(5)

低レイノルズ数における2本の角柱まわりの3次元流れ解析

Three-dimensional flow analysis around two-square cylinders at low Reynolds numbers

近藤 典夫,日本大学理工学部,274-0085千葉県船橋市習志野台7-24-1,

kondo@ocean.cst.nihon-u.ac.jp

Norio Kondo, College of Science and Technology, Nihon University,

7-24-1 Narashinodai, Funabashi-shi, Chiba 274-0085, Japan.

Kondo@ocean.cst.nihon-u.ac.jp

<Abstract> This paper presents numerical results of flow around two-square cylinders at low Reynolds numbers. This computation is achieved by tree-dimensional simulation using the finite element scheme with a third-order upwind procedure. The bilinear functions are adopted as the shape functions in elements. The Reynolds number, Re, is set as 600 and 1000 in this computation.

1.はじめに

有限要素法を使って流れの3次元計算が行われるように なり、幾つかの数値結果が示されている。有限要素法でも、 計算の安定化を図るために、数値粘性をスキームの中に組み 込む必要があり、多くの方法が提案されている。最も基本的 なものとして SUPG 法、GLS 法などがある。

このような中で、著者は数値粘性として、差分法で提案された3次精度の上流化手法を有限要素法に取り入れる方法 論を提案してきた。この上流化手法はPetrov-Galerkin法に基 づいて行われ、特徴としては修正重み関数の中に2階微分と 3階微分の項が含まれている。

ー般に Galerkin 法によって有限要素方程式を作ると、離散 化の精度は 2 次のオーダーの誤差項を含んでいる。したがっ て、修正重み関数の中に 2 次のオーダーの項を置くと、この 誤差項と打ち消しあい、4 次精度の有限要素方程式を作るこ とができる。これを拡張すれば、さらに高次精度の有限要素 方程式を作ることが可能となる。そして、修正重み関数にあ る 3 次のオーダーの項を使って数値粘性を誘導することが できる。この数値粘性の一つが差分法で採用されている 3 次 4 階の数値粘性と同じものになる。

本論文では上記の数値粘性を使い、3次精度の上流化スキ ームを構成する。

数値解析として、流れに垂直に配置された2本の正方形角 柱まわりの3次元流れ解析の結果を示す。レイノルズ数は、 600と1000に設定した。

2.基礎方程式

非圧縮粘性流体の支配方程式は、以下のようなナビエ・ス トークス方程式と連続方程式で表される。

$$u_{,t} + u_{j}u_{i,j} = \mathbf{S}_{ij,j} \tag{1}$$

$$u_{i,i} = 0 \tag{2}$$

ここで、応力は

$$\mathbf{s}_{ij} = -p \, \mathbf{d}_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} (u_{i,j} + u_{j,i})$$
(3)

であり、 u_i は流速、 Re はレイノルズ数を示す。ここで

(),t は時間微分を、(),i は空間に関する微分を示す。 式(1)の発散を取ることにより、圧力のポアソン方程式は

$$p_{,ii} = -\widetilde{u}_{i,i} \tag{4}$$

となる。ここで、右辺は
$$\tilde{u}_{i} = u_{i,t} + u_{j}u_{i,j} - \frac{1}{\text{Re}}(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j}$$

である。

3. 弱表現

支配方程式の解の解像度を高めるために解析領域は不等 要素に分割されるが、有限要素法ではこのような場合、離散 化に伴う打切り誤差のオーダーは大きくなり、離散化の精度 は悪くなる。

そこで、有限要素法でも離散化の高次精度が維持できるように計算空間の中で離散化を行うことが望ましい。したがって、差分法で採用されている計算空間への変換

$$\boldsymbol{x}_{i} = \boldsymbol{x}_{i} \left(x_{1}, x_{2}, x_{3} \right) \quad , \quad \boldsymbol{t} = t \tag{7}$$

を導入する。

一方、式(1)の有限要素近似をするときに、ペトロフ・ガ ラーキン法を採用するので、修正重み間数を次のように置く。

$$\overline{u}_i = w_i + \widetilde{w}_i \tag{8}$$

ここで、 W_i は標準の重み関数で、 \widetilde{W}_i は修正項を表し、

$$\widetilde{w}_{i} = -\frac{1}{3} \Delta \mathbf{x}_{(j)}^{2} w_{i/(jj)} - \frac{1}{12} \mathbf{a} \Delta \mathbf{x}_{(j)}^{3} \operatorname{sgn}(U_{(j)}) w_{i/(jjj)}$$
(9)

のように与える。()/(i)は計算空間内での微分を示す。修正 項は2階と3階微分の項を持ち、特に、2階微分項は、オー ダー2の打切り誤差を消去する働きがあり、3階微分項は、 ナビエ・ストークス方程式と結びついて数値粘性を作る役割 を持つ。 は数値粘性の大きさを調整するためのパラメータ、 U_i は反変速度である。また、カッコ付き指標(i)は、指標 i と同gじ数値を持ち、和を取らないものとする。

以上より、修正重み関数(8)を使って、ナビエ・ストー クス方程式のペトロフ・ガラーキン表現は以下のようになる。

$$\int_{\overline{\Omega}} w_{i}(u_{i/t} + U_{j}u_{i,j})Jd\overline{\Omega} + \int_{\overline{\Omega}} \mathbf{x}_{k,j}w_{i/k}\mathbf{s}_{ij}Jd\overline{\Omega}$$
$$+ \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \widetilde{w}_{i}(u_{i/t} + U_{j}u_{i/j} - \mathbf{x}_{k,i}\mathbf{s}_{ij/k})Jd\overline{\Omega}$$
$$= \int_{\overline{\Gamma}} w_{i}\mathbf{s}_{i}Id\overline{\Gamma}$$
(10)

有限要素方程式を作るときに、線形の形状関数を使うことを 可能とするために、以下のような補助関数を導入する。

$$\boldsymbol{W}_{i} = J\boldsymbol{U}_{j}\boldsymbol{u}_{i/j} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{f}_{i(j)} = \Delta \boldsymbol{x}_{(j)}^{2} \boldsymbol{w}_{i/(jj)}$$
(12)

これにより、式(10)は、次式のように書き換えられる。

$$\int_{\overline{\Omega}} (w_{i}u_{/t} + w_{i}w_{i})Jd\overline{\Omega}$$

$$+ \int_{\overline{\Omega}} \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{x}_{k,j} w_{i/k} (\mathbf{x}_{m,j}u_{i/m} + \mathbf{x}_{m,i}u_{j/m})Jd\overline{\Omega}$$

$$- \int_{\overline{\Omega}} \mathbf{x}_{k,i} w_{i/k} pJd\overline{\Omega}$$

$$+ \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} (-\frac{1}{3}\mathbf{f}_{i(j)} - \frac{1}{12}\mathbf{a}\Delta\mathbf{x}_{(j)} \operatorname{sgn}(U_{(j)})\mathbf{f}_{i(j)/(j)})u_{/t}Jd\overline{\Omega}$$

$$+ \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} (-\frac{1}{3}JU_{j}\mathbf{f}_{i(j)}u_{i/j}$$

$$- \frac{1}{12}\mathbf{a}\Delta\mathbf{x}_{(j)} |U_{(j)}| \mathbf{f}_{i(j)/(j)}u_{i/j})Jd\overline{\Omega}$$

$$- \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \frac{1}{\text{Re}} (-\frac{1}{3}\mathbf{f}_{i(j)} - \frac{1}{12}\mathbf{s}\Delta\mathbf{x}_{(j)} \operatorname{sgn}(U_{(j)})\mathbf{f}_{i(j)/(j)})$$

$$\times \mathbf{x}_{k,j} (\mathbf{x}_{m,j}u_{i/m} + \mathbf{x}_{m,i}u_{j/m})_{/k}Jd\overline{\Omega}$$

$$+ \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \mathbf{x}_{k,j} (-\frac{1}{3}\mathbf{f}_{i(j)}p_{/k}\mathbf{d}_{ij}$$

$$- \frac{1}{12}\mathbf{s}\Delta\mathbf{x}_{(j)} \operatorname{sgn}(U_{(j)})\mathbf{f}_{i(j)/(j)}p_{/k}\mathbf{d}_{ij})Jd\overline{\Omega}$$

$$=\int_{\overline{\Gamma}} w_i \boldsymbol{s}_i I d\overline{\Gamma} \tag{13}$$

式(12)、(13)の重み付き残差方程式は、重み関数を $\overline{W}_{(i)}$ 、 $\overline{f}_{(ij)}$ で表すと以下のようになる。 $\int_{\overline{\Omega}} \overline{W}_{(i)} w_i d\overline{\Omega} = \int_{\overline{\Omega}} J U_j \overline{W}_{(i)} u_{i/j} d\overline{\Omega}$ (14)

$$\sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \overline{f}_{(ij)} f_{i/(j)} d\overline{\Omega}$$

= $-\sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \Delta \mathbf{x}_{(j)}^{2} f_{(ij)/(j)} w_{i/(j)} d\overline{\Omega}$
+ $\sum_{b} \int_{\overline{\Gamma}_{b}} \Delta \mathbf{x}_{(j)}^{2} \overline{f}_{(ij)} w_{i/(j)} n_{(j)} d\overline{\Gamma}$

式(4),(5)と(2)の重み付き残差方程式は各々以下のよう になる。

(15)

$$\int_{\overline{\Omega}} \mathbf{x}_{k,i} \mathbf{x}_{m,i} \overline{p}_{/k} p_{/m} J d\overline{\Omega} = \int_{\overline{\Omega}} \mathbf{x}_{k,j} \overline{p} \widetilde{u}_{i/k} J d\Omega + \int_{\overline{\Gamma}} \overline{p} p_{,n} I d\overline{\Gamma}$$
(16)

$$\int_{\overline{\Omega}} w_{i} \tilde{u}_{i} J d\overline{\Omega}$$

$$+ \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \left(-\frac{1}{3} \mathbf{f}_{i(j)} - \frac{1}{12} \mathbf{a} \Delta \mathbf{x}_{(j)} \operatorname{sgn}(U_{(j)}) \mathbf{f}_{i(j)/(j)} \right) \tilde{u}_{i} J d\overline{\Omega}$$

$$= \int_{\overline{\Omega}} w_{i} \mathbf{w}_{i} J d\overline{\Omega}$$

$$+ \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \left(-\frac{1}{3} J U_{j} \mathbf{f}_{i(j)} u_{i/j} \right)$$

$$- \frac{1}{12} \mathbf{a} \Delta \mathbf{x}_{(j)} | U_{(j)} | \mathbf{f}_{i(j)/(j)} u_{i/j} \right) J d\overline{\Omega}$$

$$+ \int_{\overline{\Omega}} \frac{1}{\operatorname{Re}} \mathbf{x}_{k,j} w_{i/k} (\mathbf{x}_{m,j} u_{i/m} + \mathbf{x}_{m,i} u_{j/m}) J d\overline{\Omega}$$

$$- \sum_{e} \int_{\overline{\Omega}_{e}} \frac{1}{\operatorname{Re}} (-\frac{1}{3} \mathbf{f}_{i(j)} - \frac{1}{12} \mathbf{s} \Delta \mathbf{x}_{(j)} \operatorname{sgn}(U_{(j)}) \mathbf{f}_{i(j)/(j)})$$

$$\times \mathbf{x}_{k,j} (\mathbf{x}_{m,j} u_{i/m} + \mathbf{x}_{m,i} u_{j/m}) / k J d\overline{\Omega}$$

$$-\int_{\overline{\Gamma}} W_i \widetilde{\mathbf{s}}_i I d\overline{\Gamma}$$
(17)

$$\int_{\overline{\Omega}} \mathbf{x}_{k,i} q u_{i/k} J d \overline{\Omega} = 0$$
⁽¹⁸⁾

ここで、 $\overline{p} \ge q$ は重み関数である。

4 . 有限要素近似

前述の重みつき残差方程式へ有限要素法を適用して有限 要素方程式を作る。このとき、線形の形状関数を採用する。 よって、式(13)~(15)は以下のように表すことができる。

$$(W' M - \Phi' L_{0} - \Phi' L_{1})V_{/t} + W' B_{0}\Omega - \Phi' A_{1}V - \Phi' A_{2}V + W' KV + (-W' C + \Phi' C_{1} + \Phi' C_{2})P = W' F$$
(19)
$$M_{0}\Omega = A_{1}V$$
(20)

$$M_0 \Phi = -B_2 W \tag{21}$$

ここで、V は流速ベクトル、P は圧力のベクトル、 Ω 、W、 Φ は節点ベクトル、これ以外はマトリックスを示す。式 (20) $\mathcal{E}(21)$ を式(19)に代入すると、ナビエ・ストークス方程式に 関する有限要素方程式は以下のように書くことが出きる。

$$M^{*}V_{/t} + (N + K)V - C^{*}P = F$$
(22)

ここで、 M^* は質量行列、Nは移流項の行列、Kは粘性項の行列、 C^* は圧力勾配である。

同様に、圧力のポアソン方程式の有限要素方程式は、式 (16)、(17)から

$$SP = C^{t}\widetilde{V} + F_{p}$$
(23)

と表され、右辺では

$$M^* \tilde{V} = M^* V_{/t} + (N+K)V - F_f$$
(24)

である。

また、式(18)の有限要素方程式は

$$C'V = 0 \tag{25}$$

で与えられる。

ここで、行列 N^* , C^* は3次4階微分で表現される数値粘 性が組み込まれており3次精度の上流化となっている。質量 行列 M^* は2次精度の上流近似、Kは2次精度の中心近似 になっている。 M^* ,Kについても3精度の上流化にするこ とも可能である。

以上より、式(25)を満たしながら式(22), (23)を時間発展 的に計算を進める。

5.計算アルゴリズム

上で示した有限要素方程式では行列の中は複雑になって いるので、本論文では

$$M^* = M$$

 $C^* = C$

と置き、 *M* を集中化行列にして計算を行う。よって計算に 使用する有限要素方程式系は以下のようになる。

$$MV_{/t} + (N+K)V - CP = F$$
 (26)

$$SP = C'\widetilde{V} + F_p \tag{27}$$

$$C^{t}V = 0 \tag{28}$$

時間方向の離散化を考えるとき、時間ステップをnとして 連続方程式(28)を以下のように置く。

$$C^{t}V^{n+1} = 0 (29)$$

これによって、式(26)、(27)は陰解法により

$$M \frac{V^{n+1} - V^{n}}{\Delta t} + (N^{n} + K)V^{n+1} + CP^{n+1} = F^{n+1}$$
(30)

$$SP^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} C' \widetilde{V}$$
(31)

によって計算される。ここで、

$$M\widetilde{V} = MV^{n} - \Delta t(N^{n} + K)V^{n} + \Delta tF^{n+1}$$
(32)

である。

6.数值計算例

本論文で示してきた計算手法を使って、流れに垂直に配置 された2本の正方形角柱まわりの流れについての性状を示 す。

2本の正方形角柱の計算モデルを Fig. 1 に示す。この図は、 x - y 平面の様子を示したもので、 z 方向に角柱の高さ H を 有している。

Fig. 2 は 2 本の角柱近傍で、x - y 平面の要素分割を示した ものである。x - y 平面での要素数は、S/B の変化に応じて約 1.6 万から約 2 万まで変化し、z 方向では、H/B=1.0 とし、 10分割にしている。

Fig. 3、4、5、6は、レイノルズ数が600、無次元時間t=200での S/B=1,2,3,4に対する角柱まわりの圧力分布の瞬間図を示す。

Fig. 7 は、レイノルズ数が1000、無次元時間t=200での S/B=1に対する角柱まわりの圧力分布の瞬間図を示す。

参考文献

[1]N. Kondo : Third-order upwind finite element solutions of high Reynolds number flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 112, 227-251, 1994.

[2] 坂本、羽二生、小畑:直列配列2角柱に作用する変動流 体力、日本機械学会論文集(B編)52巻475号、1175-1183、 1986.

[3]小林:近接する円柱群・正方形群に作用する流体力の研 究、日本機械学会論文集(第2部),42巻357号、1452-1461、 1976.

[4]A.N. Brooks and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 32, pp.199-259, 1982.

[5]B. Cantwell and D. Coles: An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder, J. Fluid Mech. 136, pp.321-374, 1983.



Fig. 1 Computational model of two-square cylinders in tandem arrangement



Fig. 2 Finite element mesh near two-square cylinders



Fig.3 Pressure contours at S/B=1, Re=600 and t=200



Fig.4 Pressure contours at S/B=2, Re=600 and t=200



Fig.5 Pressure contours at S/B=3, Re=600 and t=200



Fig.6 Pressure contours at S/B=4, Re=600 and t=200



Fig. 7 Pressure contours at S/B=4, Re=1000 and t=200