任意曲面に沿う薄層流の水深積分モデルとその応用

Depth averaged model of open channel flows over an arbitrary surface

細田　尚，京大院・工・土木，〒606-8501 京都市左京区吉田本町, hosoda@riv.kuciv.kyoto-u.ac.jp
HOSODA, Takashi, Dept. of Civil Eng., Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan

A depth averaged model of open channel flows over an arbitrary 3-D surface was derived in a generalized curvilinear coordinate system. A model can be applied to design hydraulic facilities such as a water slider, a manmade-cascade, etc. The $\xi-\eta$ axes are set on an surface of objectives as the body fitted coordinates and the ζ axis is determined to be at right angles to an surface. The depth averaged continuity and momentum equations are derived by integrating the equations in the body fitted coordinates from the body surface to water surface. The analysis of flow over a circle cylinder is shown as a simple application of model.

１．はじめに

本研究は，一般座標系での任意曲面に沿う開水路流れの平面２次元モデルを導くとともに，単純な流れ場を対象にその適用例を示したものである．

ウォーター・スライダーなどレジャー施設で利用されている流れ，景観創出のための人工滝や渓流，地下水路系での洪水の鉛直落下施設などは，複雑な曲面上の開水路流れの例であり，基準平面を設定する従来の水深積分モデルでは解析が容易でないと考えられる．そこで本研究では，対象とする任意曲面上に一般曲線座標系を設定し，その座標系に直交する方向に３次元の連続式と運動方程式を積分することにより，任意曲面上の開水路流れの平面２次元モデルを導く. さらに, 導かれた基礎式系の簡単な応用例として, 円柱表面上の流れを取り上げ, 定式化と解析の手順を示した.

２．基礎式

Fig.1 に示すように任意の曲面上にξ,η 座標系を設定する．（ξ,η 座標は一般曲線座標となる.）また, 曲面に直交するようにζ 座標をとる．ζ 座標は直線とする.

(1)　連続式の水深積分

３次元空間でのレイノルズ平均された連続式は流速ベクトルの反変成分で表示すれば次式となる.

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{U}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{V}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{W}{J}\right)=0 \qquad (1)$$

ここに，(U,V,W):流速ベクトルの反変成分，J :座標変換のヤコビアン.

上式をζ 方向に積分し, 自由水面の運動学的条件を用いると式(2)が得られる.

$$W_s=\frac{\partial h}{\partial t}+U_s\frac{\partial h}{\partial\xi}+V_s\frac{\partial h}{\partial\eta} \qquad (2)$$

このとき，簡単のため座標変換のヤコビアン J を$\zeta=0$での値 J_0 で近似するとともに，U,V がζ 方向に一定と仮定した.

$$\frac{1}{J_0}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\hat{M}}{J_0}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\hat{N}}{J_0}=0 \qquad (3)$$

ここに，$\hat{M}\equiv Uh,\hat{N}\equiv Vh$，$h$:水深.

(2)　運動方程式の水深積分

同様にξ 方向運動方程式の水深積分は次式となる. ただし, 本研究では応力項を無視して表示している.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hat{M}}{J_0}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{U\hat{M}}{J_0}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{V\hat{M}}{J_0}\right)$$

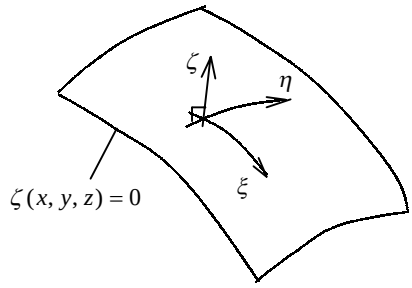

Fig.1 Coordinates on a 3-D surface

$$+\frac{1}{J_0h}\left(\hat{M}^2\Gamma_{0\xi\xi}^{\xi}+\hat{M}\hat{N}\Gamma_{0\xi\eta}^{\xi}+\hat{N}\hat{M}\Gamma_{0\eta\xi}^{\xi}+\hat{N}^2\Gamma_{0\eta\eta}^{\xi}\right)$$
$$=\frac{h}{J_0}G^{\xi}-\frac{1}{J_0}\left(\xi_{x_0}{}^2+\xi_{y_0}{}^2+\xi_{z_0}{}^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^h\frac{p}{\rho}d\zeta \qquad (4)$$
$$-\frac{1}{J_0}\left(\xi_{x_0}\eta_{x_0}+\xi_{y_0}\eta_{y_0}+\xi_{z_0}\eta_{z_0}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^h\frac{p}{\rho}d\zeta-\frac{\tau_b{}^{\xi}}{\rho J_0}$$

ここに，Γ_{jk}^{i}:クリストッフェル･シンボル，$\tau_b{}^{\xi}$:曲面上の応力ベクトルのξ 方向成分，G^{ξ}:重力加速度ベクトルの反変成分.

次に, 圧力分布とその水深積分を計算する．ζ 方向の運動方程式において本研究では簡単のため加速度項と応力項を無視すると次のようになる．ただし，これまでと同様，計量は$\zeta=0$の値で近似する.

$$\frac{1}{J_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{p}{\rho}+\frac{1}{J_0}\left(UU\Gamma_{0\xi\xi}^{\zeta}+VU\Gamma_{0\eta\xi}^{\zeta}+UV\Gamma_{0\xi\eta}^{\zeta}+VV\Gamma_{0\eta\eta}^{\zeta}\right)$$
$$=\frac{G^{\zeta}}{J_0} \qquad (5)$$

上式を積分して圧力分布を求めれば次のようになる.

$$\frac{p}{\rho}=\left(UU\Gamma_{0\xi\xi}^{\zeta}+VU\Gamma_{0\eta\xi}^{\zeta}+UV\Gamma_{0\xi\eta}^{\zeta}+VV\Gamma_{0\eta\eta}^{\zeta}\right)(h-\zeta)$$
$$-G^{\zeta}(h-\zeta) \qquad (6)$$

上式より, 運動方程式中に現れる圧力の水深積分は次式となる.

$$\int_0^h\frac{p}{\rho}d\zeta=\left(UU\Gamma_{0\xi\xi}^{\zeta}+VU\Gamma_{0\eta\xi}^{\zeta}+UV\Gamma_{0\xi\eta}^{\zeta}+VV\Gamma_{0\eta\eta}^{\zeta}\right)\frac{h^2}{2}-G^{\zeta}\frac{h^2}{2} \qquad (7)$$

３．簡単な解析例－円柱上の流れの水面形解析

これまで説明してきた任意曲面上の開水路流れの水深積分モデルを用いた簡単な応用例として，定常状態での円柱曲面上の流れの水面形解析を考える．

３．１　座標系の設定

簡単のためη方向に一様の流れを考える．座標系の設定をFig.2に示す.ξ座標とθの関係を

$$\xi = R \cdot \theta$$

とすると，直角座標と一般座標の関係は次式で与えられる．

$$x = (R+\zeta)\sin\left(\frac{\xi}{R}\right), y = \eta, z = (R+\zeta)\cos\left(\frac{\xi}{R}\right) \tag{8}$$

３．２　水面形解析

（１）水面形方程式

$V = 0, \partial / \partial \eta = 0$ より連続式は次のようになる．

$$\frac{\hat{M}}{J_0} = \hat{M} = \hat{M}_0 = 一定 \tag{9}$$

式(4)を式(9)を用いて水面形方程式に書き換えれば次式となる．

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{gh\sin\left(\frac{\xi}{R}\right)\left(1+\frac{h}{2R}\right) - f\frac{\hat{M}_0{}^2}{h^2}}{gh\cos\left(\frac{\xi}{R}\right) - \frac{\hat{M}_0{}^2}{h^2}} \tag{10}$$

（２）特異点の位置と水深

特異点の位置ξ_Sと水深h_Sは式(27)中の分母=0 で与えられる限界水深と，分子=0 で定義される擬似等流水深の交点として与えられる．

$$g^2 h_S{}^6 = \hat{M}_0{}^4 \left\{ \frac{f^2}{(1+h_S/2R)^2} + 1 \right\} \tag{11}$$

$$\tan\left(\frac{\xi_S}{R}\right) = \frac{f}{1+h_S/(2R)} \tag{12}$$

（３）特異点の分類と水面勾配

式(10)を特異点周りで展開し線形化すると次のようになる．

$$h = h_S + h', \xi = \xi_S + \xi'$$

$$\frac{dh'}{d\xi'} = \frac{a(h'/h_S) + b(\xi'/h_S)}{c(h'/h_S) + d(\xi'/h_S)} \tag{13}$$

$$a = f\frac{3+2(h_S/R)}{1+(h_S/2R)}, b = \frac{h_S}{R},$$

$$c = 3, d = -f\frac{h_S/R}{1+(h_S/2R)}$$

上式より特異点は鞍形点に分類される．また，特異点での水面勾配は次式で与えられ，複合中の－の勾配の水面形が実現する[1)]．

$$\left.\frac{dh'}{d\xi'}\right|_{\zeta=0} = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \tag{14}$$

（４）計算結果

摩擦係数$f = 0.005$,半径$R = 1(m), \hat{M}_0 = 0.3(m^2/s)$とした水面形解析結果をFig.3に示した．図中には擬似等流水深と限界水深も示してある．

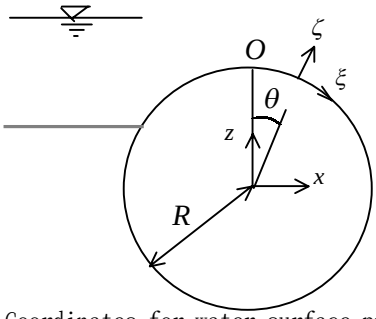

Fig.2 Coordinates for water surface profile analysis

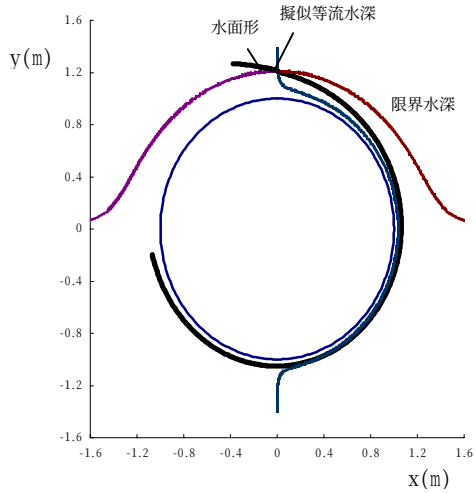

Fig.2 Free surface profile over a circle sylinder

円柱のほとんど頂点で特異点が現れ,特異点を過ぎた後円柱に沿って水深が減少し,次に擬似等流水深と交差した後増加していく．

円柱の最下点を通過しても流れは円柱に沿って流れつづけるが，どの位置で円柱から離れるかを予測するのは本研究のモデルの範囲では困難である．すなわち，流れが円柱から離れて自由落下する条件として，流速分布形が変化し曲面上の流速が局所的に０になる（逆流する直前の状態）ことが考えられるが，本研究では非回転条件などを考慮した流速分布形の変化過程を考慮していない．そのさい，流れと水面形の急激な変化が生じるため，ζ方向の加速度項を考慮する必要性も生じよう．今後，このような高次理論の展開や水理実験による検討など詳細な考察が必要と考えられる．

参考文献

(1) 細田　尚：開水路流れにおける特異点近傍の水面形の時間的安定性，土木学会論文集 No.607/Ⅱ-45, 79-83, 1998.