磁場－流体強結合系の発展方程式とその解

A Set of Evolution Equations for the Coupled System of Magnetic Field and Fluid and Its Solution

○　水田　洋, 北大工量子物理, 〒 060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail：yomizuta@eng.hokudai.ac.jp
Yo Mizuta, Grad. Sch. of Eng. Sci., Hokkaido Univ., Kita-13, Nishi-8, Kita-ku, Sapporo 060-8628, Japan

For the dynamic analysis of the free surface of magnetic fluid with large and complex deformation, a set of evolution equations are established for the coupled system of the magnetic field and fluid velocity. These fields are considered analytic, prepared in the **Flat Space**, mapped conformally into the **Real Space** through an analytic function described by the inclination angle θ and the contraction rate τ, and lead the dynamic and kinematic boundary conditions on the free surface to the above equations, to be solved for θ and the tangential velocity V_X. The evolution from the modified stationary solution as the initial free surface was traced to be reasonable.

1.　はじめに

磁性流体の自由表面は，ごく普通の磁場のもとでも，スパイク集合状など，特異な形状に変化するため，当初は強い関心を集めたが，その大きく複雑な変形が，摂動法などによる既存の解析法の無力さを予想させるにつれ，あまり話題に上らなくなってきた．しかしこれは，理論および数値解析の立場からは，チャレンジングな問題である．この現象は，自由表面の変形に敏感に応じた磁場が磁気応力差を通じて逆に磁性流体に作用するため，解析は，互いに強く結合した磁場と流体という両方の系について，行うことになる．磁場の分布が一様に近く，自由表面形状の変化が緩やかであれば，このための理論および数値解析は現状でも充分利用可能であるが[1]，それを超えて，多くの突起が生じたり，形状を多価関数として表さざるを得ない場合（Fig. 1(a)）にも「複素解析」は有効である．この利点は，渦なし非粘性流体，無電流磁場の２次元解析という前提を補って余りある．ただし，３次元解析へは，２次元解析との対応関係から拡張の可能性がある．また，表面張力の取り込みに問題はない．

磁束密度・磁場・流速を $\boldsymbol{b}=(b_{xi},b_{yi})$, $\boldsymbol{h}=(h_{xi},h_{yi})$, $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y)$ として ($i=1$：磁性流体，$i=2$：真空)，磁束保存，無電流磁場，非圧縮性渦なし流体という条件を成分表示した

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial b_{xi}}{\partial x}=-\dfrac{\partial b_{yi}}{\partial y}, & \dfrac{\partial h_{yi}}{\partial x}=\dfrac{\partial h_{xi}}{\partial y},\\ \dfrac{\partial v_x}{\partial x}=-\dfrac{\partial v_y}{\partial y}, & \dfrac{\partial v_y}{\partial x}=\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\end{array}\right. \tag{1}$$

を解析的な複素関数に対する **Cauchy-Riemann の関係**とみなすと，複素磁場 $f_i=b_{xi}-ib_{yi}=\mu_i(h_{xi}-ih_{yi})$ (μ_i は透磁率)，複素流速 $g=v_x-iv_y$ は**解析関数**となり，以下の性質を利用できる．

1. **写像変換**：自由表面が平らな **Flat Space**（Fig. 2(a)）と，実際どおりまで自由表面を歪めた **Real Space**（Fig. 2(b)）を考え，Flat Space で用意した磁場・流れ場を空間と共に歪めて，f_i, g とできる．
2. **微分可能性**：Flat Space で用意する場が解析的で，Flat Space から Real Space への写像変換も解析的なら，Real Space の場も解析的になる．
3. **Hilbert 変換**：領域内で解析的な関数の実部と虚部は，実軸上では Hilbert 変換で互いに相手から求められる．

通常，写像変換は，固定境界周りの流れ場，導体近傍の磁場のように，流線あるいはポテンシャル線が境界と一致することが自明な場合に利用される（Fig. 1(c)）．しかし今は，自由表面をはさんで媒質の透磁率差が有限な

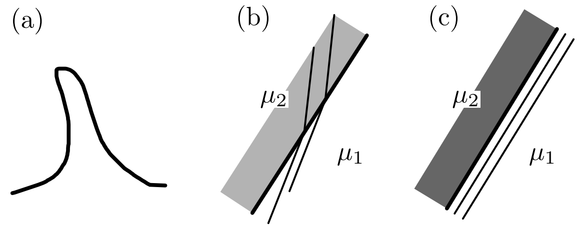

Fig. 1: Cases to be analyzed by the present method: (a) multivalued shape of the free surface and (b) lines of magnetic force or streamlines crossing the free surface instead of (c) those parallel to the free surface

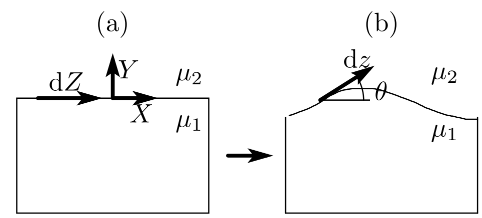

Fig. 2: (a) Flat Space and (b) Real Space

ため，磁束線・磁力線は自由表面を横切っており，その大きさおよび方向は一様ではない．また動的解析では当然ながら，流線も自由表面を横切る（Fig. 1(b)）．このようなとき，磁場分布は,「磁場の接線成分 $h_{\rm s}$ と，磁束密度の法線成分 $b_{\rm n}$ が連続」という界面条件だけで決めることになり，これは容易でない．しかしながら，次節以降で述べるように，写像変換式に含まれる自由表面の傾斜角 θ とそれに共役な空間収縮率 τ で，Flat Space, Real Space それぞれの空間における磁場と流れ場の関係および基礎方程式を表すと，このような困難を意識せず，波動や安定性などの動的解析にも適用可能な結合発展方程式を導くことができる．本稿ではその導出および解法を示す．

2.　表面勾配角と表面流速に対する結合発展方程式

2.1　空間の変形

Flat Space と Real Space それぞれにおいて，Tab. 1 のように，複素座標，複素磁気ポテンシャル，複素磁場，複素流速を定義する[2]．ここで，添え字 $i=1,2$ は磁性流体領域と真空領域，Ψ_i, ψ_i はスカラーポテンシャル，A_i, a_i はベクトルポテンシャルの z 成分を表す．

Real Space における座標・磁場・流速（小文字）は,

tential, complex magnetic field and complex velocity in Flat Space and Real Space

	Flat Space	Real Space
座標	$Z = X + iY$	$z = x + iy$
ポテンシャル	$W_i = \mu_i \Psi_i - iA_i$	$w_i = \mu_i \psi_i - ia_i$
磁場	$F_i = -\dfrac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}Z} = \mu_i H_X - iB_Y$	$f_i = -\dfrac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}z} = b_{xi} - ib_{yi} = \mu_i(h_{xi} - ih_{yi})$
流速	$G = V_X - iV_Y$	$g = v_x - iv_y$

Flat Space におけるこれらの対応量（大文字）を Real Space に写して得られる．このための写像変換は，

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z = \partial(x+iy)/\partial X = e^{i(\theta+i\tau)} \qquad (2)$$

とする[2]．ここで θ, τ は $Z = X + iY$ の関数で，θ は自由表面 $(Y = 0)$ でその勾配と一致し，共役な τ は空間収縮率と解釈できる．(2) の実部・虚部それぞれを $Y = 0$ で X 積分すれば，

$$\begin{pmatrix} x(X) \\ y(X) \end{pmatrix} = \int_{X_0}^{X} \mathrm{d}X' e^{-\tau} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad (3)$$

のように，媒介変数表示で自由表面形状が得られる．この表示は，多価となる著しい変形も表現できる．

Flat Space における接線磁場・法線磁束密度・接線流速・法線流速を H_X, B_Y, V_X, V_Y とすれば，Z が z に写るとき $W_i(Z) = w_i(z)$ より，

$$\begin{cases} f_i = b_{xi} - ib_{yi} = e^{-i(\theta+i\tau)}(\mu_i H_X - iB_Y), \\ g\ = v_x - iv_y\ = e^{-i(\theta+i\tau)}(V_X - iV_Y) \end{cases} \qquad (4)$$

となり，Real Space における磁場・流速は，Flat Space における対応量と写像変換から得られる．任意のベクトル (u_x, u_y) は，界面（自由表面）上では接線成分 u_{s} および法線成分 u_{n} で

$$\begin{cases} u_x = -u_{\mathrm{s}}\cos\theta - u_{\mathrm{n}}\sin\theta, \\ u_y = -u_{\mathrm{s}}\sin\theta + u_{\mathrm{n}}\cos\theta \end{cases}$$

と表されるが，これは $u_x - iu_y = e^{-i\theta}(-u_{\mathrm{s}} - iu_{\mathrm{n}})$ のようなコンパクトな形にまとめられる．したがって，磁場・流速の界面成分は以下のように表される．

$$\begin{cases} -\mu_i h_{\mathrm{s}} - ib_{\mathrm{n}} = e^{i\theta}(b_{xi} - ib_{yi}) \\ \qquad\qquad\quad = e^{\tau}(\mu_i H_X - iB_Y), \\ -v_{\mathrm{s}} - iv_{\mathrm{n}} \quad = e^{i\theta}(v_x - iv_y) \\ \qquad\qquad\quad = e^{\tau}(V_X - iV_Y). \end{cases} \qquad (5)$$

ここで H_X, B_Y は，既知量として，例えば，水平な自由表面下方の磁気双極子を想定して与える[3]．このとき磁場分布は一様である必要はなく，また，透磁率差 $[\mu_i] = \mu_2 - \mu_1$ が有限なとき，磁束線，磁力線が自由表面を横切っても構わない．ただし（添え字 i を省いてあるように）これらを界面を横切って連続になるように与えておくと，τ を共通にしておくだけで，h_{s}, b_{n} は連続という界面条件が自動的に満たされる．なお，V_X, V_Y は動的解析で未知量として求めるが，V_Y が 0 でない限り，流線は自由表面を横切ることになる．

渦なし・非粘性の場合，Bernoulli 方程式および自由表面における法線応力連続条件は，流速ポテンシャル，流速，重力加速度，表面変位，磁性流体密度，磁性流体側圧力，真空側圧力，磁気応力差，表面張力を ϕ, $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y) = -\nabla\phi$, g, η, ρ, p_{i}, p_{e}, T, p_{c} として，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X}\left(-\dfrac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta + \dfrac{p_{\mathrm{i}}}{\rho} + \dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) = 0, \\ -p_{\mathrm{e}} + p_{\mathrm{i}} - T = p_{\mathrm{c}} \end{cases} \qquad (6)$$

となる[4]．これらから p_{i} を消去し，

1. 真空側圧力：$p_{\mathrm{e}} = 0$ と置く，
2. 重力項：$g\dot{\eta}$ に (2) の虚部を適用，
3. 表面張力項：表面張力係数，曲率半径を γ, R として，$p_{\mathrm{c}} = \gamma/R = \gamma(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}$ に (2) を適用，
4. 磁気応力差：$T = -(1/2)\,[1/\mu_i]\,(\mu_1\mu_2 h_{\mathrm{s}}^2 + b_{\mathrm{n}}^2) \quad (< 0)$ に，(5) より $-h_{\mathrm{s}} = e^{\tau}H_X$, $b_{\mathrm{n}} = e^{\tau}B_Y$ を適用，
5. 流速項および流速ポテンシャル項：(4) より $|v_x - iv_y|^2 = e^{2\tau}|V_X - iV_Y|^2$，および $V_X = -\partial\phi/\partial X$ を適用，

を用いて各項を書き換えていくと（上付きドットは X による微分），

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_X}{\partial t} &= -ge^{-\tau}\sin\theta + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial}{\partial X}\left(e^{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial X}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{e^{2\tau}}{2\rho}\left[\frac{1}{\mu_i}\right](\mu_1\mu_2 H_X^2 + B_Y^2)\right\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{e^{2\tau}}{2}(V_X^2 + V_Y^2)\right\} \end{aligned} \qquad (7)$$

が導かれる[3]．(7) は V_X に対する発展方程式の形をしているが，定常問題では $\phi = 0$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ より，(7) が含む未知量は θ, τ のみとなり，θ と τ は Hilbert 変換で互いに結ばれているため，閉じた方程式として解くことができる．しかし動的解析で θ, τ と共に V_X, V_Y を求めるには，(7) だけでは方程式が不足している．

2.3 運動学的条件

動的解析において方程式を閉じるには，力学的条件と共に運動学的条件を用いるが，$\partial\eta/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\eta = 0$ は η の１価性を前提にしているので，使用できない．しかし運動学的条件の本質は，自由表面の移動速度を $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ とすれば，その法線成分が流速の法線成分に一致すること，すなわち $u_{\mathrm{n}} = v_{\mathrm{n}}$ である．

自由表面移動速度は，Real Space における自由表面上の点の座標を $x + iy$ とすれば，その時間微分に他ならないが，これも (4),(5) と同様，Flat Space の量と対応関係がある．

$$\begin{cases} u_x - iu_y = \dfrac{\partial(x - iy)}{\partial t} = e^{-i(\theta+i\tau)}(U_X - iU_Y), \\ -u_{\mathrm{s}} - iu_{\mathrm{n}} = e^{i\theta}(u_x - iu_y) = e^{\tau}(U_X - iU_Y). \end{cases} \qquad (8)$$

したがって，運動学的条件は最終的に

$$U_Y = V_Y \qquad (9)$$

となる．しかしこのままでは (7) と共に未知量を求めることはできないので，以下のように，写像変換式 (2) の時間微分を書き換え，そこに (9) を適用する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{i(\theta+i\tau)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial(x+iy)}{\partial t} = \frac{\partial(u_x + iu_y)}{\partial X} \\ &= \frac{\partial e^{i(\theta+i\tau)}(e^{2\tau}U_X + ie^{2\tau}U_Y)}{\partial X}, \end{aligned} \qquad (10)$$

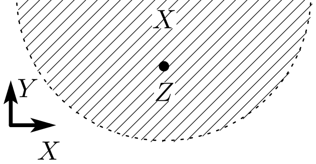

Fig. 3: Point X on the real axis for the Hilbert transform of $f(Z)+ig(Z)$ analytic in Z

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \operatorname{Im} e^{-i(\theta+i\tau)}\frac{\partial e^{i(\theta+i\tau)}}{\partial t}$$
$$= (e^{2\tau}U_X)\frac{\partial\theta}{\partial X} - (e^{2\tau}V_Y)\frac{\partial\tau}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X}(e^{2\tau}V_Y). \quad (11)$$

これを (7) と連立すれば，$V_X(X,t)$, $\theta(X,t)$ の発展方程式となる．これらの右辺が含む，V_X, θ 以外の τ, V_Y, U_X は，それぞれある複素関数の解析性に基づく Hilbert 変換によって決めるが，詳しくは，次の節で述べる．

3. 動的解析のための手続き

3.1 Hilbert 変換

Hilbert 変換は，$Z = X + iY$ の上半面または下半面で複素関数 $f(Z)+ig(Z)$ （f,g は実関数）が解析的なとき，実軸上の点 X でこの関数の実部・虚部が互いに

$$\begin{cases} \mathsf{H}f(X) \equiv \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}X' \frac{f(X')}{X'-X} = g(X), \\ \mathsf{H}^{-1}g(X) \equiv -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}X' \frac{g(X')}{X'-X} = f(X) \end{cases}$$

のように関係づけられることを述べたものである (Fig. 3)．すなわちこの関数は，

$$\begin{cases} f(X) + i\mathsf{H}f(X), \\ \mathsf{H}^{-1}g(X) + ig(X) \end{cases}$$

となる．もし $f(X)$ または $g(X)$ が

$$\left.\begin{matrix} f(X) \\ g(X) \end{matrix}\right\} = \sum_{n=1}^{N} [a_n(t)\sin k_n X + b_n(t)\cos k_n X] \quad (12)$$

のようにスペクトル展開されていれば，Hilbert 変換は特異積分を求めるまでもなく，

$$\begin{cases} \mathsf{H}f(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} [a_n(t)\cos k_n X - b_n(t)\sin k_n X], \\ \mathsf{H}^{-1}g(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} [-a_n(t)\cos k_n X + b_n(t)\sin k_n X], \end{cases} \quad (13)$$

のように，基底関数の入れ替えですんでしまう．

前節で導いた結合発展方程式の右辺に現れた θ, V_X 以外の量は，以下の矢印左の関数が解析的であることに基づいて，矢印右のように決める．

$$\begin{aligned} \theta + i\tau \quad &\rightarrow \quad \tau(X) = \mathsf{H}\theta(X), \\ V_X - iV_Y \quad &\rightarrow \quad -V_Y(X) = \mathsf{H}V_X(X), \\ e^{2\tau}U_X + ie^{2\tau}V_Y &\rightarrow e^{2\tau(X)}U_X(X) = \mathsf{H}^{-1}e^{2\tau(X)}V_Y(X). \end{aligned}$$

特に，U_X は任意ではなく，(10) の右辺全体が左辺と共に解析的になるように決められる．

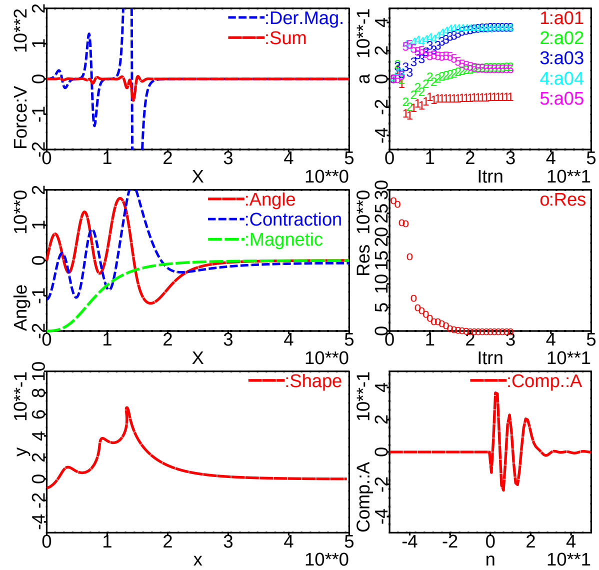

Fig. 4: Total force and the derivative of magnetic stress (X-Force:V), inclination angle, contraction rate and magnetic stress in Flat Space (X-Angle), and shape (x-y) for the static free surface, together with their spectral components (n-Comp.:A) and their convergence while the Newton-Raphson iteration (Itrn-a, Itrn-Res).

3.2 定常解と結合発展方程式のスペクトル法

(7) の定常解を求めるには，右辺の θ, τ を (12) のように表すとき，これを a_n などのスペクトル係数に対する方程式と見る．係数が N 個あれば，区間 $-L/2 \le X \le L/2$ 内の同数の選点 $X_j = (j+1/2)(L/N)$ $(-N/2 \le j \le N/2-1)$ 上で，

$$\begin{aligned} \epsilon(\{a_n\}) \quad \equiv \quad & e^{-3\tau}\sin\theta - \Gamma e^{-\tau}(\dot\tau\dot\theta + \ddot\theta) \\ & -M(2\dot\tau G + \dot G) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

を満たすように求める．ここで Γ, M は，表面張力と静水圧，磁気応力差と静水圧の比を表すパラメータ，$G(X)$ は Flat Space における自由表面上の磁気力の分布を表す関数である．これは，非線形連立方程式なので，Newton-Raphson 法などの繰り返し法で解く必要がある．

θ, τ は，X および時間 t の関数であるが，動的解析で (7), (11) を解くには，時間依存性は (12) のように専らスペクトル係数が受け持つ．これにより，結合発展方程式を常微分方程式として時間積分できる．

4. 動的解析の検証

動的解析の妥当性は，次のように確認した．

1. 定常的な場合，選点において (7) を満たす θ, τ および自由表面形状を求める．
2. 定常解のスペクトル成分を一部除去して定常解から外した初期波形が，力の平衡が破れ，(7),(11) により時間発展する様子を観察する．

4.1 定常解

Fig. 4 には，Newton-Raphson 法で求めた $\theta(X)$, $\tau(X)$ とそれらのスペクトル成分 a_n (X-Angle, n-Comp.:A)，各選点における力の総和（(7) の右辺全部）と磁気応力差勾配 (X-Force:V)，その結果得られた自由表面形状 (x-y) を示す．更に，a_n を求める際に，Newton-Raphson 法の繰り返し回数に対して，最初の 5 つの成分がそれぞれ一定

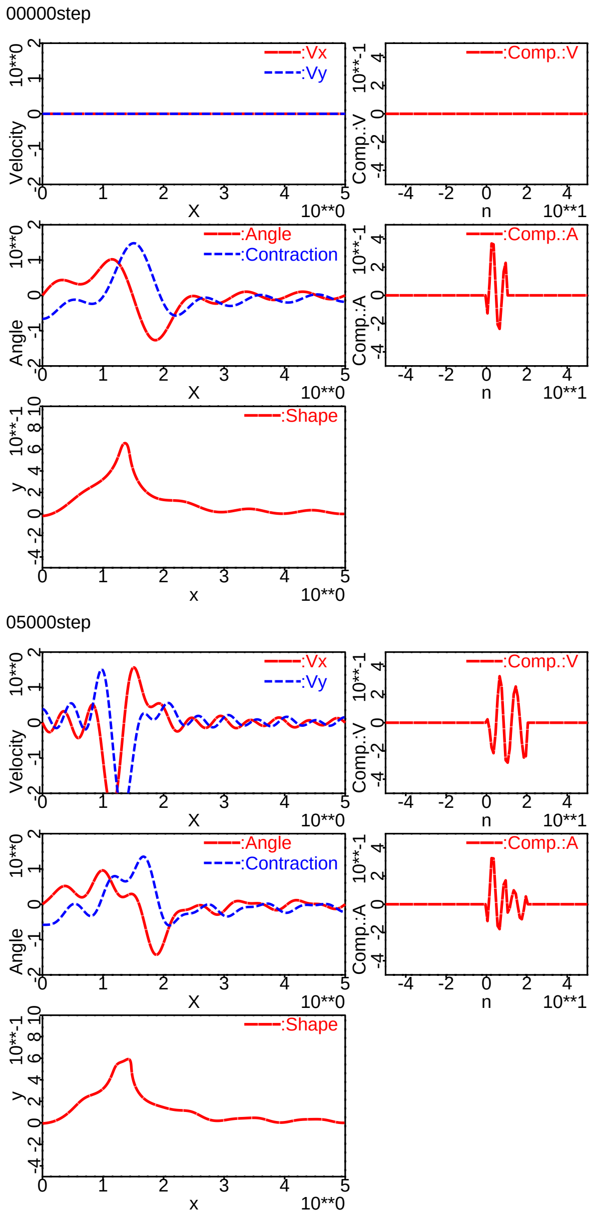

Fig. 5: Change of inclination angle and contraction rate (X-Angle), shape (x-y) and spectral components (n-Comp.:A), together with the fluid velocity and its spectral components (X-Velocity, n-Comp.:V), for the free surface from the modified static shape; 10 and 20 spectral components of the static shape and the force kept

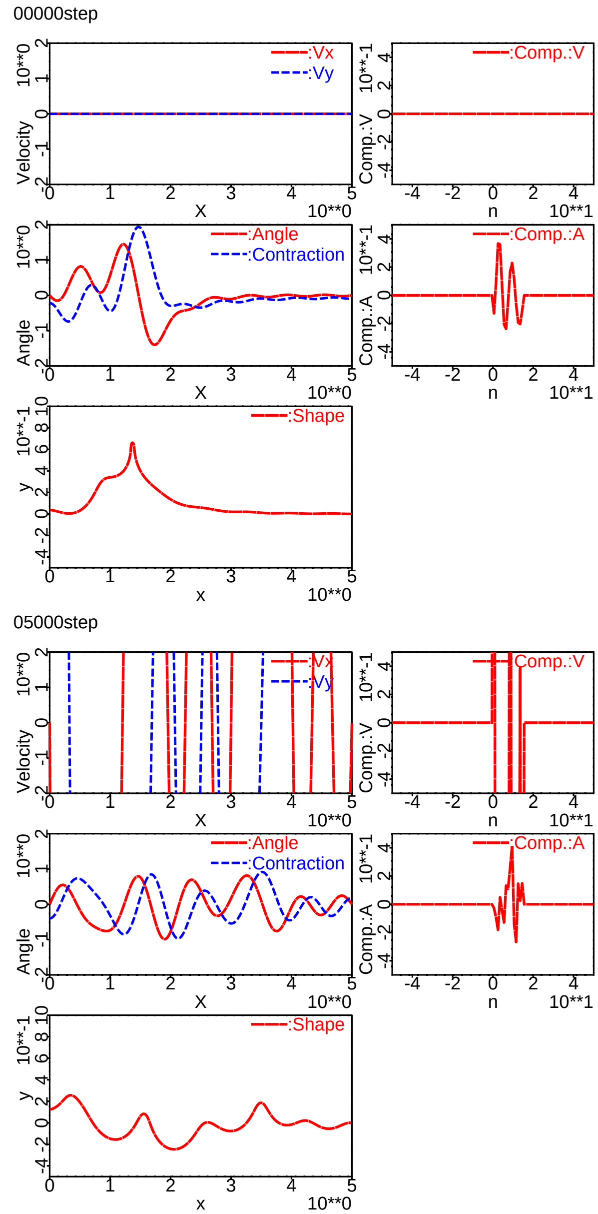

Fig. 6: Change of inclination angle and contraction rate (X-Angle), shape (x-y) and spectral components (n-Comp.:A), together with the fluid velocity and its spectral components (X-Velocity, n-Comp.:V) for the free surface from the modified static shape; 15 and 15 spectral components of the static shape and the force kept

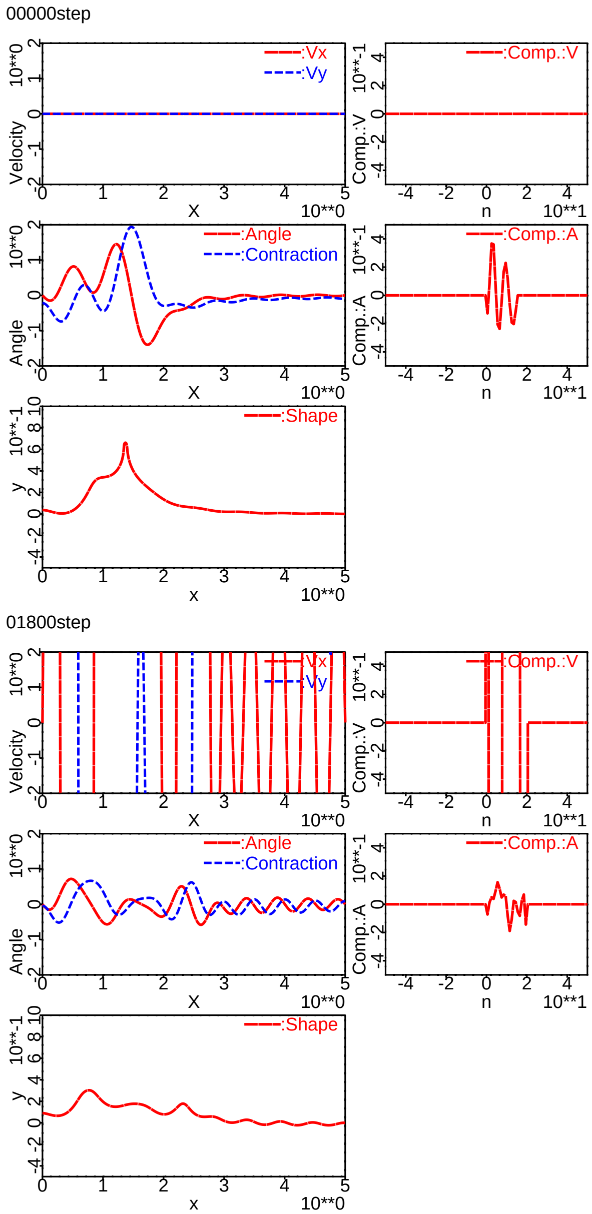

Fig. 7: Change of inclination angle and contraction rate (X-Angle), shape (x-y) and spectral components (n-Comp.:A), together with the fluid velocity and its spectral components (X-Velocity, n-Comp.:V) for the free surface from the modified static shape; 15 and 20 spectral components of the initial shape and the force kept

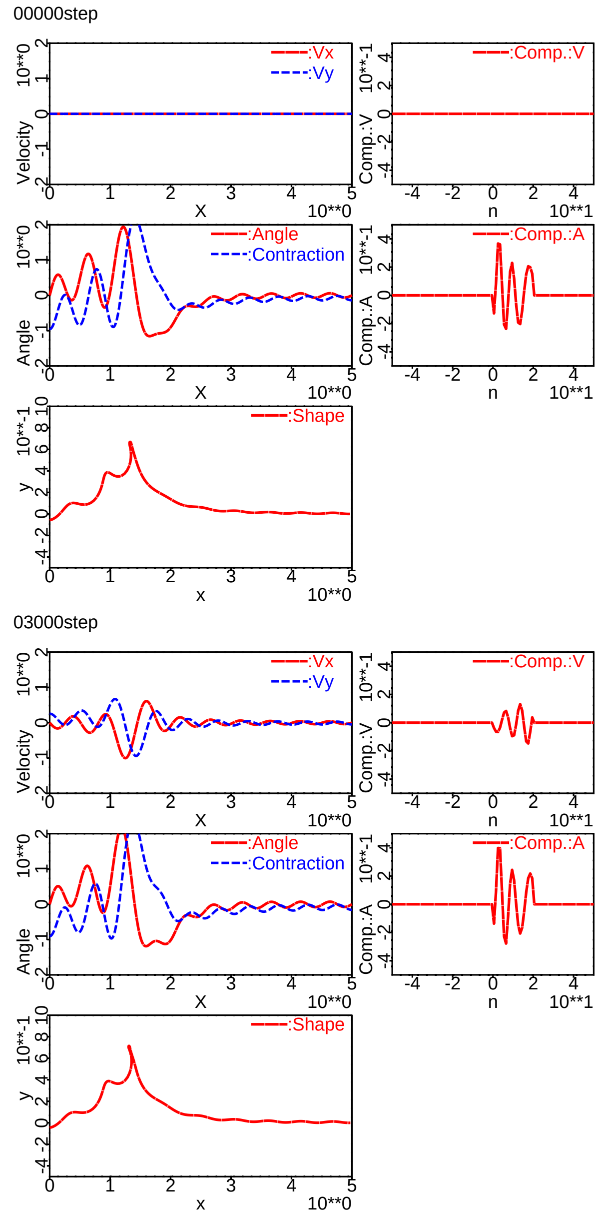

Fig. 8: Change of inclination angle and contraction rate (X-Angle), shape (x-y) and spectral components (n-Comp.:A), together with the fluid velocity and its spectral components (X-Velocity, n-Comp.:V) for the free surface from the modified static shape; 20 and 20 spectral components of the initial shape and the force kept

差の総和が０に収束する様子も示した (Itrn-a, Itrn-Res). 今は対称なモードだけ見ているので，n-Comp.:A 左側に示される反対称成分 b_n はない．短波長に向かうにつれ，スペクトル成分は連続的に振動しながら減少する．この時の静水圧 : 表面張力 : 磁気応力差の比は，1.0 : 0.2 : 2.0 である．また磁場は，自由表面の下方に磁気双極子が沈んでいることを想定して与えているが[3, 5]，X-Angle には，このときの Flat Space における磁気応力差の分布も示した．

自由表面には，勾配角の変化に伴い３つの波が現れるが，最も外側の波が鋭い．重力，表面張力，磁気応力差の総和はこの付近で０からやや外れるが，それでも磁気応力差に較べればずっと小さい．この解析では，無次元長さ $L = 10$ の解析区間内で，自由表面形状を $N = 106$ 個のスペクトル成分で表しているが，この個数は，多少増減しても自由表面形状はさほど変化せず，また n-Comp.:A のスペクトル分布が短波長でほぼ収束していることから，充分なものと考えられる．

ただし (7) には，強い非線形性を反映して，静水圧 : 表面張力 : 磁気応力差の比が同じでも，収束の初期値に依存する複数の解がある．

4.2　定常解から外れた初期波形の変動

定常解のスペクトル成分を，何通りかの方法で一部除去して初期波形としたときの変動の様子を，Fig. 5–Fig. 8 に示した．ここには，Fig. 4 と同様の X-Angle, x-y, n-Comp.:A 以外に，V_X, V_Y とそれらのスペクトル成分もある (X-Velocity, n-Comp.:V)．これら動的解析の無次元時間刻みは $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ であるが，その数倍程度まで なら，時間変化の様子は変わらない．

極めて強い非線形性のため，この現象の数値解析における不安定性などは予測が困難であるが，一般に，短波長成分が不安定性を誘起する傾向があるので，各時間ステップで，指定より短波長側にある外力（(7),(11) の右辺）のスペクトル成分を落せるようにした．Fig. 5–Fig. 8 は，初期波形および外力で残すスペクトル成分の最大数が，10–20, 15–15, 15–20, 20–20 の場合である．初期波形の山は，スペクトル数 10 ではひとつだが，20 でほぼ定常解どおり３つ再現されている．時間発展は，外力スペクトル数を初期波形スペクトル数に近づけるほど安定になると思われるが，初期波形スペクトル数 15 では，流速の振る舞いからもわかるとおり，早く不安定化する．これに対し，10–20 では外力スペクトル数が初期波形スペクトル数より離れていても安定である．安定な変動では，自由表面上の波は中心方向に押しやられながら，より鋭くなる．これは，流速分布からも見て取れる．

5.　まとめ

勾配角 θ および圧縮率 τ で表した写像関係により，Real Space で解析的な複素磁場と複素流速を Flat Space に用意した対応量から求める解析関数の方法で，大きく複雑に変形した磁性流体自由表面の動的解析も可能にする，磁場ー流体結合系の連立発展方程式を導き，その解を示した．今後解の組織的な整理，方程式の拡張・改良と共に，磁場と流速の分布構造の関連などについて，探っていく．

参考文献

1. Mizuta,Y., “Generalized treatment of numerical analysis on coupled fluid and magnetic field system”, *Proc. 2nd Asia Workshop on Computational Fluid Dynamics*(1996), pp.153–158.
2. 水田　洋, “複素磁場を用いた磁性流体自由表面の無近似非線形波動解析”, 日本流体力学会 2000 講演論文集, (2000), pp.485–486.
3. Mizuta,Y., “Analysis on large free surface deformation of magnetic fluid”, Mathematical Sciences and Applications, **10**(1997), pp.337–342.
4. Rosensweig,R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press(1985), Chap.4, Chap.5.

線形解析”, 磁性流体連合講演会講演論文集, **9**(1995), pp.30–32.