

# 温度依存粘性を持つ無限プラントル数熱対流問題の有限要素コード

## A Finite Element Code for Infinite Prandtl Number Thermal Convection Problems with Temperature Dependent Viscosity

○ 鈴木 厚, 九州大学 大学院数理学研究院, 〒812-8581, 福岡市東区箱崎 6-10-1, E-mail: asuzuki@math.kyushu-u.ac.jp  
 田端 正久, 九州大学 大学院数理学研究院, 〒812-8581, 福岡市東区箱崎 6-10-1, E-mail: tabata@math.kyushu-u.ac.jp  
 Atsushi SUZUKI, Department of Mathematical Sciences, Kyushu Univ., Fukuoka 812-8581, JAPAN  
 Masahisa TABATA, Department of Mathematical Sciences, Kyushu Univ., Fukuoka 812-8581, JAPAN

A finite element code is developed for infinite Prandtl number thermal convection problems with temperature-dependent viscosity. The problem is a mathematical model of the Earth's mantle movement including geophysical property of the thermal fluid. A stabilized finite element scheme with P1/P1/P1 element is employed to reduce computational costs. The scheme is justified mathematically with convergence estimates. Numerical computations are performed in a three-dimensional domain for some temperature-dependent viscosity cases.

### 1. はじめに

地球マントル対流は無限 Prandtl 数の Rayleigh-Bénard 方程式で数学モデル化される。定数粘性係数の熱流体に対する有限要素スキームとコードの開発を行ってきた<sup>(5, 6)</sup>。本研究では、温度依存粘性係数にモデルを精密化する。このシステムでは粘性が場所に依存する Stokes 方程式に対する有限要素ソルバーが必要である。拡張したスキームとコードによる熱対流問題の数値計算結果を示す。

### 2. 支配方程式

$\Omega$  を 3 次元球殻領域とする :  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 ; R_1 < |x| < R_2\}$ . 境界  $\Gamma = \partial\Omega$  は内側と外側の境界  $\Gamma_1, \Gamma_2$  からなる。 $T$  を時刻を表す正定数とする。 $\Omega \times (0, T)$  での流速  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , 圧力  $p$ , 温度  $\theta$  を記述する方程式は次の無限 Prandtl 数 Rayleigh-Bénard 方程式である。

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(u, p; \theta) = \theta e^{(r)}, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta - \frac{1}{Ra} \Delta \theta = f, \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

流速に滑り境界条件  $u \cdot n = 0$ ,  $D(u) n \times n = 0$ , 温度に Dirichlet 境界条件  $\theta = \theta_\Gamma$ , を課す ( $(x, t) \in \Gamma \times (0, T)$ )。温度に初期条件を与える:  $\theta = \theta^0$  ( $x \in \Omega$ )。 $n$  は境界での外向き法線ベクトル,  $e^{(r)}$  は半径方向の単位ベクトルである。内径, 外径は  $R_1 = 11/9$ ,  $R_2 = 20/9$ , 温度は  $\Gamma_1$  で  $\theta_\Gamma = 1$ ,  $\Gamma_2$  で  $\theta_\Gamma = 0$  に正规化している。 $Ra$  は Rayleigh 数である。応力テンソルは  $D(u)$  を変形速度テンソル,  $I$  を  $3 \times 3$  単位行列として  $\sigma(u, p; \theta) = 2\mu(\theta)D(u) - pI$  である。粘性係数  $\mu$  は温度に指數関数的に依存するモデルを考える。

$$\mu(\theta) = \exp(-(\theta - 0.5)\log(b))$$

ここで, 定数  $b$  は粘性率の比を表し,  $b \geq 1$  である。

### 3. 安定化有限要素法

三次元問題での計算量を軽減するため, P1/P1/P1 要素を用いる<sup>(5, 6)</sup>。Stokes 方程式に関しては, 下限上限条件を

克服するための安定化項のみを付加したスキーム<sup>(1)</sup>を用いる。このスキームは変数粘性係数においても計算量が少なく, 得られる有限要素解は一次の収束オーダーである。移流拡散方程式に関しては, 高 Rayleigh 数に対応するため, GLS 型の安定化有限要素法<sup>(2)</sup>を導入する。

$\mathcal{T}_h$  を  $\bar{\Omega}_h$  の四面体要素による分割とする。 $\Omega_h$  は  $\Omega$  の多角形近似であり, 最大要素直径は  $h$  である。 $S_h$  ( $\subset H^1(\Omega_h) \cap C^0(\bar{\Omega}_h)$ ) を四面体 P1 要素による区分的一次多項式の関数からなる空間とする。流速, 圧力, 温度に対する有限要素空間を各々, 次のように設定する。

$$\begin{aligned} X_h &:= S_h^3, \\ V_h &:= \{v_h \in X_h ; (v_h \cdot n_\Omega)(P) = 0 \ (\forall P)\}, \\ &\quad (v_h, v^{(k)})_h = 0 \ (k = 1, 2, 3)\}, \\ Q_h &:= \{q_h \in S_h ; (q_h, 1)_h = 0\}, \\ \Psi_h(\theta_\Gamma) &:= \{\psi_h \in S_h ; \psi_h(P) = \theta_\Gamma(P) \ (\forall P)\}, \\ \Psi_h &:= \Psi_h(0). \end{aligned}$$

ここで,  $P$  は  $\partial\Omega_h$  上の節点,  $n_\Omega$  は  $\partial\Omega$  の外向き単位法線ベクトルを表す。 $v^{(k)}$  は剛体回転の自由度を表し,  $e^{(k)}$  を 3 次元空間の標準基底とすると  $v^{(k)}(x) := e^{(k)} \times x$  ( $k = 1, 2, 3$ ) と表される。 $(\cdot, \cdot)_h$  は  $L^2(\Omega_h)$  または  $L^2(\Omega_h)^3$  での内積である。 $u, v \in X_h$ ,  $q \in S_h$ ,  $\theta, \phi \in S_h$  に対し, 双一次形式, 三重一次形式を次のように定義する。

$$\begin{aligned} a_h(u, v; \mu) &:= 2 \int_{\Omega_h} \mu D(u) : D(v) dx, \\ b_h(v, q) &:= - \int_{\Omega_h} \nabla \cdot v q dx, \\ c_{0,h}(\theta, \psi) &:= \frac{1}{Ra} \int_{\Omega_h} \nabla \theta \cdot \nabla \psi dx, \\ c_{1,h}(u, \theta, \psi) &:= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega_h} (u \cdot \nabla) \theta \psi dx - \int_{\Omega_h} (u \cdot \nabla) \psi \theta dx \right\}. \end{aligned}$$

$\Delta t$  を時間刻みとし,  $N_T = [T/\Delta t]$  とする。 $u_h^n$  は時刻

$n\Delta t$  での  $u$  の有限要素解の値とする。安定化有限要素法によるスキームは初期条件  $\theta_h^0$  を与える時、任意のテスト関数  $(v_h, q_h, \psi_h) \in V_h \times Q_h \times \Psi_h$  に対して、 $(P_h)$  を満たす  $\{(u_h^n, p_h^n, \theta_h^n)\}_{0 \leq n \leq N_T} \subset V_h \times Q_h \times \Psi_h(\theta_\Gamma)$  を求めよ：

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} a_h(u_h^n, v_h; \mu_h(\theta_h^n)) + b_h(v_h, p_h^n) = (\theta_h^n e_h^{(r)}, v_h)_h, \\ b_h(u_h^n, q_h) - \delta \sum_{K \in T_h} h_K^2 (\nabla p_h^n, \nabla q_h)_K = 0, \\ (\frac{\theta_h^{n+1} - \theta_h^n}{\Delta t}, \psi_h)_h + c_{0h}(\theta_h^{n+1}, \psi_h) \\ \quad + c_{1h}(u_h^n, \theta_h^{n+1}, \psi_h) \\ \quad + \sum_{K \in T_h} \tau_K (\frac{\theta_h^{n+1} - \theta_h^n}{\Delta t} + u_h^n \cdot \nabla \theta_h^{n+1}, u_h^n \cdot \nabla \psi_h)_K = \\ \quad (f_h^{n+1}, \psi_h)_h + \sum_{K \in T_h} \tau_K (f_h^{n+1}, u_h^n \cdot \nabla \psi_h)_K \end{array} \right.$$

となる。ここで  $\mu_h$  は  $\mu$  の P1 要素による補間である。 $(\cdot, \cdot)_K$  は要素  $K$  での  $L^2$  内積を表す。正定数  $\delta$  は Stokes 方程式に対する安定化パラメータ、 $\tau_K$  は移流拡散方程式に対する安定化パラメータであり、

$$\tau_K := \min \left\{ \frac{\Delta t}{2}, Ra \frac{h_K^2}{12}, \frac{h_K}{2U_K} \right\}$$

と選択する。 $h_K$  は要素  $K$  の直径であり、 $U_K$  は  $K$  の重心を  $G_K$  として  $|u_h(G_K)|$  を表す。

#### 4. 変数粘性係数 Stokes 方程式

スキーム  $(P_h)$  で温度  $\theta_h^n$  から流速、圧力  $(u_h^n, p_h^n)$  を求める過程では、変数係数を粘性に持つ Stokes 方程式を解くことになる。

双一次形式  $a_h(\cdot, \cdot; \mu_h)$  の強圧性が成り立つ。

#### 補題 1

$\mu(x) \geq \mu_{\min} > 0$  ( $x \in \bar{\Omega}$ ) を仮定する。ある正定数  $\alpha_0$  および  $h_0$  が存在し、 $h_0$  以下の任意の正数  $h$  と任意の  $v_h \in V_h$  に対し、

$$a_h(v_h, v_h; \mu_h) \geq \alpha_0 \|v_h\|_1^2$$

が成り立つ。

また、弱い下限上限条件が成り立つ<sup>(6)</sup>。

#### 補題 2

ある正定数  $\beta_0$  と  $\beta_1$ 、および  $h_0$  が存在し、 $h_0$  以下の任意の正数  $h$  と任意の  $q_h \in Q_h$  に対し、

$$\sup_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{b_h(v_h, q_h)}{\|v_h\|_1} \geq \beta_0 \|q_h\|_0 - \beta_1 |q_h|_h$$

が成り立つ。ここで  $|\cdot|_h$  はセミノルムである：

$$|q_h|_h := \left\{ \sum_K h_K^2 (\nabla q_h, \nabla q_h)_K \right\}^{1/2}.$$

これらの補題より、離散化 Stokes 方程式は一意可解である<sup>(3)</sup>。

このペナルティー型の安定化有限要素スキームは、厳密解が有限要素スキームを満すという適合性を持たない。しかし、このスキームでは P1/P1 要素を用いているため収束オーダーは適合性を持つスキームと同等である。ある粘性と外力に対する厳密解を  $(u, p)$ 、その有限要素解を  $(u_h, p_h)$  とする。次の誤差評価を得る。

#### 定理 1

任意の正定数の安定化パラメータ  $\delta$  に対し、ある正定数  $C$  と  $h_0$  が存在し、 $h_0$  以下の任意の正数  $h$  に対し、

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C h \{\|u\|_2 + \|p\|_1\}$$

が成り立つ。

したがって、スキーム全体では、定数粘性係数に対するスキーム<sup>(6)</sup>と同様に、ある時刻  $T$  までの  $(P_h)$  の解は時間刻み  $\Delta t$  と空間刻み  $h$  に対し 1 次精度 ( $\Delta t + h$ ) である。

#### 5. 並列計算コード

領域の対称性を利用した領域分割による、計算コストの低減を実現した並列アルゴリズムを変数粘性係数へ拡張することで、大規模計算を行う。粘性率は時間発展の温度分布に依存するため、有限要素剛性行列は各時間ステップで更新される。P1 要素と領域分割の特徴を組み合わせ、参照領域での要素剛性行列を記憶することにより、計算量を削減する。計算コードの実装で、有限要素剛性行列の記憶と演算に関し、領域の対称性を利用しているが、解の対称性は仮定しないため、非対称の現象を計算できる。

#### 6. 数値計算結果

温度の初期条件を、極座標  $(r, \varphi, \psi)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi < 2\pi$ ) を用い、球面調和関数により与える<sup>3)</sup>。

$$\theta^0(r, \varphi, \psi) = \theta^*(r) + \epsilon \sin \pi \left( \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right) Y_3^2(\varphi, \psi).$$

ここで  $\theta^*$  は熱伝導解であり、パラメータ  $\epsilon$  は擾乱の大きさを表す。 $Y_n^m$  は正規化された  $n$  次  $m$  階球面調和関数である。 $\epsilon$  は 0.1 とする。内部熱源は無いものとする： $f = 0$ 。Rayleigh 数は定数粘性係数 ( $b = 1$ ) での臨界 Rayleigh 数の約 10 倍、 $Ra = 7,000$  とする。Fig. 1 に球殻領域の P1 要素分割と並列計算のための領域分割を、Table 1. に離散化パラメーターを示す。Fig. 2 は初期温度分布を示し、Figs. 3, 4, 5, 6 はそれぞれの粘性率比で数値的に定常状態になった時の温度分布を示す。 $\theta = 0.2, 0.5, 0.8$  の等温度面を重ねて描いた。

#### 参考文献

- Brezzi, F. and Douglas, Jr., J., "Stabilized mixed methods for the Stokes problem", Numer. Math., **53**(1988), pp.225-235.
- Franca, L. P., Frey, S. L., and Hughes, T. J. R., "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., **95**(1992), pp.253-276.

3. Franca, L.P. and Stenberg, R., "Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations", SIAM J. Numer. Anal., **28**(1991), pp.1,680-1,697.
4. Ratcliff, J. T., Schubert, G., and Zebib, A., "Steady tetrahedral and cubic patterns of spherical shell convection with temperature-dependent viscosity", Journal of Geophysical Research, **101**(1996), pp.25,473-25,484.
5. 鈴木, 田端, "3次元球殻内無限プラントル数ブシネスク流体の P1/P1/P1 安定化有限要素法", 第 12 回数值流体シンポジウム講演論文集, (1998), pp.489-490.
6. Tabata, M. and Suzuki, A., "A stabilized finite element method for the Rayleigh-Bénard equations with infinite Prandtl number in a spherical shell", Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., **190**(2000), pp.387-402.

Table 1 : Discretization parameter

# elements	# nodes	$h$	$\Delta t$
117,540	664,320	0.2	3.0

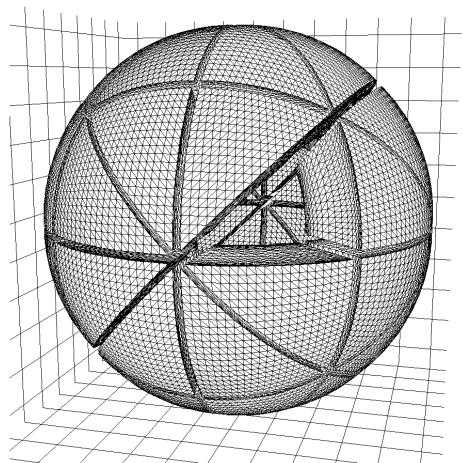


Fig. 1 : Finite element mesh and domain decomposition of a shperical shell

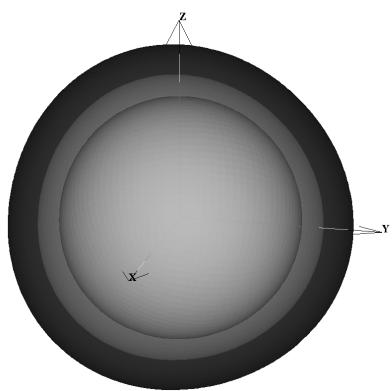


Fig. 2 : Temperature distribution at the initial state

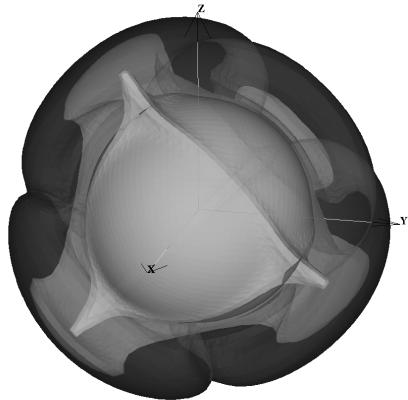


Fig. 3 : Temperature distribution :  $b = 1$

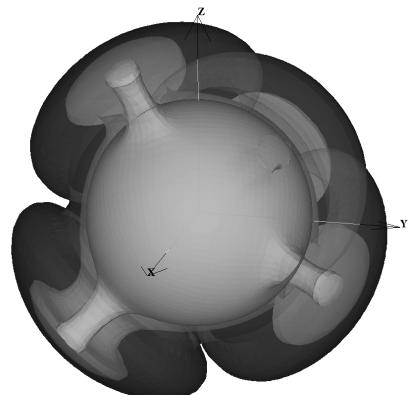


Fig. 4 : Temperature distribution :  $b = 10$

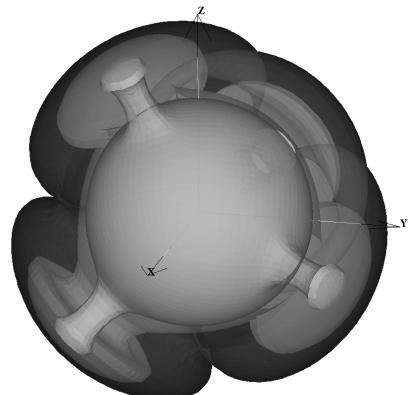


Fig. 5 : Temperature distribution :  $b = 100$

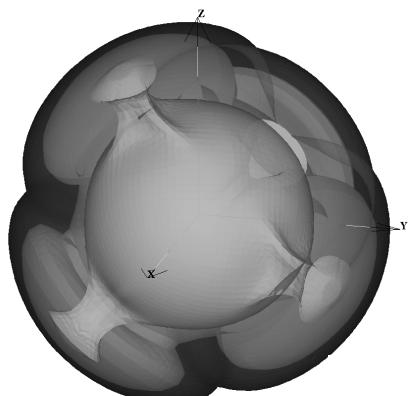


Fig. 6 : Temperature distribution :  $b = 1,000$