相対運動する物体群を含む流れ場に対する接合格子を用いた格子ボルツマン法

Lattice Boltzmann Method using Multiple Grid System for Flow Fields Including Objects with Relative Motion

○ 和田 周平, 大阪大学 大学院 工学研究科, 〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1, E-mail：wada@fluid.mech.eng.osaka-u.ac.jp
日置 潤, 大阪大学 大学院 工学研究科, 〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1, E-mail：hioki@fluid.mech.eng.osaka-u.ac.jp
梶島 岳夫, 大阪大学 大学院 工学研究科, 〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1, E-mail：kajisima@mech.eng.osaka-u.ac.jp
Shuhei WADA, Jyun HIOKI, Takeo KAJISIMA
Dept. Mech. Eng., Osaka Univ., Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871

Lattice Boltzmann method is applied to the flow field including objects with relative motion. We developed a multi-block method in this work. Namely, each block has a grid moving with object in it and blocks are connected by the sliding boundaries. In each block, the merit of LBM is maintained and the conservative properties are hold at the boundaries. First, our result for a moving rectangle in a stationary background did not show any unrealistic solution. Next, we confirmed a non-oscillatory solution in the flow field between two rectangle bodies moving with different velocity. The current result suggests our method could successively expand the applicability of LBM for multi-bodies problem.

1. 緒言

格子 Boltzmann 法は流体を多数の仮想的な粒子の集合として捉え，粒子の運動を逐次計算することで流体運動の解析を行う数値計算法であり，並列計算機に適している計算法であることのほかに，複雑な流れ場にも広範に適用できる流れの数値計算法として注目されている [(1)–(3)]．固体境界が格子に一致しない場合や境界が格子間を移動する場合の計算例も数多く見られるが，現状では，解像度不足に起因する精度の低下は避けがたく，高解像度を要する乱流への適用には不安がある [(4)]．これに対して，不等間隔格子を用いたり，最近では差分格子 Boltzmann 法などの提案もあるが，元々の格子 Boltzmann 法の特長はいくらか損なわれる．

本研究の目的は，例えばターボ機械における動翼と静翼など，相対運動する物体群のまわりの流れに格子 Boltzmann 法を適用することを想定し，接合格子法による精度や解像度の改善を検討することである．

格子 Boltzmann 法は，正方形格子や正三角形格子，あるいは立方体格子といった規則的な格子で流れ場を離散化するため，移動物体の問題を解く場合，境界条件の設定が非常に困難であり，また物体境界が格子点を横切る際の振動現象等が原因となる精度の低下は免れない．本研究では，単一格子上で移動物体を直接計算するのではなく，相対運動する物体ごとに格子を設定する方法によって高精度化と境界条件の簡略化を図ることを考える．そこで，静止物体と移動物体にそれぞれ格子を設定し，静止物体側を静止物体から見た流れ場（絶対系）とし，移動物体側を移動物体から見た流れ場（相対系）として別々に計算を行い，二つの領域を移動境界条件によって接合することによって相対的に移動する物体周りの流れ場を扱うための接合格子法を提案し，単一格子による結果と比較してその有用性と精度を検証する．

2. 基礎方程式

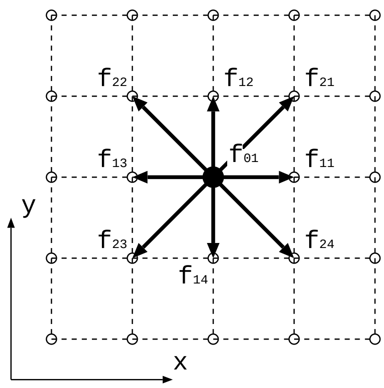

Fig. 1: Square grid 9-speed model for 2-dimensional flows

格子 Boltzmann 法では，流れ場は規則的な格子によって一様に離散化される．本研究では Fig.1 に示す一様等間隔な二次元正方格子を用い，9 速度モデルとする．それぞれの格子点には次の三種類の粒子が存在する．

0：静止している粒子（1 個）

$$\boldsymbol{e}_{01} = 0 \tag{1}$$

1：鉛直 · 水平方向を速度 $|\boldsymbol{e}_{1i}| = 1$ で動く粒子（4 個）

$$\boldsymbol{e}_{1i} = \left(\cos\frac{i-1}{2}\pi\ ,\ \sin\frac{i-1}{2}\pi\right) \quad i = 1,\cdots,\ 4 \tag{2}$$

2：対角線方向を速度 $|\boldsymbol{e}_{2i}| = \sqrt{2}$ で動く粒子（4 個）

$$\boldsymbol{e}_{2i} = \left\{\cos\left(\frac{i-1}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right)\ ,\ \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$i = 1, \cdots, 4 \quad (3)$$

速度 $\boldsymbol{e}_{\sigma i}$ で運動する粒子の速度分布関数 $f_{\sigma i}$ の時間発展式は Boltzmann 方程式を緩和時間近似して得られる次式で表される．衝突過程において速度分布関数は以下の様に変化する．

$$f_{\sigma i}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_{\sigma i}\Delta t, t + \Delta t) = f_{\sigma i}(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{\tau}\left[f_{\sigma i}(\boldsymbol{x}, t) - f_{\sigma i}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t)\right] \quad (4)$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル，Δt は時間刻み，τ は緩和時間，$f_{\sigma i}^{(0)}$ は局所平衡分布関数であり，緩和時間 τ は速度分布関数 $f_{\sigma i}$ が局所平衡分布関数 $f_{\sigma i}^{(0)}$ に近づく割合を示す．

各格子点上での密度 ρ，巨視的速度 $\boldsymbol{u}$ はそれぞれ速度分布関数 $f_{\sigma i}$ を用いて次のように求められる．

$$\rho = \sum_{\sigma, i} f_{\sigma i} \quad (5)$$

$$\rho \boldsymbol{u} = \sum_{\sigma, i} f_{\sigma i} \boldsymbol{e}_{\sigma i} \quad (6)$$

本研究では次のような平衡分布関数を用いた．

$$f_{01}^{(0)} = \rho\alpha\left[1 - \frac{3}{2}\boldsymbol{u}^2\right] \quad (7)$$

$$f_{1i}^{(0)} = \rho\beta\left[1 + 3(\boldsymbol{e}_{1i} \cdot \boldsymbol{u}) + \frac{9}{2}(\boldsymbol{e}_{1i} \cdot \boldsymbol{u})^2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{u}^2\right] \quad (8)$$

$$f_{2i}^{(0)} = \frac{\rho\beta}{4}\left[1 + 3(\boldsymbol{e}_{2i} \cdot \boldsymbol{u}) + \frac{9}{2}(\boldsymbol{e}_{2i} \cdot \boldsymbol{u})^2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{u}^2\right] \quad (9)$$

緩和時間 τ は動粘性係数 ν を用いて次式で表わされる．

$$\tau = \frac{6\nu + 1}{2} \quad (10)$$

動粘性係数 ν は代表速度 U，代表長さ L，流れ場の Reynolds 数 Re を設定すれば次式で求められる．

$$\nu = \frac{UL}{Re} \quad (11)$$

また格子 Boltzmann 法において圧力は以下のように表わされる．

$$p(\boldsymbol{x}, t) = c_s^2 \rho(\boldsymbol{x}, t) \quad (12)$$

ただし c_s は音速でこのモデルでは $c_s = 1/3$ と表わされるが，本稿では式 (12) で求めた圧力を平均値が 0 になるように値を変更して用いている．

尚，本研究では，ある格子点の速度分布関数はその格子点を含む一定の領域に一様に分布しており，その領域の分布関数の総和であるという考え方に基づいて，任意点での分布関数を特に内挿などを行なわずに求めることにする．この考え方により，ある二点 $x_a(i, j)$，$x_b(i+1, j)$ において $0 < \Delta x < 1$ のとき，点 x_a から x 方向に Δx の距離にある点 $x_r(i + \Delta x, j)$ における速度分布関数を以下の様に求める．

$$f_{\sigma i}(\boldsymbol{x}_r, t) = (1 - \Delta x) f_{\sigma i}(\boldsymbol{x}_a, t) + \Delta x f_{\sigma i}(\boldsymbol{x}_b, t) \quad (13)$$

物体を格子ごと移動させる場合，静止格子系の速度分布関数 $f_{\sigma i}$ に対して移動格子系の速度分布関数 $g_{\sigma i}$ を別に設定し，物体表面に移動速度を与えるとともに，上述の補間法を用いて以下の様な補間を時間ステップごとに行なうことで，移動格子系から見た流れ場の速度分布関数を求める．

$$g_{\sigma i}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\Delta t, t) = (1 - |\boldsymbol{u}|\Delta t) g_{\sigma i}(\boldsymbol{x}, t) + (|\boldsymbol{u}|\Delta t) g_{\sigma i}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}, t\right) \quad (14)$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ は物体の移動速度である．

3. 移動格子境界条件

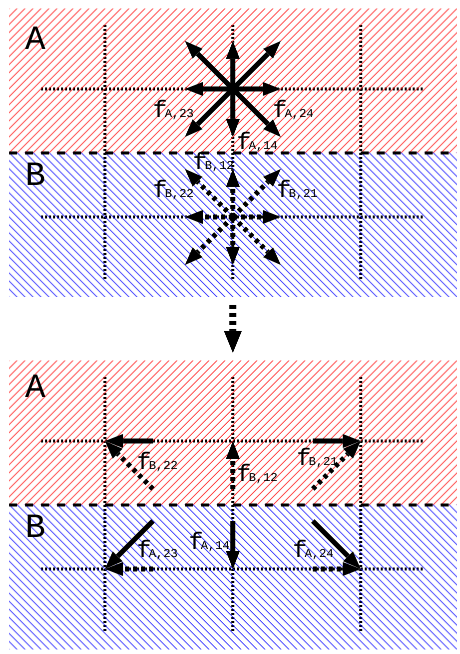

Fig. 2: Distribution function moving across sliding boundary

格子 Boltzmann 法の移流の過程では，速度分布関数は以下のように変化する．

$$f'_{\sigma i}(\boldsymbol{x}, t) = f_{\sigma i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_{\sigma i}, t) \quad (15)$$

Fig.2 のように二次元正方格子上において領域 A と領域 B に水平方向に分割する場合を考える．領域 A の格子点の内，分割面に面している格子点のひとつを $f_{A,\sigma i}$，領域 B の格子点の内，分割面に面している格子点のひとつを $f_{B,\sigma i}$ とすると，一時間ステップの移流過程における領域 A，B 間の分布関数の受け渡しは $f_{A,14}$，$f_{A,23}$，$f_{A,24}$，$f_{B,12}$，$f_{B,21}$，$f_{B,22}$ に限られることになる．二つの領域の接合面において，接合面を横切る向きに移流する分布関数に関して，以下の補間法によって分布関数を変更する．

$$f'_{\sigma i}(\boldsymbol{x},t) = (1-|\boldsymbol{u}|\Delta t)f_{\sigma i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_{\sigma i},t) \\ +(|\boldsymbol{u}|\Delta t)f_{\sigma i}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_{\sigma i}+\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|},t\right) \qquad (16)$$

これにより，接合面において，一方の領域に対して他方の領域が格子ごとスライドしたものとして分布関数のやりとりが行われる．接合面において格子点と格子点の間の任意の位置における分布関数を補間によって求めるので，移動格子上の物体が格子点を横切って移動してゆき，物体の境界が格子点間の任意の位置にあっても，その正確な位置が静止格子側に反映される．また，接合面において，ある格子点の速度分布関数はその格子点を含む一定の領域に一様に分布するという考え方のもとで，質量と運動量は保存される．

4. 計算結果

4.1 単一物体による精度の比較 · 検証

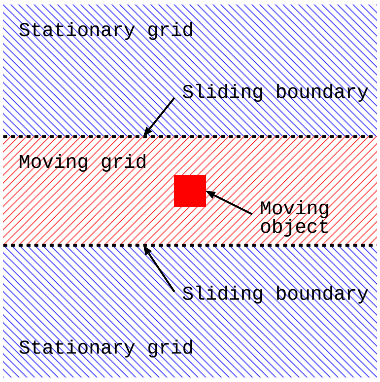

Fig. 3: Moving object with sliding boundary

前述の方法を単一角柱周りの流れ場に適用し，精度の検証を行なう．計算格子数を 512×512 とし，物体の大きさ · 形状を 20×20 の正方角柱断面形状，上下左右の境界条件を周期境界条件とした．まず，相対系で，物体の移動速度に等しい一様流に固定された静止物体 ($stational$) のまわりの流れ場を求める．移動物体については，従来の計算方法である単一格子上の移動物体 ($moving-1$)，接合格子を用いた移動物体 ($moving-2$) の二種類について計算を行なった．これらの比較により，本稿で提案する接合格子法を用いた移動物体周りの流れ場の精度の検証を行なう．

接合格子は Fig.3 に示すように物体をはさむように，物体上端，下端からそれぞれ 10 メッシュの位置に設定した．流れ場の Reynolds 数は 1.0，移動物体の速度を -0.01，静止物体に与えた初期値の流速を 0.01 とした．

Fig.4 に三種類の条件について角柱の抵抗係数 C_D の時間変動をプロットした．単一格子上の移動物体 ($moving-1$) に関しては，Fig.5 の様に振動が大きく見られたので，Fig.4 では 100$step$ ごとの平均値がプロットされている．

単一格子上の移動物体の場合でも，一定の時間間隔ごとに平均をとると静止物体の C_D 値にかなりよく一致した (Fig.4) が，毎時間ステップを詳細にみると非常に大きく振動している (Fig.5)．これは格子を横切る際に振動が発生し，振動が減衰する前に次の格子を横切るので，振動が収まらずに続いているものであると思われる．一方の接合格子を用いた場合も静止物体によく一致しており，接合格子によるものと考えられる振動も見られるが，C_D 値の 0.2% 程度と軽微である．

物体の中心線上の流速分布，圧力分布を Fig.6，Fig.7，Fig.8，Fig.9 にプロットした．単一格子の場合でも流速については静止物体の場合とよく一致するが，Fig.8，Fig.9 の様な圧力の振動が見られる．

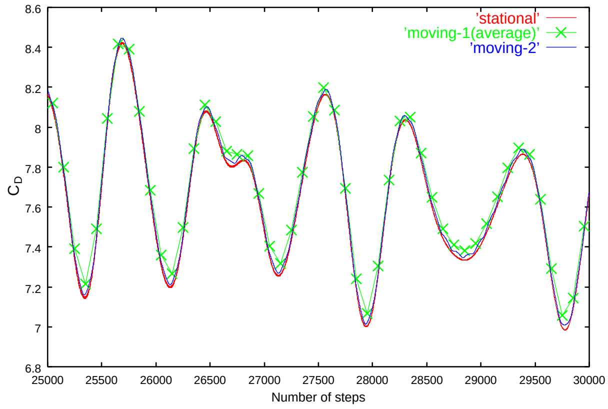

Fig. 4: Comparison of time histories of C_D

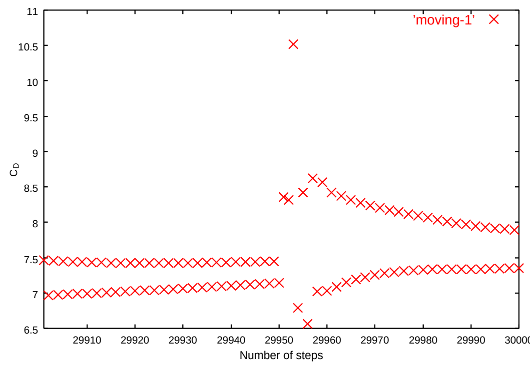

Fig. 5: Close-up of time history of C_D for 'moving-1' case

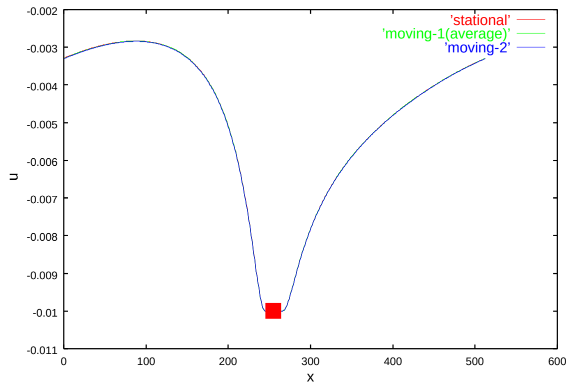

Fig. 6: Comparison of velocity distribution along centerline

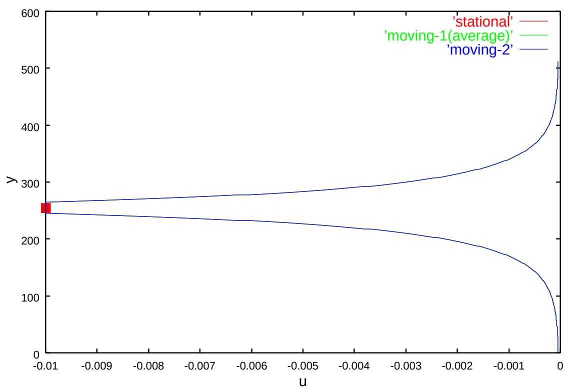

Fig. 7: Comparison of velocity distribution along centerline

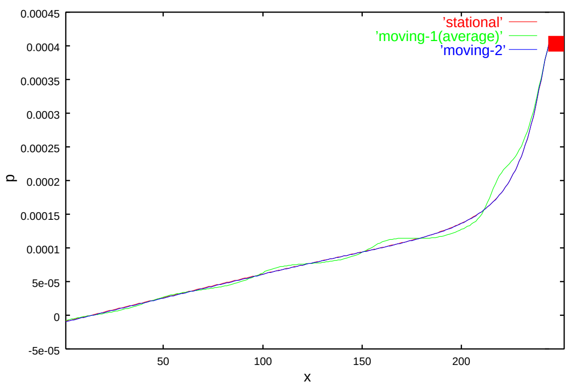

Fig. 8: Comparison of pressure distribution along centerline ($1 \le x \le 244$)

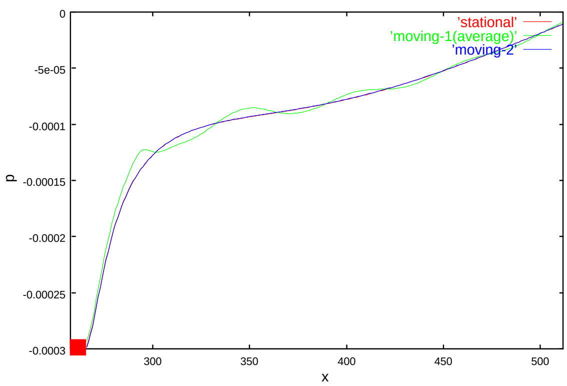

Fig. 9: Comparison of pressure distribution along centerline ($266 \le x \le 512$)

流速（物体の速度）を 0.02，Reynolds 数を 10.0 に変化させたときの C_D 値の時間変動を Fig.10 に示す．流速，Reynolds 数を大きくした場合，単一格子上の移動物体の C_D 値の変動が静止物体の C_D 値と比較して明らかに合わないが，接合格子を用いた場合は静止物体の C_D 値とよく一致した結果が得られた．接合格子による振動もほとんど見られなかった．

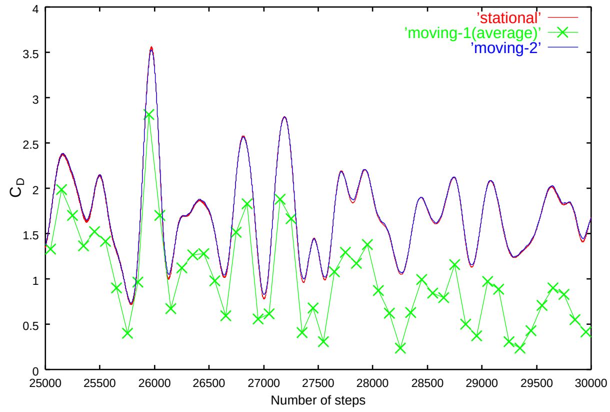

Fig. 10: Comparison of time histories of C_D

4.2 相対的に移動する物体の計算例

接合格子境界条件を相対運動する物体群周りの流れ場に適用した．

計算条件として，物体の形状を正方角柱断面形状，一方の物体を静止格子上に固定した静止物体，他方を移動格子上に固定した移動物体とし，二つの領域の接合面に接合格子境界条件を用いた．移動物体は水平方向に速度 0.02 で移動するものとし，Reynolds 数を 30 とした．領域全体の計算格子数は 256×256 であり，物体の大きさを静止物体，移動物体のいずれも 80×80 として計算を行なった．また，上下左右の境界を周期境界条件とし，接合格子境界条件を移動物体の上端，下端からそれぞれ 10 メッシュの位置に設定した．

相対運動する物体群周りの流れ場の圧力分布を Fig.11 に示した．上方の物体は静止物体，下方は移動物体であり，図中の点線は接合格子の位置を示している．格子と格子の接合面や物体表面において不連続な解は全く見られず，相対運動する物体群周りの流れ場を精度よく解くことができた．

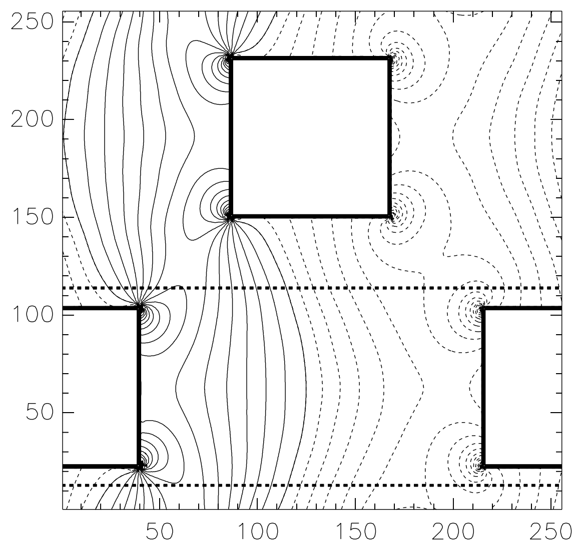

Fig. 11: Pressure distribution around rectangular prisms (upper : stationary, lower : moving into x direction at a constant speed)

5. 結論

格子 Boltzmann 法において接合格子境界条件を提案し，単一物体の場合において，接合面で不連続な解が生じないこと，また，各種保存則が満足されていることを確認した．単一格子上で物体を直接移動させる場合に見られた，格子に対する物体境界の移動速度を上げる際の精度の低下という問題も，接合格子を用いて移動物体周りの流れ場を解くことによって回避することができた．次に，この方法を相対運動する物体群周りの流れ場に適用した．この結果，ある格子点の速度分布関数はその格子点を含む一定の領域に一様に分布しているという考え方に基づく補間を用いた本計算法の妥当性が示された．

参考文献

(1) Chen,S. and Doolen,G.D., Ann. Rev. Fluid Mech., **30** (1998) pp.329-364

(2) 蔦原 · 高田 · 片岡，格子気体法 · 格子ボルツマン法 (1999) コロナ社

(3) 加藤 · 光成 · 築山，セルオートマトン法 (1998) 森北出版

(4) 日置 · 梶島，日本流体力学会年会 2000 講演論文集 (2000) pp.585-586