跳水現象の解析における粗度係数のパラメータ同定

Parameter Identification of Manning Roughness Coefficient Using Analysis of Hydraulic Jump

○　石井　明, 中央大理工, 〒 112-8551, 文京区春日 1-13-27, E-mail：a-ki@kc.chuo-u.ac.jp
川原睦人, 中央大理工, 〒 112-8551, 文京区春日 1-13-27, E-mail：kawa@civil.chuo-u.ac.jp
Akira ISHII, Dept. of Civil Eng., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551, JAPAN
Mutsuto KAWAHARA, Dept. of Civil Eng., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551, JAPAN

This paper is shown parameter identification of manning roughness coefficient using analysis of hydraulic jump. To calculate water flow phenomenon, the shallow water flow is employed. The quasi-linear apporoximation of advection velocity is given by the Adams-Bashforth formula which has second order accuracy. The improved bubble element method is applied to spatial discretization. The Sakawa-Shindo method is employed for minimization algorithm.

1.　はじめに

水路床の粗さを表わすパラメータとしてマニングの粗度係数がある. マニングの粗度係数は無次元数ではなく, このパラメータを含んだ平均流速式としてマニングの平均流速公式とよばれている実験式が用いられている. この式は式形が比較的単純であることの他に, 粗面水路の乱流について成立するという流体力学による理論式と比較的良く適合することもあって現在は最も広く用いられる平均流速公式となっている. またマニングの平均流速公式は実際の河川に対して最もよく用いられるのは, 従来の経験からマニングの粗度係数の逆算値が数多く求められていることによるものと考えられる. そこで本研究ではマニングの粗度係数の逆算値を求める１つとして, 逆解析手法の１つであるパラメータ同定を行ない求めるものである. 状態方程式として用いる浅水長波方程式には渦動粘性係数がある. この係数を決める際に摩擦速度を導入すると, マニングの粗度係数のみが未知のパラメータとなる. また最小化手法として Sakawa-Shindo 法を用いる.

2.　状態方程式

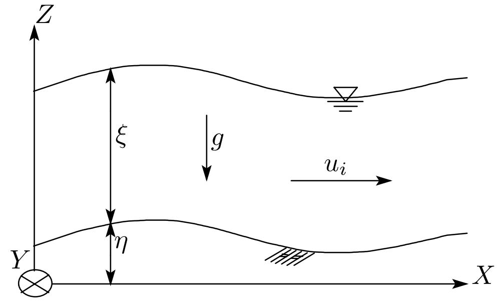

Fig.1　XYZ-coordinate

状態方程式として浅水長波方程式を用いる. 浅水長波方程式の運動方程式と連続式は次のように表わされる.

⟨ 運動方程式 ⟩

$$\dot{u}_i + u_j\, u_{i,j} + g\,(\,\xi + \eta\,)_{,i} - \nu\,(\,u_{i,j} + u_{j,i}\,)_{,j} + f\,u_i \;=\; 0$$

⟨ 連続式 ⟩

$$\dot{\xi} \;+\; \xi_{,i}\,u_i \;+\; \xi\,u_{i,i} \;=\; 0$$

ここで u_i は流速, ξ は水位変動量, η は河床標高, g は重力加速度, ν は渦動粘性係数である. また摩擦速度 u_* を用いて渦動粘性係数 ν および運動方程式中の f を表わすと次式のようになる.

$$\nu = \frac{k_l}{6}\,u_*\,\xi, \qquad f = \frac{u_*}{\xi}$$

ここで k_l は カルマン定数であり, 摩擦速度 u_* は次式のように定義される.

$$u_* = \frac{g\,n^2\,\sqrt{u_k u_k}}{\xi^{1/3}}$$

ここで n はマニングの粗度係数である.

3.　空間方向の離散化

3.1　気泡関数要素

空間方向の離散化については, 通常の Galerkin 法に従って行なうものとする. 運動方程式および連続式の流速と水位変動量にたいして気泡関数要素による同次補間を用いるものとする.

$$u_i \;=\; \Phi_1\,u_{i1} \;+\; \Phi_2\,u_{i2} \;+\; \Phi_3\,u_{i3} \;+\; \Phi_4\tilde{u}_{i4}$$

$$\tilde{u}_{i4} \;=\; u_{i4} \;-\; \frac{1}{3}\,(\;u_{i1} \;+\; u_{i2} \;+\; u_{i3}\;)$$

$$\xi \;=\; \Phi_1\,\xi_1 \;+\; \Phi_2\,\xi_2 \;+\; \Phi_3\,\xi_3 \;+\; \Phi_4\tilde{\xi}_4$$

$$\tilde{\xi}_4 \;=\; \xi_4 \;-\; \frac{1}{3}\,(\;\xi_1 \;+\; \xi_2 \;+\; \xi_3\;)$$

$$\Phi_1 \;=\; 1 - r - s,\;\; \Phi_2 \;=\; r,\;\; \Phi_3 \;=\; s,\;\; \Phi_4 \;=\; \phi_e$$

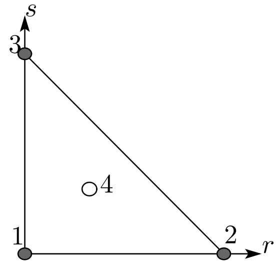

Fig.2　Bubble function element

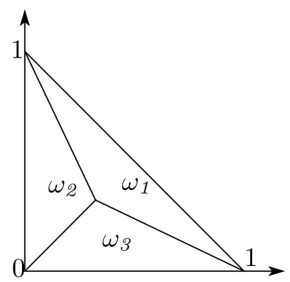

Fig.3　Subdivision of element

ここで ϕ_e は気泡関数であり,Fig.2 に示すように三角形の

要素領域をその重心点を用いて3つの小三角形ωに分割する (Fig.3). 気泡関数はこの小三角形毎にアイソパラメトリック座標系r,sを用いて次のように定義される.

$$\phi_e = \begin{cases} 3\,(\,1\,-\,r\,-\,s\,) & \text{in}\ \ \omega_1 \\ 3\,r & \text{in}\ \ \omega_2 \\ 3\,s & \text{in}\ \ \omega_3 \end{cases}$$

3.2 Improved Bubble Element 法

気泡関数は静的縮約という操作を行なうことにより重心点を消去することができる. その場合に気泡関数により導出されるものは安定化有限要素法の定式化によって導かれるものと類似した形になることがわかっている [2]. そのときに気泡関数により導かれる安定化パラメータは次のようなものである.

⟨ 運動方程式 ⟩

$$\tau_{eBu_i} = \frac{\langle\phi_e,1\rangle^2_{\Omega_e} A_e^{-1}}{\frac{1}{\Delta t}\parallel\phi_e\parallel^2_{\Omega_e}+\frac{1}{2}[(\nu+\tilde{\nu})2\parallel\phi_{e,j}\parallel^2_{\Omega_e}-f\parallel\phi_e\parallel^2_{\Omega_e}]}$$

⟨ 連続式 ⟩

$$\tau_{eB\eta} = \frac{\langle\phi_e,1\rangle^2_{\Omega_e} A_e^{-1}}{\frac{1}{\Delta t}\parallel\phi_e\parallel^2_{\Omega_e}+\frac{1}{2}[\tilde{\nu}\parallel\phi_{e,j}\parallel^2_{\Omega_e}]}$$

ここで,$\tilde{\nu}$は安定化作用に対する制御パラメータであり, この値は安定化有限要素法において用いられる次式と等価になるように決定する.

⟨ 運動方程式 ⟩

$$\tau_{eBu_i} = \left(\frac{1}{2}\,\tau_{es}^{-1} + \frac{\alpha}{\Delta t}\right)^{-1}$$

$$\tau_{es}^{-1} = \left[\left(\frac{2\mid U_i\mid}{h_e}\right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

⟨ 連続式 ⟩

$$\tau_{eB\eta} = \left(\frac{1}{2}\,\tau_{es}^{-1} + \frac{\alpha}{\Delta t}\right)^{-1},\quad \tau_{es}^{-1} = \frac{2\mid U_i\mid}{h_e}$$

ここで,

$$\alpha = \frac{A_e\parallel\phi_e\parallel^2_{\Omega_e}}{\langle\phi_e,1\rangle^2_{\Omega_e}},\ h_e=\sqrt{2A_e},\ \mid U_i\mid=\sqrt{u^2+v^2+g\xi}$$

である. また Ω_e は要素領域, $\langle\,u,v\,\rangle_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} uv\,d\Omega$, $\parallel u_i\parallel^2_{\Omega_e} = \langle\,u,u\,\rangle_{\Omega_e}$, $A_e = \int_{\Omega_e} d\Omega$ である. 気泡関数要素の積分は次のようになる.

$$\langle\,\phi_e,\,1\rangle_{\Omega_e} = \frac{A_e}{3},\quad \parallel\phi_{e,j}\parallel^2_{\Omega_e}=3A_e g,\quad \parallel\phi_e\parallel^2_{\Omega_e}=\frac{A_e}{6}$$

$$g = \mid\Phi_{\alpha,x}\mid^2 + \mid\Phi_{\alpha,y}\mid^2,\quad \alpha = 1\sim 3$$

4. パラメータ同定

4.1 評価関数

パラメータ同定は評価関数を最小にする最適な値を見つけるものとして定義される. 評価関数は次のように定義される.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\,\xi-\xi_{obj}\,)^T\,Q\,(\,\xi-\xi_{obj}\,)\,dt$$

ここで,Qは1.00の重み定数行列, ξは水位変動量,ξ_{obj}は目的あるいは観測の水位変動量である.

4.2 随伴方程式

状態方程式を有限要素方程式に書き直すと次のようになる.

⟨ 運動方程式 ⟩

$$\begin{aligned} &M_{\alpha\beta}\,\dot{u}_{i\beta} \;+\; \bar{u}_j\,S_{\alpha\beta,j}\,u_{i\beta} \;+\; g\,S_{\alpha\beta,i}\,(\,\xi\;+\;\eta\,)_\beta \\ &\quad + \nu H_{\alpha\beta,jj}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{i\beta} \;+\; \nu H_{\alpha\beta,ji}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{j\beta} \\ &\quad + f\,M_{\alpha\beta}\,u_{i\beta} \;=\; 0 \end{aligned}$$

⟨ 連続式 ⟩

$$M_{\alpha\beta}\,\dot{\xi}_\beta \;+\; \bar{u}_i\,S_{\alpha\beta,i}\,\xi_\beta \;+\; \bar{\xi}\,S_{\alpha\beta,i}\,u_{i\beta} \;=\; 0$$

拘束条件つきの評価関数の最小化問題にたいしてラグランジュ乗数法を適用する. 状態方程式の有限要素方程式とラグランジュ乗数によって評価関数は拡張される. 拡張評価関数は次式にように表わせる.

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f}\left\{H\;-\;{\lambda_{u_i}}^T\,M_{\alpha\beta}\,\dot{u}_{i\beta}\;-\;{\lambda_\xi}^T\,M_{\alpha\beta}\,\dot{\xi}_\beta\right\}dt$$

ここで,λ_{u_i}は流速にたいしてのラグランジュ乗数であり, λ_ξは水位変動量にたいしてのラグランジュ乗数である. またここで用いているHはハミルトニアンであり, 次式のように定義されている.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\,(\,\xi-\xi_{obj}\,)^T\,Q\,(\,\xi-\xi_{obj}\,) \\ &+{\lambda_{u_i}}^T\Big\{-\bar{u}_j\,S_{\alpha\beta,j}\,u_{i\beta}\;-\;g\,S_{\alpha\beta,i}\,(\,\xi\;+\;\eta\,)_\beta \\ &\qquad -\nu\,H_{\alpha\beta,jj}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{i\beta}\;-\;\nu\,H_{\alpha\beta,ji}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{j\beta} \\ &\qquad -\;f\,M_{\alpha\beta}\,u_{i\beta}\Big\} \\ &+{\lambda_\xi}^T\Big\{-\bar{u}_i\,S_{\alpha\beta,i}\,\xi_\beta\;-\;\bar{\xi}\,S_{\alpha\beta,i}\,u_{i\beta}\Big\} \end{aligned}$$

拡張評価関数の第一変分をとり, 拡張評価関数の最小値を求める. $\delta J^* = 0$より随伴方程式と横断性の条件が導かれる. 求められた随伴方程式と横断性の条件を以下に示す.

⟨ 随伴方程式 ⟩

$$M_{\alpha\beta}\,\lambda_{u_{i\beta}} = -\frac{\partial\,H}{\partial\,u_i},\quad M_{\alpha\beta}\,\lambda_{\xi_\beta} = -\frac{\partial\,H}{\partial\,\xi}$$

⟨ 横断性の条件 ⟩

$$\lambda_{u_i} = \lambda_\xi = 0\ \ at\ \ t = t_{tf}$$

5. 最小化手法

5.1 Sakawa-Shindo 法

最小化手法として Sakawa-Shindo 法を用いる．この手法では拡張評価関数にペナルティ項を加えた修正評価関数が導入される．修正評価関数は次式にように表わせる．

$$K^{(l)} = J^{*(l)} + \frac{1}{2}\,(\,n^{(l+1)} \,-\, n^{(l)}\,)^T\,c^{(l)}\,(\,n^{(l+1)} \,-\, n^{(l)}\,)$$

ここで l は最小化の反復回数,n はマニングの粗度係数,$c^{(l)}$ は重み係数行列である．停留状態である $\delta K^{(l)} = 0$ より次式を得る．

$$n^{(l+1)} = n^{(l)} + c^{-(l)} \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)^{(l)} dt$$

ここで

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{1}{\partial n}\Big\{- \lambda_{u_i}^T\,\nu\,H_{\alpha\beta,jj}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{i\beta} - \lambda_{u_i}^T\,\nu\,H_{\alpha\beta,ji}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{j\beta} \,-\, \lambda_{u_i}^T\,f\,M_{\alpha\beta}\,u_{i\beta}\Big\}$$

である．これらの式がマニングの粗度係数を求める式となる．また重み係数行列 $c^{(0)}$ は $J^{(1)} \leq J^{(0)}$ となるように指定した．

5.2 アルゴリズム

Sakawa-Shindo 法のアルゴリズムを以下に示す．

1. $l = 0$ として初期粗度係数 $n^{(0)}$ を設定する．
2. 状態量 $u_i^{(l)}, \xi^{(l)}$ を状態方程式より求める．
3. 初期評価関数 $J^{(l)}$ を求める．
4. ラグランジュ乗数 $u_i^{*(l)}, \xi^{*(l)}$ を随伴方程式より求める．
5. マニングの粗度係数 $n^{(l+1)}$ を求める．
6. 誤差ノルム e = $\parallel n^{(l+1)} - n^{(l)} \parallel$, を計算し，もし e $< \epsilon$ なら計算を終了する．そうでなければ次のステップに進む．
7. 状態量 $u_i^{(l+1)}, \xi^{(l+1)}$ を状態方程式より求める．
8. 評価関数 $J^{(l+1)}$ を求める．
9. 重み行列 $c^{(l)}$ を次のように修正する．
   $J^{(l+1)} < J^{(l)}$ ならば $c^{(l+1)} = 0.9c^{(l)}$ としてステップ 4 へ, そのほかは $c^{(l+1)} = 2.0c^{(l)}$ としてステップ 5 へ．

6. 時間方向の離散化

時間方向の離散化については, 安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰解法である Crank-Nicolson 法を適用する．

〈 運動方程式 〉

$$\frac{1}{\Delta t}\,(\,M_{\alpha\beta}\,u_{i\beta}^{n+1} \,-\, M_{\alpha\beta}\,u_{i\beta}^{n}\,) + \bar{u}_j^*\,S_{\alpha\beta,j}\,u_{i\beta}^{n+\frac{1}{2}} \;+\; g\,S_{\alpha\beta,i}\,(\xi+\eta)_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} + \nu\,H_{\alpha\beta,jj}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{i\beta}^{n+\frac{1}{2}} \;+\; \nu\,H_{\alpha\beta,ji}(\tilde{\nu}_{ij})\,u_{j\beta}^{n+\frac{1}{2}} + f\,M_{\alpha\beta}\,u_{i\beta}^{n+\frac{1}{2}} \;=\; 0$$

〈 連続式 〉

$$\frac{1}{\Delta t}\,(\,M_{\alpha\beta}\,\xi_{\beta}^{n+1} \,-\, M_{\alpha\beta}\,\xi_{\beta}^{n}\,) + \bar{u}_i^*\,S_{\alpha\beta,i}\,\xi_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} \;+\; \bar{\xi}^*\,S_{\alpha\beta,i}\,u_{i\beta}^{n+\frac{1}{2}} \;=\; 0$$

ここで

$$u_{i\beta}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,(\,u_{i\beta}^{n+1} + u_{i\beta}^{n}), \quad \xi_{\beta}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,(\,\xi_{\beta}^{n+1} + \xi_{\beta}^{n}\,)$$

$$\bar{u}_i^* = \frac{1}{2}\,(\,3\,u_i^n - u_i^{n-1}), \quad \bar{\xi}^* = \frac{1}{2}\,(\,3\,\xi^n - \xi^{n-1}\,)$$

である．移流項の線形近似としている $\bar{u}^*$, $\bar{\xi}^*$ は 2 次精度 Adams-Bashforth 公式である．このことから得られたスキームは時間方向に関して完全 2 次精度を有している．

7. 数値解析例

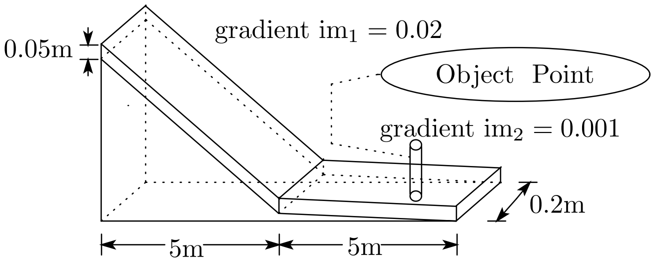

Fig.4 Analytical model

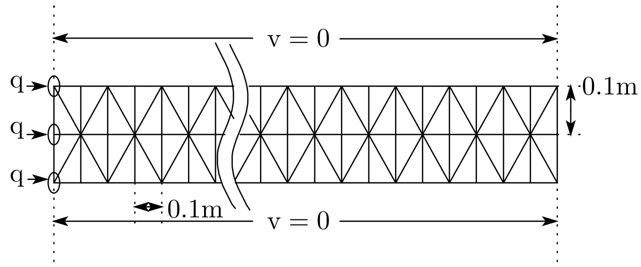

Fig.5 Boundary condition

本研究ではショックキャプチャリング項を状態方程式の運動方程式と連続式にそれぞれ適用するものとする．数値解析例として単純矩形水路内の開水流れでの跳水現象の解析を用いる．跳水現象は摩擦の効果がなければ起こりえない現象であり, 摩擦の効果が常流側と射流側の双方の水深にたいして大きな影響を及ぼすものである．本研究では摩擦の効果の強さをマニングの粗度係数の値によるものとする．Fig.4 に示すように水路長を 10m とし, 上流から 5m までを急勾配 (im_1=0.02), それ以降を緩勾配 (im_2=0.001) とする．接点数は 303, 要素数は 400 とする．初期条件は全領域で $\xi = 0.05m$, $u =$ は $0.0m/s$, $v = 0.0m/s$ とする．境界条件として上流端で単位幅当たりの流量 $q = 0.05\ m^3/s$ を与える．また時間増分量 Δ t = 0.02(sec), 時間ステップ数 N = 3000 とする．Fig.8 から Fig.11 にマニングの粗度係数を 0.015 とした時の計算結果を示す．

パラメータ同定を行なうにあたって目的のマニングの粗度係数を 0.015 とする．このマニングの粗度係数 0.015 を用いて計算された水位変動量を目的の水位変動量とする．目的のマニングの粗度係数の値 0.015 を得るために Fig.4 に示すように目的点を設定する．初期マニングの粗度係数の値を 0.030 と設定し,Sakawa-Shindo 法のアルゴリズムに従ってマニングの粗度係数の値を計算する．結果を Fig.6 と Fig.7 に示す.Fig.6 は反復回数毎の評価関数の値を示しており, Fig.7 は反復回数毎のマニングの粗度係数の値を示している．この 2 つのグラフから見てわかるように, 評価関数が減少してほぼ 0 に収束したときに, 目的のマニングの粗度係数の値である 0.015 を得ることができた．

8. おわりに

本研究では評価関数の最小化問題にラグランジュ乗数法を用い, 最小化手法に Sakawa-Sindo 法を適用してマニ

ングの粗度係数のパラメータ同定を行なった．結果として評価関数が減少し，目的のマニングの粗度係数の値を得ることができた．しかし，本研究の問題点として目的点が1つであるということと，ショックキャプチャリング項を定数として扱っていることがあげられる．今後はこれらの問題点が検討課題である．

参考文献

1. 松本純一, 川原睦人 MINI 要素を用いた流体-構造連成問題における安定形状同定 応用力学論文集, vol.3 (2000 年 8 月), pp263-274
2. 松本純一, 川原睦人 線形型気泡関数を用いた非圧縮性粘性流体解析と適応型有限要素法 応用力学論文集, vol.2 (1999 年 8 月), pp223-232
3. 松本純一, 梅津剛, 川原睦人 陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析 応用力学講演論文集, vol.1 (1998), pp263-272.
4. 松本純一, 梅津剛 矩形水路流れの有限要素法解析と跳水現象形成のメカニズムについての考察　第 7 回計算力学シンポジウム, pp217-222
5. 清水康行, 藤田睦博, 平野道夫 連続床止め工を有する複断面河道における流れと河床変動の計算 水工学論文集, 第 43 巻 (1998), pp79-84.
6. 本間仁, 安芸的一編 物部水理学, 岩波書店,1962 年

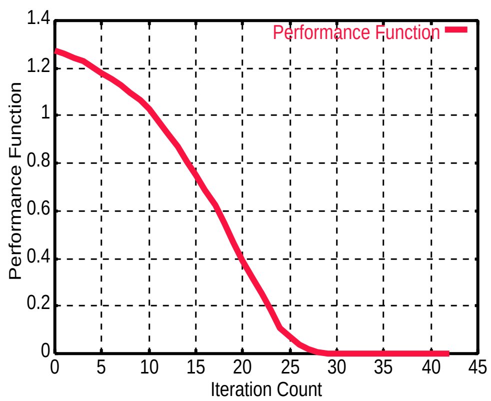

Fig.6　Performance Function

Fig.7　Manning roughness coefficient

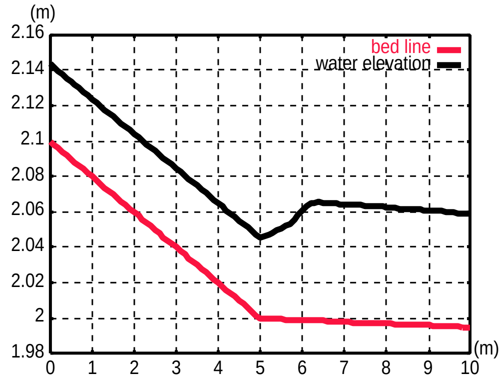

Fig.8　t = 6.0(sec)

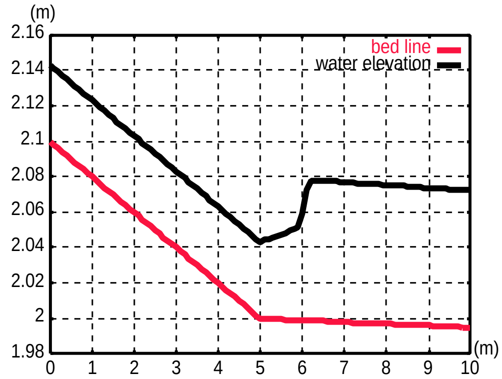

Fig.9　t = 20.0(sec)

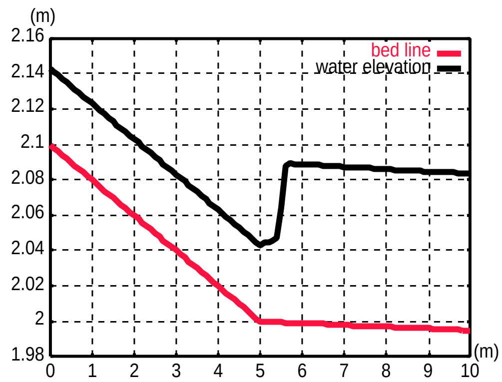

Fig.10　t = 40.0(sec)

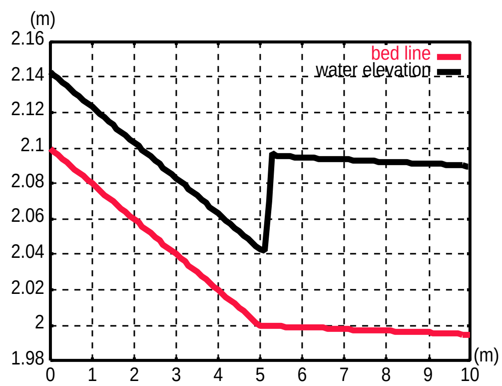

Fig.11　t = 60.0(sec)