# 移動物体を有する非圧縮性流れに対する Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain 法

A Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain Method for Incompressible Flows around Rigid Bodies

○ 奥村　弘，中央大院, 〒 122-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail：oku@kc.chuo-u.ac.jp
納谷　洋之，中央大院, 〒 122-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail：hnaya@kc.chuo-u.ca.jp
島田　憲成，中央大理工, 〒 122-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail：norimasa@kc.chuo-u.ac.jp
川原　睦人，中央大理工, 〒 122-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail：kawa@civil.chuo-u.ac.jp
Hiroshi OKUMURA, Dept. of civil Eng., Chuo Univ., Kasuga1-12-27, Bunkyo-ku Tokyo 112-8551,JAPAN
Hiroyuki NAYA, Dept. of civil Eng., Chuo Univ., Kasuga1-12-27, Bunkyo-ku Tokyo 112-8551,JAPAN
Norimasa SHIMADA, Dept. of civil Eng., Chuo Univ., Kasuga1-12-27, Bunkyo-ku Tokyo 112-8551,JAPAN
Mutsuto KAWAHARA, Dept. of civil Eng., Chuo Univ., Kasuga1-12-27, Bunkyo-ku Tokyo 112-8551,JAPAN

In this paper we discuss incompressible viscous flows by a Lagrange multiplier / fictitious domain method. This approach allows us to use regular grid for problems on complicated geometries; the resulting saddle-point system can be solved by the conjuate gradient algorithm. The resulting methodology is applied to incompressible Navier-Stokes flows around moving bodies.

## 1. はじめに

従来, 有限要素法において移動境界問題, 特に非定常的に大きな移動を伴うような問題に対しては時間ステップ毎に解析領域の要素再分割が一般的に必要とされている. しかしながら, 近年有限要素解析の急激な発展に伴い, 解析モデルの複雑化および大規模化により, 要素再分割を平行しながら数値シミュレーションを行うことに対し, 数値計算上の問題点が多く指摘されている.

このような移動境界問題に対し,Glowinski らは, 移動を伴う領域を架空の領域 (fictitious domain) として解析領域を包含することにより, 拘束条件付の鞍点型境界値問題として一つの解を与えている. これは Fictitious Domain 法と呼ばれ, 次世代の新しい有限要素法の可能性を伸ばすものとして近年特に注目されている. 一般的には移動境界に対し有限要素の節点を適応的に境界上へ振り分ける必要があり, ALE(Arbitrary Lagragian-Eulerian) および Lagrange 的に流れ場を解析する方法が多く用いられている. 一方, Fictitious Domain 法では, 移動境界に対し節点をフィトさせる必要がなく, 完全な Euler 的記述で流れ場を表現することができるという特徴がある. しかしながら, これまでの Fictitious Domain 法を用いた計算モデルは限られており, 従来の移動境界手法に比べ応用解析例は少ない. そこで, 著者らはこの Fictitious Domain 法を用いた応用解析を将来的な目的とし, 本研究においては, その基礎的段階として流体中を移動する物体まわりの流れ解析を行うことにより, 本手法の有効性を検討する.

## 2. Fictitious Domain 法

### 2.1 Dirichlet 問題

次のような Dirichlet 問題を用いて, Fictitious domain 法の説明を行う. 境界 $\Gamma$ を有する領域 $\Omega \subset I\!R$ と境界 $\gamma$ を有する領域 $\omega \subset I\!R$ を定義し, また, 領域 $\omega$ は領域 $\Omega$ の中に含まれているとすると, 領域 $\Omega\backslash\bar{\omega}$ において, 未知関数 $u : \Omega\backslash\bar{\omega} \mapsto R$ を見出す Dirichlet 問題は以下のように表せることができる.

$$\alpha u - \nu\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\backslash\bar{\omega}, \tag{1}$$

$$u = g_0 \quad \text{on} \quad \Gamma = \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u = g_1 \quad \text{on} \quad \gamma = \partial\omega, \tag{3}$$

ここで, $\alpha \geq 0$ , $\mu > 0$ なる定数係数であり, $f$ は既知関数である.

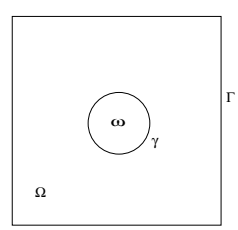



図 1. 解析領域

境界値問題 (1)-(3) に対する重み付き残差方程式は境界上で 0 となる重み関数 $v$ を用い通常以下のように書き表すことができる.

$$\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \alpha u\, v\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \quad + \quad \nu \int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \nabla u \cdot \nabla v\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} f\, v\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{4}$$

$$u = g_0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{5}$$

$$u = g_1 \quad \text{on} \quad \gamma. \tag{6}$$

### 2.2 Fictitious Domain 法による定式化

Lagrange 乗数を用いた Fictitious domain 法の基本的な考え方は

(a) 領域 $\omega$ 内部が流体で満たされていると仮定する.


Copyright © 2000 by JSCFD

(b) 物体が本来, 位置すべき場所 (領域 $\omega$ 内) では物体の挙動が流体に反映される.
(c) 物体の動きを Lagrange 乗数を用いることにより拘束する.

である. つまり, Lagrange 乗数を用いて境界条件を拘束条件として扱うことにより, 境界値問題 (1)-(3) と等価なる Fictitious domain 法による定式化は以下のような未知関数 $U:\Omega\mapsto R$ と $\lambda:\omega\mapsto R$ を見出す拘束条件付き重み付き残差方程式となる.

$$\begin{aligned}\int_\Omega(\alpha U\,v+\nu\nabla U\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega F\,v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &+ \int_\omega \lambda\,v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad (7)\\ \int_\omega \mu\,(U-g_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= 0\ , \qquad (8)\\ U &= g_0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \qquad (9)\end{aligned}$$

ここで, $U|_{\Omega\backslash\bar{\omega}}=u$ , $F|_{\Omega\backslash\bar{\omega}}=f$ である. また, $\lambda$ , $\mu$ はそれぞれ領域 $\omega$ で定義される Lagrange 乗数とそれに対する重み関数である. 式 (7) の右辺第 2 項が Lagrange 乗数を用いた拘束条件の項であり, それに対し式 (8) が境界条件を表す重み付き残差方程式である.

### 2.3 有限要素近似方程式

重み付き残差方程式 (7)-(8) に対する有限要素近似方程式は以下のように表せる.

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(\alpha U_h\,v_h+\nu\nabla U_h\cdot\nabla v_h)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &=\int_\Omega F_h v_h\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\omega \lambda_h\ v_h\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad (10)\end{aligned}$$

$$\int_\omega \mu_h\ (U_h-g_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0, \qquad (11)$$

ここに, 近似関数 $U_h$ , $v_h$ は要素 $e\in\{1,2,\cdots N_d\}$ , ( $N_d$ は要素数) ごとに定義される補間関数 $N_d$ を用いて以下のように表せる.

$$U_h\ |_{\Omega_e}=\boldsymbol{N}_e\cdot\boldsymbol{U}_e,\quad v_h\ |_{\omega_e}=\boldsymbol{N}_e\cdot\boldsymbol{v}_e, \qquad (12)$$

次に, 領域 $\omega$ 上で定義される Lagrange 乗数 $\lambda_h$ とその重み関数 $\mu_h$ に対して補間関数を用いて近似しなければならないが, 式 (12) のように要素区分で連続な補間関数を用いた場合, 式 (10) の右辺第 2 項および式 (11) の積分が非常に困難なものとなる. そこで, Lagrange 乗数を用いた Fictitious domain 法ではこれらの補間関数に対し Dirac のデルタ関数を用いる. Dirac のデルタ関数を用いる利点として, 積分区間が自由にとれることがあげられる. これにより, 領域 $\omega$ 上での積分が容易となる. よって, このことにより近似 Lagrange 乗数 $\lambda_h$ とそれに対する近似重み関数 $\mu_h$ は

$$\lambda_h=\sum_{i=1}^{N_d}\lambda_i\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i), \qquad (13)$$

$$\mu_h=\sum_{i=1}^{N_d}\mu_i\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i), \qquad (14)$$

と表すことが出来る. ここで, $N_d$ は領域 $\omega$ における分割節点数である. よって, 式 (10) の右辺第 2 項および式 (11) の左辺項はそれぞれ以下のように書ける.

$$\int_\omega \lambda_h\,v_h\,\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^{N_d}\lambda_i\,v_h(\boldsymbol{X}_i),$$

$$\begin{aligned}&\int_\omega \mu_h\ (U_h-g_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &=\sum_{i=1}^{N_d}\mu_i(U_h(\boldsymbol{X})-g_1(\boldsymbol{X}_i)), \qquad (15)\end{aligned}$$

また, 領域 $\Omega_e$ における有限要素方程式をマトリックス表示すれば以下のように表すことができる.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^T\\ \boldsymbol{B} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_e\\ \lambda_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{g}_e\end{bmatrix}, \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \alpha\boldsymbol{N}_e\boldsymbol{N}_e^T+\nu\nabla\boldsymbol{N}_e\cdot\nabla\boldsymbol{N}_e^T, \qquad (17)\\ \boldsymbol{B} &= \sum_{i=1}^{N_d^*}\boldsymbol{N}_e(\boldsymbol{X}_i), \qquad (18)\\ \boldsymbol{g}_e &= \sum_{i=1}^{N_d^*}g_1(\boldsymbol{X}_i), \qquad (19)\end{aligned}$$

ここで, $N_d^*$ は要素 $\Omega_e$ 内に存在する領域 $\omega$ の節点の数である. よって, 全体系に有限要素法マトリックスを重ね合わせする際に, 要素 $\Omega_e$ における有限要素法マトリックスの記憶のみで実際の計算ができることになる.

### 2.4 数値解析例

Fictitious domain 法の具体的な解析例を 2 次元ポテンシャル流れにより示す.

・基礎方程式

$$\begin{aligned}-\Delta\phi &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega\backslash\bar{\omega}, \qquad (20)\\ \phi &= g_0 \ \text{on}\ \Gamma=\partial\Omega, \qquad (21)\\ \phi &= g_1 \ \text{on}\ \gamma=\partial\omega. \qquad (22)\end{aligned}$$

・重み付き残差方程式
Fictitious domain 法による重み付き残差方程式は以下のように表せる.

$$\int_\Omega\nabla\Phi\,\nabla v\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\omega\lambda\ v\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad (23)$$

$$\int_\omega\mu(\Phi-g_1)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0, \qquad (24)$$

$$\Phi=g_0 \ \text{on}\ \Gamma, \qquad (25)$$

ここで, $\Phi|_{\Omega\backslash\bar{\omega}}=\phi$ である.

・解析条件
図 2 に示す解析モデルを扱う. ここで, 領域 $\Omega=(-0.5,0.5)\times(-0.5,0.5)$ であり, 領域 $\omega$ は領域 $\Omega$ の中心に位置し, 半径=0.12 である. また, 境界条件は $g_0=0.0$ , $g_1=1.0$ である.

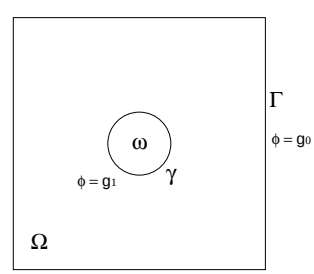



図 2. 解析領域と境界条件


Copyright © 2000 by JSCFD

・有限要素分割図
Fictitious domain 法では図 3, 4 に示すように領域 $\Omega$ と領域 $\omega$ に対する 2 つの有限要素分割図を使用する.

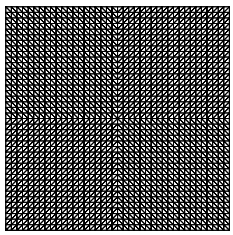


図 3. 有限要素分割

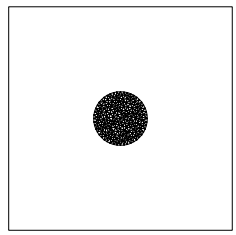


図 4. 有限要素分割

・解析結果

(a) Fictitious domain 法

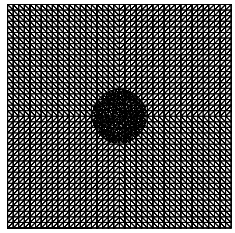


図 5. 有限要素分割

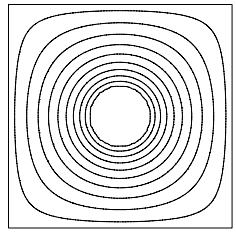


図 6. 解析結果

(b) 従来の有限要素法

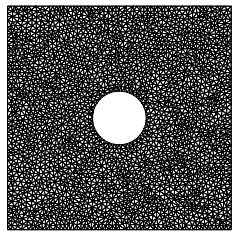


図 7. 有限要素分割

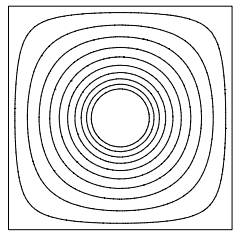


図 8. 解析結果

以上の結果から Fictitius domain 法の適用の有効性があると考えられる.

## 3. Navier-Stokes 方程式

### 3.1 基礎方程式

境界 $\Gamma$ を有する空間領域 $\Omega \subset I\!R^2$ と境界 $\gamma$ を有する空間領域 $\omega \subset I\!R^2$ を定義し, 時間領域 [0,T] を定義する. また, 空間領域 $\omega$ は空間領域 $\Omega$ の中に含まれているとし, 領域 $\Omega\backslash\bar{\omega}$ は 非圧縮粘性流体で満たされているものとする. 非圧縮粘性流れの基礎方程式は, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式であり, 運動方程式と連続式は以下のように表される.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega\backslash\bar{\omega}, \tag{26}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\backslash\bar{\omega}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_1 \quad \text{on} \quad \gamma, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(0) \quad \text{in} \quad \Omega\backslash\bar{\omega}, \tag{30}$$

ここで, $\boldsymbol{u}$ は流速, $\boldsymbol{f}$ は外力, $\boldsymbol{\sigma}$ 応力テンソルを示す. 応力テンソルは, Newton 流体を仮定すると以下のように定義される.

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},\ p) = p\boldsymbol{I} + \mu(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T), \tag{31}$$

ここで, $\boldsymbol{I}$ は単位テンソル, $\mu$ は一定の粘性係数, $p$ は圧力を示す.

### 3.2 離散化手法

時間方向の離散化として中間流速を導入し圧力場と流速場を分離して解くことのできる FS(Fractional Step) 法を用いる. 運動方程式 (26) には Crank-Nicolson 法を適用し, 連続式 (27) は完全陰的に表す. また, 空間方向の離散化に気泡関数要素による混合補間を用いると有限要素方程式は以下のように表せる.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{w}_h\cdot\left\{\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1}-\boldsymbol{u}_h^n}{\Delta t} + \left(\bar{\boldsymbol{u}}_h^n\cdot\nabla\right)\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&+\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \nabla\boldsymbol{w}_h : \left\{-p_h^n\boldsymbol{I} + \nu\left\{\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\right)^T\right\}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&=\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{w}_h\cdot\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma}\boldsymbol{w}_h\cdot\boldsymbol{t}_h\,\mathrm{d}\Gamma,
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \Delta t\nabla q_h\cdot\nabla\left(p_h^{n+1}-p_h^n\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\qquad -\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} q_h\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{w}_h\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{u}_h^{n+1}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{u}}_h^n\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^{n+1}-\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+1}\right)\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&+\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \nabla\boldsymbol{w}_h : \left\{\left(p_h^{n+1}-p_h^n\right)\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\nu\left\{\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}\right)^T\right\}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&=\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{w}_h\cdot\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma}\boldsymbol{w}_h\cdot\boldsymbol{t}_h\,\mathrm{d}\Gamma,
\end{aligned} \tag{34}$$

ここで, 式 (32) と式 (34) に対して Fictitious domain 法を適用すると, それぞれの式に対する有限要素方程式は以下のように表せる.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{W}_h\cdot\left\{\frac{\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+1}-\boldsymbol{U}_h^n}{\Delta t} + \left(\bar{\boldsymbol{U}}_h^n\cdot\nabla\right)\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+\frac{1}{2}}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&+\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \nabla\boldsymbol{W}_h : \left\{-P_h^n\boldsymbol{I} + \nu\left\{\nabla\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(\nabla\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+\frac{1}{2}}\right)^T\right\}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&=\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{W}_h\cdot\boldsymbol{F}_h\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma}\boldsymbol{W}_h\cdot\boldsymbol{t}_h\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\omega}\boldsymbol{W}_h\cdot\lambda_h\mathrm{d}\boldsymbol{x},
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{W}_h\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{U}_h^{n+1}-\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{U}}_h^n\cdot\nabla\left(\boldsymbol{U}_h^{n+1}-\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+1}\right)\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&+\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \nabla\boldsymbol{W}_h : \left\{\left(p_h^{n+1}-p_h^n\right)\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\mu\left\{\nabla\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(\nabla\tilde{\boldsymbol{U}}_h^{n+\frac{1}{2}}\right)^T\right\}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&=\int_{\Omega\backslash\bar{\omega}} \boldsymbol{W}_h\cdot\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma}\boldsymbol{W}_h\cdot\boldsymbol{t}_h\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\omega}\boldsymbol{W}_h\cdot\lambda_h\mathrm{d}\boldsymbol{x},
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\int_{\omega}\mu_h\left(\boldsymbol{U}_h - \boldsymbol{g}_1\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\ , \tag{37}$$

$$\boldsymbol{U}_h = \boldsymbol{g}_0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{38}$$

ここで, $\boldsymbol{U}|_{\Omega\backslash\bar{\omega}} = \boldsymbol{u}$ , $\boldsymbol{F}|_{\Omega\backslash\bar{\omega}} = \boldsymbol{f}$ である.


Copyright © 2000 by JSCFD

### 3.3 数値解析例

数値解析例として図 10 に示すように二次元領域 $\Omega = (-0.35, 0.9) \times (-0.5, 0.5)$ 内を半径 0.12 の円盤剛体が移動した場合の流れ場 ($Re = 200$ , $\Delta t = 0.00125$) の解析を行う．また, 円盤剛体の中心は以下の式で表せる軌道をたどる．

$$x(t) = 0.25\left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), \tag{39}$$

$$y(t) = -0.1\sin\left(\pi\left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\right); \tag{40}$$

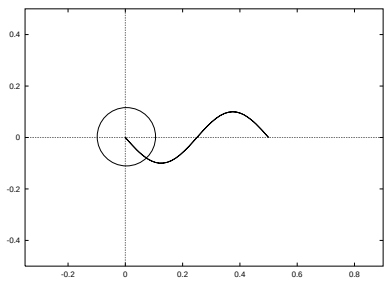



図 9. 円盤剛体の軌道

また, 円盤剛体は図 10 に示すように角速度 $\pi$ で反時計まわりの回転運動を行いながら移動しているとする．

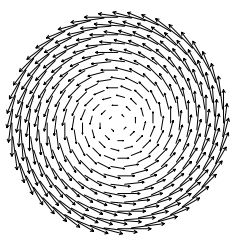
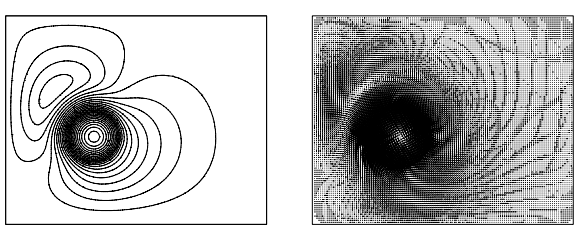


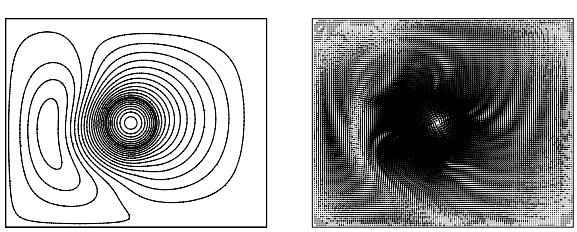
図 10. 円盤内の速度

### 3.4 解析結果

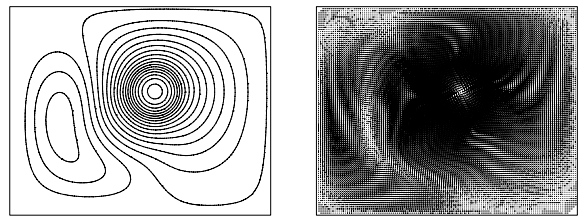
流線と流速ベクトル図を以下に示す．



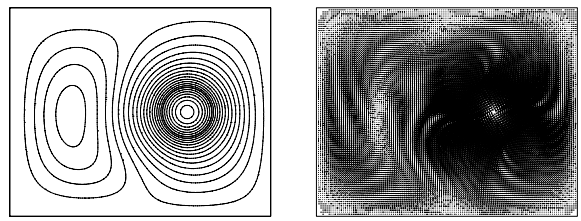
t = 0.50



t = 1.00



t = 1.50



t = 2.00

図 11. 解析結果

## 4. おわりに

本研究では非圧縮粘性流れに対する Fictitious domain 法の適用を検討した．数値解析結果より Fictitiuos domain 法が非圧縮粘性流れに対して適用できることが示された．数値解析例で示すように, Fictitious domain 法においては従来の移動境界手法に見られるような時間ステップ毎の要素再分割を必要とせず, 各時間ステップにおける円盤剛体の座標位置の情報のみで解析を行うことができる．また, 今後の方針としては流体と剛体の連成問題への Fictitious domai 法の適用を検討していく予定である．

## 参考文献

**1,** R. Glowinski, T.W. Pan, J. Périaux, Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151, (1998), pp.181-194.

**2,** R. Glowinski, T.W. Pan, J. Périaux, A Fictitious domain method for Dirichlet problem and applications, Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, 111, (1994), pp.283-303.

**3,** R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, J. Périaux, A Distributed Lagrange Multiplier / Fictitious Domain Method for Flows around Moving Rigid Bodies: Application to Particulate Flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 30, (1999), pp.1043-1066

**4,** R. Glowinski, T.W. Pan, A.J. Kearsley, J. Périaux, Numerical Simulation and Optimal Shape for Viscous Flow by a Fictitious Domain Method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 20, (1995), pp.695-711.

**5,** Daniel D. Joseph, Interrogations of Direct Numerical Simulation of Solid–Liquid Flow

**6,** H. Kawarada, H. Suito, Numerical Method for a Free Surface Flow on the Basis of the fictitious Domain Method, East–West J. Numer. Math., Vol.5, No.1, pp.57-66, (1997).



Copyright © 2000 by JSCFD