方程式と同様に無次元化すると以下のように表される。

$$\mathbf{m} \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + \mathbf{c} \frac{d \mathbf{X}}{dt} + \mathbf{k} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (26)$$

ここで、 \mathbf{m} は無次元質量行列、 \mathbf{c} は無次元粘性係数行列、 \mathbf{k} は無次元ばね定数行列、 \mathbf{X} は移動量ベクトル、 \mathbf{F} は外力ベクトル、 t は無次元時間である。

今、 y 軸方向の 1 自由度の運動を考え 1 階の微分方程式に書き換えると次式となる。

$$\frac{dY}{dt} = \mathbf{a}Y + \mathbf{b}, \quad \frac{dy}{dt} = v \quad (27)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_y}{m} \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここで F_y は物体の重心に働く揚力である。式 (27) をクランク・ニコルソン型に離散化すると次式が得られる。

$$\frac{\mathbf{Y}^{n+1, m+1} - \mathbf{Y}^n}{\Delta t} = \mathbf{a} \frac{\mathbf{Y}^{n+1, m+1} + \mathbf{Y}^n}{2} + \frac{\mathbf{b}^{n+1, m} + \mathbf{b}^n}{2} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{n+1, m+1} &= \left[\frac{\mathbf{I}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\mathbf{I}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{a} \right] \mathbf{Y}^n + \frac{1}{2} (\mathbf{b}^{n+1, m} + \mathbf{b}^n) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

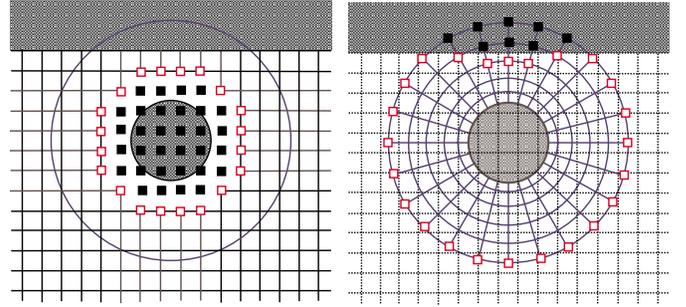


Fig. 1: Illustration of overlapping mesh

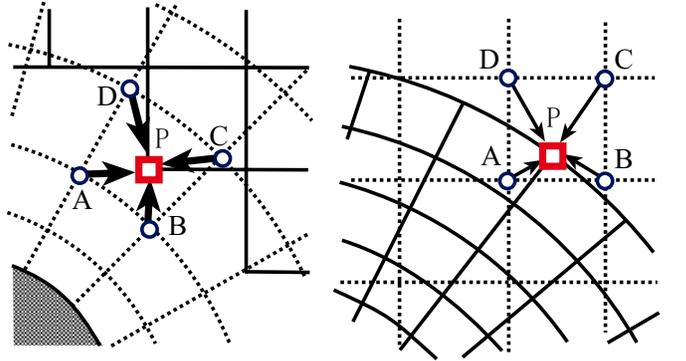


Fig. 2: Interpolated points

3.5 連成数値計算法

Fig.3 に示す連成計算に組み込む事により、流れの支配方程式と物体の運動方程式を同時に解くことができる。

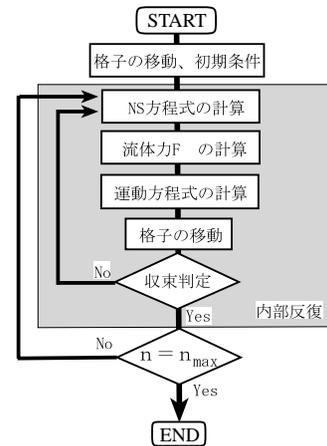


Fig. 3: The calculation steps

4. 円柱周り流れへの適用

4.1 解析モデル

円柱は流れにより外力を受け運動する。そのため、Fig.4に示すような1自由度系を考慮し、物体の移動に伴いFig.5に示すような重なった格子を用いて計算を行う。今回は、 y 軸方向の振動のみを対象とし、 x 軸方向の振動、円柱の回転は考慮されていない。

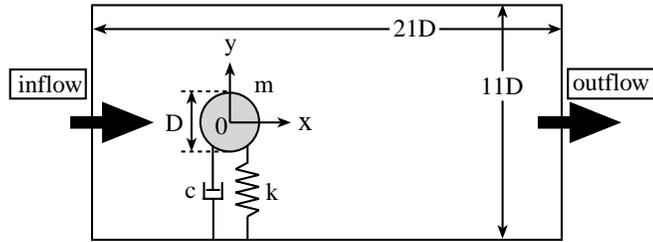


Fig. 4: A computational model for the vortex-induced vibration of a circular cylinder

実験⁶⁾との比較のため流れ場の諸量は以下の様に定めた。

$D = 0.16\text{cm}$, $m = 2.97916\text{g/cm}$, $c = 0.3152\text{g/s}$, $k = 5789.4\text{g/s}^2$, $\rho_\infty = 0.9982\text{g/cm}^3$, $\mu_\infty = 0.01002\text{g/s/cm}$

4.2 格子条件

格子形状は、主格子はデカルト格子とし x 軸方向に 129 点、 y 軸方向に 65 点取った。物体周りには O 型格子を用い、格子間隔を指数的に増加させてある。格子の縦横比は 1:1 に近づけてあり、格子点数は円周 ξ 軸方向に 129 点、半径 η 軸方向に 24 点取った。円柱表面から補助格子境界までの距離は円柱直径の約 1 倍とした。

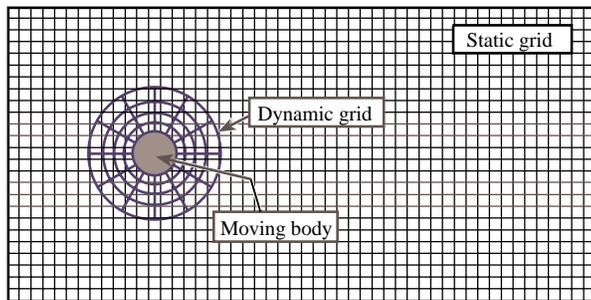


Fig. 5: Image of computational overset grids

4.3 流れ場への適用結果

$Re=90$ で衝撃出発させ計算を進め、無次元時間 300 毎にレイノルズ数を 2 ずつ増加させて計算を行った。時間刻み幅は $\Delta t=0.10, \Delta \tau=10^{-12}$ とした。先ず、 $Re=100, 106$ での円柱の変移量を Fig.6, 7 に示す。 $Re=100$ では変位量は非常に少なく、渦放出周波数と円柱の固有振動数が近くなりうなりがはっきりと現れる。 $Re=106$ 辺りになると渦放出周波数と円柱の固有振動数が同期するロックイン現象が起こった。このとき円柱の振幅 (y/D) はそれまでより増大する。

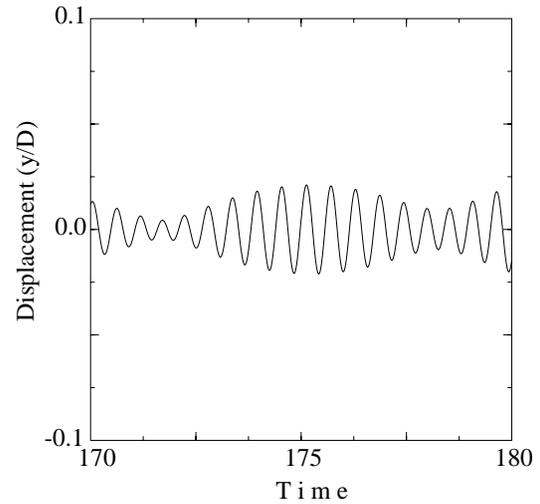


Fig. 6: Time histories of the nondimensional displacement of the body at $Re=100$

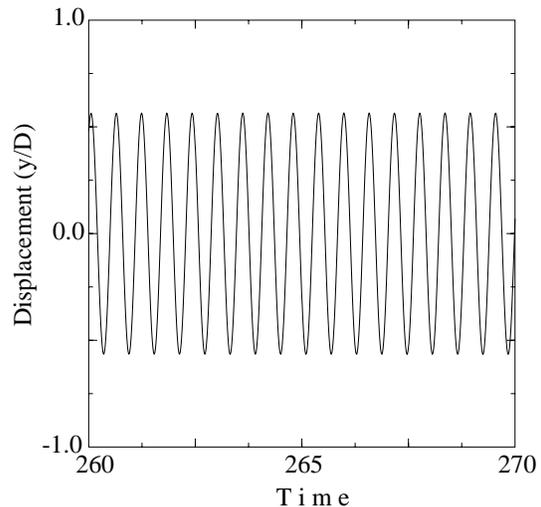


Fig. 7: Time histories of the nondimensional displacement of the body at $Re=106$

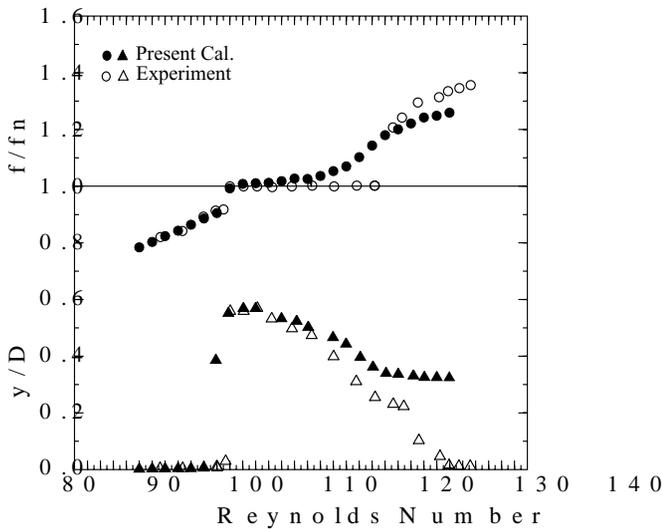


Fig. 8: Reynolds number of flow versus frequency of vortex shedding and amplitude of oscillation ⁶⁾

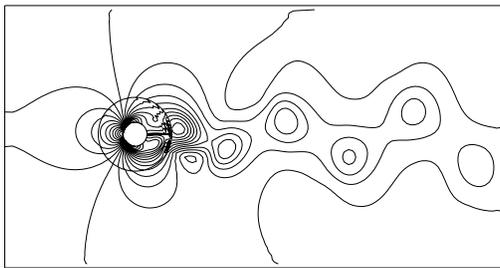


Fig. 9: Pressure contours "lock-in"

Fig.8 に各レイノルズ数に対する振動数比と振幅を示す。無次元固有振動数 (natural frequency) は、 $f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ である。Re=104 あたりから渦放出周波数と円柱の固有振動数が同期している。最大振幅が y/D は実験値に良好に一致した。実験においてロックイン現象は Re=104 辺りで生じ、Re=140 辺りで終了しているが、本計算においては明確な境目は捕らえられなかった。NS 方程式が内部反復計算を終了する時点で格子の移動はほぼ停止しているため、他に何らかの原因があると考えられる。今回の計算は $\Delta t = 0.1$ とし無次元時間 300 毎にレイノルズ数を 2 上昇させているが、時間刻み幅を小さく取る、収束判定を厳しくするなどして現在原因究明中である。Fig.9 にロックイン時の等圧力線図を示す。

5. 結論

1. 円柱渦励振の計算を行った結果、レイノルズ数が Re=104 から渦放出周波数が円柱の固有振動数に同期するロックイン現象が起こることを再現した。
2. ロックインの立ち上がり近くで円柱の振動振幅が通常の振幅より大きくなり共振することを確認できた。

参考文献

- 1) Stuart E. Rogers and Dochan Kwak, Steady and Unsteady Solutions of Incompressible Navier-Stokes Equations, AIAA Journal, Vol.29, No.4, April 1991, 603-610.
- 2) 森西 晃嗣, 擬似圧縮性法, タ - ボ機械協会 第 21 回講習会 非圧縮流れ数値解析 - 理論と適用の具体例 -, 1995, 25-36.
- 3) 土井 康裕, 擬似圧縮性法による二次元物体の抵抗計算値におよぼす諸因子の検討, 京都工芸繊維大学修士論文, 1997.
- 4) Tsukasa Nakayama and Ryoji Matsuzawa, Finite Element Analysis of Flow-Induced Vibration of A Two-Dimensional Rigid Body Using Composite Overlapping Meshes, CFD in Fluid/Structure Interaction, 1998, 1046-1051.
- 5) 卯ノ田 和史, 重畳格子法による流体 物体連成系運動問題の数値計算, 京都工芸繊維大学修士論文, 1997.
- 6) P. Anagnostopoulos and P.W. Bearman, Response Characteristics of a Vortex-excited Cylinder at Low Reynolds Number, Journal of Fluids and Structures 6, 1992, 39-50.