ALE並列有限要素法による自由表面流れの非線形解析

Non-linear Analysis of Free Surface Flows by ALE Parallel Finite Element Method

○田中聖三 ,中央大学大学院理工学研究科, 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27,Email: taizo@civil.chuo-u.ac.jp
桜庭雅明, 日本工営株式会社 首都圏事業部 情報システム部 〒102-8539 東京都千代田区麹町5丁目4番地
Email: a4590@n-koei.co.jp
樫山和男, 中央大学理工学部, 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27,Email: kaz@civil.chuo-u.ac.jp

Seizo TANAKA,Dept.of Civil Eng.,Chuo Univ.,Kasuga 1-13-27,Bunkyo-ku,Tokyo,112-8551 Japan
Masaaki SAKURABA,Nippon Koei Co.,Ltd., Kojimachi 5-4, Chiyoda-ku, Tokyo,102-8539 Japan
Kazuo KASHIYAMA,Dept.of Civil Eng.,Chuo Univ.,Kasuga 1-13-27,Bunkyo-ku,Tokyo,112-8551 Japan

This paper presents an ALE parallel finite element method for the non-linear analysis of free surface flows. The stabilization methods based on SUPG and PSPG methods are used. The coupled non-linear finite element equation systems are linearlized by the Newton-Raphson iteration method and the GMRES method based on the matrix-free is used to solve the linear equation systems. The present method is applied to the three dimensional sloshing problem in a rectangular tank and an actual dam.

1. はじめに

自由表面流れは移動境界問題の1つであり，その時々刻々と変化する界面の複雑な挙動を捉えることは，工学上，非常に重要な問題である．河川構造物やダム堤体などその影響を受ける構造物に作用する流体力を定量的に評価するためには，流況及び自由表面形状を正確に捉える必要がある．自由表面流れの数値解析手法として，これまでに数多くの手法が提案されているが，ALE表記によるNavier-Stokes方程式を基礎方程式として用いた界面追跡法[1)2)]は，この問題に対する有効的な手法の1つである．しかしながら，その基礎方程式の離散化過程で導かれる方程式系は，非線形の連立方程式であり，流体挙動を正確に把握するためには，非線形解析を高精度かつ安定に行う必要がある．

そこで本論文は，非圧縮性粘性流れの非線形自由表面流れ解析を高精度かつ安定に計算可能なALE並列有限要素法を提案するものである．安定化手法としてSUPG/PSPG法[3)]を用い，Newton-Raphson法により導かれた連立1次方程式の解法には，Matrix-free法に基づくGMRES法[4)5)]を用いる．また，並列計算手法として領域分割法に基づく方法を用いる．数値解析例として，矩形貯槽内スロッシング解析を取り上げ，実験値と比較することで本手法の精度及び有効性について検討する．また，実問題への適用として地震動によるダム湖の水面応答解析を取り上げる．

2. 数値解析手法

2.1. 基礎方程式

ALE表記による非圧縮粘性流体の運動方程式と連続の式はそれぞれ式(1),(2)で表される：

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{f}\right)-\nabla\cdot\sigma=0 \quad in\ \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \quad in\ \Omega, \tag{2}$$

$\mathbf{u}$は流速，$\bar{\mathbf{u}}$は相対流速，ρは密度，$\mathbf{f}$は物体力を表している．ここで，応力テンソルσ は以下の式で表される：

$$\sigma=-p\mathbf{I}+2\mu\varepsilon(\mathbf{u}), \tag{3}$$

$$\varepsilon(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T\right), \tag{4}$$

pは圧力，μは粘性係数である．

また，Dirichret型，Neumann型境界条件は，次のように与えられる：

$$\mathbf{u}=\mathbf{g} \quad on\ \Gamma_g, \tag{5}$$

$$\mathbf{n}\cdot\sigma=\mathbf{h} \quad on\ \Gamma_h, \tag{6}$$

ここで，$\mathbf{g}$,$\mathbf{h}$はそれぞれ流速，トラクションの既知量を示し，$\mathbf{n}$は外向き単位法線ベクトルを示す．

2.2. 安定化有限要素法

基礎方程式(1),(2)に対して，安定化有限要素法(SUPG/PSPG法)を適用すると，以下の弱形式が得られる：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{w}\cdot\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{f}\right)d\Omega \\
&+\int_\Omega\varepsilon(\mathbf{w}):\sigma\,d\Omega+\int_\Omega q\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\Omega \\
&+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega^e}\tau_m\left\{\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{w}+\frac{1}{\rho}\nabla q\right\} \\
&\cdot\left\{\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{f}\right)-\nabla\cdot\sigma\right\}d\Omega \\
&+\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega^e}\tau_c\nabla\cdot\mathbf{w}\rho\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\Omega=\int_{\Gamma_h}\mathbf{w}\cdot\mathbf{h}\,d\Gamma,
\end{aligned} \tag{7}$$

安定化パラメータτ_m，τ_cは以下のように定義される[6)]：

$$\tau_m=\left[\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{2||\mathbf{u}||}{h_e}\right)^2+\left(\frac{4\nu}{h_e^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

$$\tau_c=\frac{h}{2}||\mathbf{u}||\xi\left(Re_e\right). \tag{9}$$

式 (7) に対して，P1/P1 要素を用いて補間を行うと次のような有限要素方程式を得る：

$$(\mathbf{M}+\mathbf{M}_\delta)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}})+\mathbf{K}_\delta(\bar{\mathbf{u}}))\,\mathbf{u} -(\mathbf{C}-\mathbf{C}_\delta)\frac{1}{\rho}\ p\ +\nu\mathbf{S}\mathbf{u}-(\mathbf{N}+\mathbf{N}_\delta)\,\mathbf{f}=0, \quad (10)$$

$$\mathbf{C}^T\mathbf{u}+\mathbf{M}_\varepsilon\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{K}_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{u} -\mathbf{N}_\varepsilon\mathbf{f}+\mathbf{C}_\varepsilon\frac{1}{\rho}p=0, \quad (11)$$

ここで，$\mathbf{M},\mathbf{K},\mathbf{C},\mathbf{S},\mathbf{N}$ は，係数行列であり，添字δ,εは，それぞれSUPG 項，PSPG 項に起因するものを表わす．時間方向の離散化において，時間微分$\partial\mathbf{u}/\partial t$は次のように表される：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}=\frac{\mathbf{u}_{n+1}-\mathbf{u}_n}{\Delta t}, \quad (12)$$

ここで，Δtは時刻レベルnと$n+1$間の時間ステップサイズである．この時間の離散化において，流速$\mathbf{u}$，および圧力pは以下のように与えられる：

$$\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}_{n+1}+(1-\alpha)\mathbf{u}_n, \quad (13)$$

$$p=p_{n+1}, \quad (14)$$

ここに，αは時間積分の安定性と精度をコントロールするパラメータであり，ここでは，2 次精度を有する$\alpha=0.5$を選択する．ただし，連続式は陰的に取り扱う．

2.3. 反復解法

非線形の方程式系 (10)，(11) は，次式のような連立方程式で表すことができる：

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1})=0 \quad (15)$$

ここで，$\mathbf{d}_{n+1}$は，時刻レベル$n+1$での未知節点量（$\mathbf{u}$，p）である．式 (15) に対してNewton-Raphson 法を適用すると次式のような線形方程式が得られる：

$$\mathbf{J}^k_{n+1}(\Delta\mathbf{d}^k_{n+1})=-\mathbf{R}(\mathbf{d}^k_{n+1}), \quad (16)$$

$$\mathbf{J}^k_{n+1}=\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{d}^k}, \quad (17)$$

ここに，kはNewton-Raphson の繰り返し回数を表し，$\Delta\mathbf{d}^k_{n+1}$は，$\mathbf{d}^k_{n+1}$に対する増分を表す．式 (16) で表される線形方程式は，各時間ステップにおいて収束するまで繰り返すことにより解かれる．この連立１次方程式の解法として，Matrix-Free 法に基づく GMRES 法を用いる．

2.4. 要素再分割

ALE 法は，移動境界と物質粒子の相対的な速度を考慮し，解析領域を更新することで物体の形状を表現できることに特徴がある．3 次元問題において自由表面位置$z=H(x,y,t)$は，運動学的条件により以下のように求められる．

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\bar{u}_s\frac{n_1}{n_3}+\bar{v}_s\frac{n_2}{n_3}+w_s \quad (18)$$

添字sは，自由表面での物理量を意味し，n_iは外向き単位法線ベクトルの各成分である．自由表面上では，力学的条件として，stress-free 条件が適用される．

本手法では，時間ステップ間における移動境界上での節点鉛直変位量を境界値として領域内の節点に関するLaplace 方程式を解くことにより，全節点の位置を求める方法を用いている．

$$\nabla\cdot\phi=0 \quad (19)$$

$$\phi=\Delta H \quad on\ \Gamma_m \quad (20)$$

$$\phi=0 \quad on\ \Gamma_f \quad (21)$$

ここで，ϕは，節点鉛直変位量であり，Γ_m,Γ_fはそれぞれ移動境界，固定境界を表わす．また，ΔHは，時間ステップにおける自由表面位置の増分である．式 (19) の解法として，Element–by–Element SCG 法を用いる．

2.5. 並列計算手法

本研究における並列計算手法として，分散メモリー型並列計算機を対象とした領域分割法に基づく手法を採用する．領域分割法に基づく並列計算では，各プロセッサは自らに割り当てられた部分領域のみのデータしか持っておらず，解析領域全体から見ると，計算を行うためには不完全である．そこで，その不足分を補うために各プロセッサ間で通信を行い，データを補完する必要がある．本解析手法において必要な通信は，要素ごとのベクトルを全体系のベクトルに重ね合わせる際に必要となる隣接するプロセッサ間での通信と，部分領域でのベクトルの内積計算を全体領域で完成させるために必要な全プロセッサ間での通信の 2 種類である．これらの通信を行う通信ライブラリには，機種依存性の少ないMPI(Message Passing Interface) を用いる．通信方法の詳細に関しては，参考文献[7)]を参照されたい．

3. 数値解析例

3.1. 矩形貯槽内スロッシング解析

本手法の計算精度を比較検討するため，数値解析例として 3 次元矩形貯槽内スロッシング解析を取り上げる．解析条件は**Fig.1**のような幅$1.0[m]$, 奥行$0.1[m]$, 高さ$1.0[m]$の貯水槽に 50 %貯まった流体に式 (22) で表わされる水平加速度を与える．振幅 A は$0.0093[m]$，角速度ωは$5.311[rad/s]$である：

$$f=A\omega^2\sin\omega t. \quad (22)$$

流体は水とするため密度ρおよび動粘性係数νはそれぞれ，$1.0\times10^3[kg/m^3]$，$1.0\times10^{-6}[m^2/s]$となる．境界条件は壁面で$slip$条件を与えた．有限要素として四面体要素を用いる．なお，要素再分割は毎時間ステップごとに全要素に対して行っている．

Fig.2に貯槽内左壁における水位の時刻歴を示す．この図より，解析結果は実験値[1)]と良い一致を示しており，本手法のまた**Fig.3**に示す，各時刻における流体領域形状も安定によく捉えることができている．以上の結果より，本手法の有効性を確認することができた．

3.2. 並列化性能評価

本並列計算手法の大規模問題への有効性を検討するため，先の矩形貯槽内スロッシング解析において総節点数:

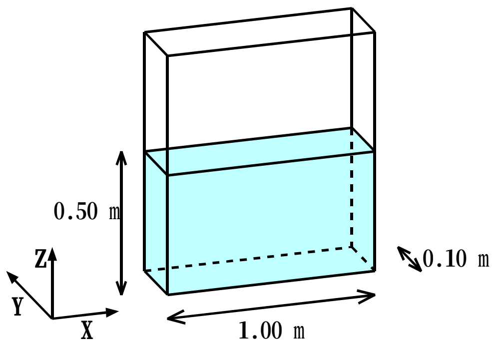

Fig.1 Numerical model of rectangular tank

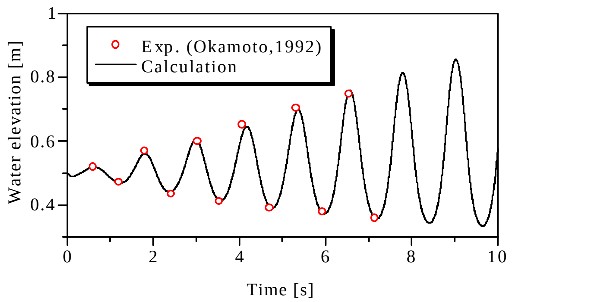

Fig.2 Time history of the water elevation at the left hand-side wall

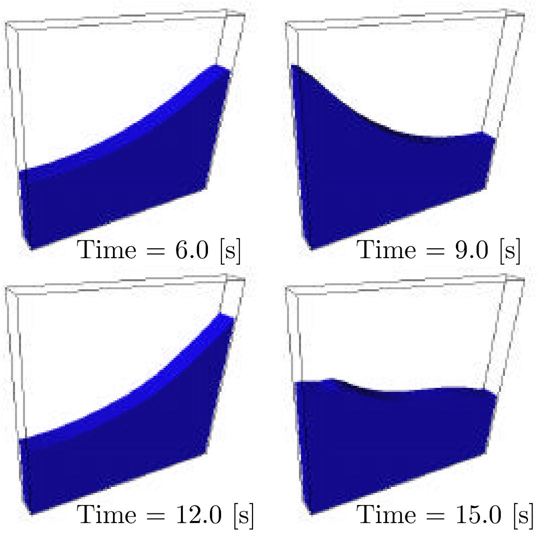

Fig.3 Computed fluid motion

Table1 Specification of parallel computer

PC cluster parallel computer	
CPU	Pentium III
Clock cycle	600MHz
Cache size	512KB
Memory size	512MB
O.S.	Linux-2.0.34
Network	100Base-Tx

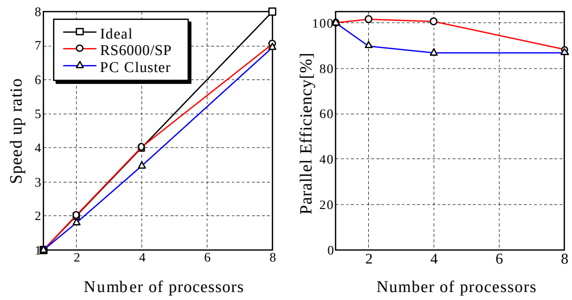

Fig.4 Parallel performance

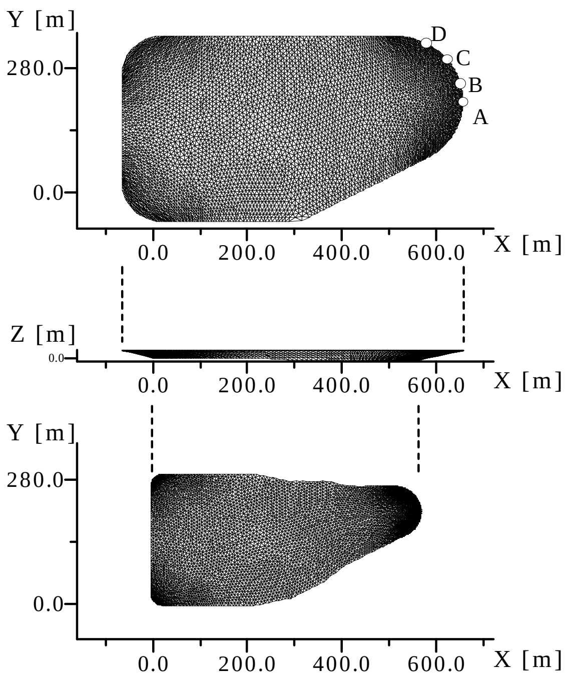

Fig.5 Numerical model of actual dam

29,889，総要素数：153,600 の要素分割を用いて並列化性能評価を行った．並列計算機として，商用並列計算機である IBM RS6000/SP(Power 3) と 8 台の PC(Personal Computer) を Ehternet で接続した PC クラスター型並列計算機[8]を用いる．PC クラスター型並列計算機の仕様を Table.1に示す．並列化性能評価として演算速度倍率と並列化効率を Fig.4に示すが，ここで演算速度倍率は，プロセッサを 1 台使用した場合に対する倍率であり，並列化効率は演算速度倍率が理想倍率と等しくなる場合を 100%としている．この図より，高性能な並列計算が実現されていることがわかる．

3.3. 地震動によるダム湖の水面応答解析

本解析手法の実問題への適用として，ロックフィルダムの地震動による水面応答解析を取り上げる．解析モデルとして，Fig.5のような段差を有する底面と勾配約 1:2.5 の斜面を有する 3 次元領域を考える．初期水位は底面より 29.0m とし，26.0m 以上の斜面は鉛直壁として取り扱う．有限要素には四面体要素を用い，総節点数:44485，総要素数:221040 となっている． 境界条件として，底面および斜面では $non-slip$ 条件，鉛直壁では $free-slip$ 条件を課す．加振条件としては，地震波応答解析により得られたダム外壁の X 方向水平移動速度（Fig.6）を用いる．地震波応答解析については，参

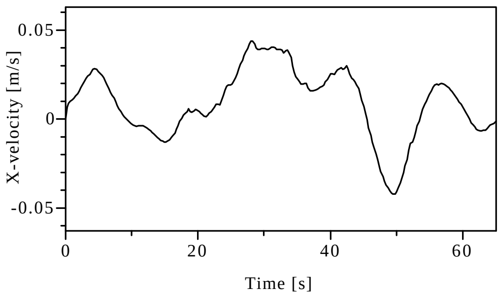

Fig.6 Input horizontal velocity data

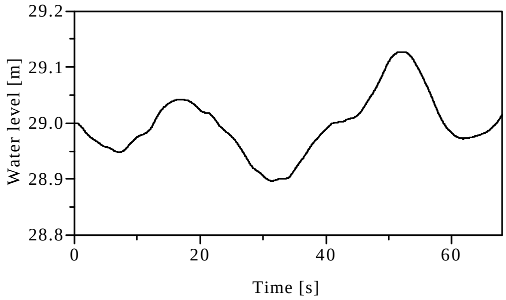

Fig.7 Time history of water elevation at point A

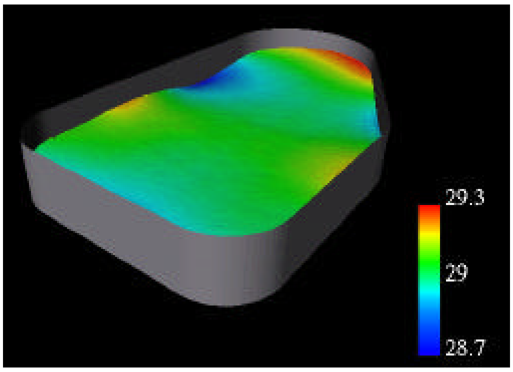

Fig.8 Computed configuration of free surface

考文献[9]に詳しい．

Fig.5に示すA〜Dの水位計測点で最も水位変動量の大きかったA点での水位の時刻歴をFig.7に示す．また，Fig.8に時刻T=50.0[s]でのZスケールを100倍した水面形状を示す．ここで，図中のカラーバーは水位を表す．この結果より，地震動により励起された水面応答を捉えることができていることがわかる．

4. 下流側流出境界条件

数値解析において，解析領域は有限なものであり，その領域境界には境界条件として何らかの物理量を課す必要がある．河川などのような連続した物理領域を解析対象とする場合，解析領域は物理的に連続した領域を有限な領域に区切ったものとなり，その下流側には流出境界条件が必要となる．しかし，下流側流出境界での物理量は基本的に未知量であるため，境界条件を与えることは通常困難であり，様々な議論がなされている[10]．その中でも，Papanastasiouらにより提案されたFree Boundary Conditon[11]は，自由表面流れにおいても機能する有効的な流出境界条件の1つである[12]．

Free Boundary Conditionでは，通常既知量として取り扱われる式(7)の右辺境界積分項を，未知量として左辺に移項することで，流出境界条件を必要としないとしている．現在，本解析手法におけるこの流出境界条件を構築中であり，今後の課題とさせていただく．

5. 結論

本論文では，非圧縮粘性流れの非線形自由表面流れ解析を高精度かつ安定に計算可能なALE並列有限要素法を提案した．数値解析例として矩形貯槽内スロッシング解析を行い，本解析手法の計算精度及び有効性を検討した．また，実問題への適用として，地震動によるダム湖の水面応答解析を取り上げた．その結果，以下の結論が得られた．

- 矩形貯槽内スロッシング解析において実験値と良い一致を示しており，計算精度と安定性の観点から本手法の有効性が確認できた．
- 並列化性能評価において，高い並列化効率を得ており，本手法の大規模問題への有効性が確認できた．
- ダム湖の水面応答解析において，地震動により励起される水面応答を捉えることができ，実問題への有効性が確認できた．

今後の課題として，河川構造物周りの流れ解析のような，流出境界の存在する解析領域への本手法の適用が挙げられる．

参考文献

1) T. Okamoto, M. Kawahara : Tow-dimensional sloshing analysis by the Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods, *Proceeding of JSCE*, **441**, I-18, pp39-48, 1992.
2) T.Nomura :ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems :*Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering* : **112** :pp291-308 :1994
3) T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih :'Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements' :*Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering* :**95** :pp221-242 :1992.
4) Z. Johan, T.J.R. Hughes, K.K. Mathur and S.L. Johansson :'A data parallel finite element method for computational fluid dynamics on the Connection Machine system' :*Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering* :**99** :pp113-134 :1992.
5) M. Behr, T.E. Tezduyar :'Finite element solution strategies for large-scale flow simulations' :*Compter Methods in Applied Mechanics and Engineering* :**112** :pp3-24 :1994.
6) I.Guler, M.Behr and T.E.Tezduyar :'Parallel Finite Element Computation of Free-Surface Flows' :*Computational Mechanics* :**23** :pp117-123 :1999.
7) 桜庭雅明，田中聖三，玉城宏幸，樫山和男: 大規模自由表面流れ解析のためのALE並列有限要素法:応用力学論文集:**2**:pp233-240:1999.
8) 須江克章，桜庭雅明，樫山和男: PCクラスターを用いた自作並列計算機の構築とその有効性の検討:計算工学講演論文集:**4**:pp389-392:1999.
9) 原田隆典，大角恒雄，奥倉英世: 3次元直交座標系における波動場の解析解とその地震波形作成への応用:土木学会論文集 No.612/I-46:pp99-108:1999.
10) R.L.Sani,P.M.Gresho:Resume and Remarks on the Open Boundary Condition Minisymposium:*Int. J. Numer. Metods in Fluid*:**18**:pp983-1008:1994.
11) T.C.Papanastasiou,N.Malamataris and K.Ellwood:A New Outflow Boundary Condition:*Int. J. Numer. Metods in Fluid*:**14**:pp587-608:1992.
12) N.Malamataris,T.C.Papanastasiou :Unsteady Free Surface Flows on Truncated Domains:*Ind. Eng. Chem. Res.*:**30**:pp2211-2219:1991.