

# 衝撃波による固体内応力波伝播の数値計算

Numerical simulations of stress waves in elastic solid induced by shock waves

○ 青野 貴史, Email: b96aonta@mech.tottori-u.ac.jp

湯澤 修, Email: b93yzwos@mech.tottori-u.ac.jp

後藤 知伸, Email: goto@mech.tottori-u.ac.jp

高野 泰斉, Email: takano@mech.tottori-u.ac.jp

鳥取大学工学部, 〒 680-8522 鳥取市湖山町南 4-101

Takafumi Aono, Osamu Yuzawa,

Tomonobu Goto, Yasunari Takano

Dept. of Mech. Eng., Tottori Univ., Koyama, Tottori 680-8522, JAPAN

The present paper deals with experimental and computational studies for stress waves induced in elastic solid by shock waves. Shock waves at approximately Mach 3 in stationary argon were propagated to solid model of acrylic resin placed in a test section. The schlieren technique were employed to visualize stress waves inside the model, and snap-shot photographs of the test section were taken using a nano spark light source. Numerical simulations were carried out for stress waves employing the finite volume method based on Godunov algorithm

## 1. 緒言

衝撃波が弾性体に衝突すると物体表面で衝撃波が反射し、物体表面での急激な圧力上昇により、表面から弾性体内部に応力波が形成される。著者らは衝撃波を利用した治療法である体外衝撃波結石破碎術に関連して、衝撃波による固体内の応力波形成過程に興味を持ち、衝撃波を弾性体に衝突させたときに生じる現象を流体力学と弾性力学の混合問題として研究を進めてきた。

まず、弾性体における応力伝播現象の数値計算法として、弾性力学方程式を数値計算するための Godunov 法に基づく有限体積法の計算法を開発し<sup>1</sup>、気体力学方程式と弾性力学方程式の数値計算を行うことにより、衝撃波により弾性体内部に誘起される応力波のシミュレーションを行った<sup>2</sup>。また、弾性力学方程式と液体モデルの流体力学方程式を同時に解くことによって、衝撃波と液体中の弾性体との相互作用のシミュレーションを実行した<sup>3</sup>。数値計算の実験的検証として、衝撃波管装置によって平面衝撃波を発生させ、アクリル樹脂製の透明な固体ブロック内部に形成される応力波とブロック回りの衝撃波の可視化実験を行い、撮影された瞬間写真との比較によりシミュレーションの有用性を示した<sup>4</sup>。

今回の研究では、固体モデル内に誘起された応力波が自由端で反射する現象を取り上げる。固体モデルとして、反射する先端部分を尖らせた 2 種類のアクリル樹脂製のブロックを用意し、可視化実験とそれに対応する数値シミュレーションを行う。先端部分が尖ったアクリル樹脂の固体ブロックに応力波を伝播させたときの先端部分での応力集中や固体の破壊を考えている。

## 2. 実験方法

実験は、無隔膜衝撃波管装置<sup>5</sup>を使用して行った。直径 40mm の低圧室に、20mm × 10mm の長方形断面のクッキー - カッター - を介して観測部が取り付けられている。固体モデルとして衝撃波の入射する端面が 20mm × 10mm の長方形断面である 2 種類のアクリルブロックを用意し、クッキー - カッター部分で平面衝撃波と衝突するように観測部内の適当な位置に固定して設置させた。初期圧力 12kPa の常温の静止アルゴンにおよそマッハ数 3 の平面衝撃波を伝播させ、固体モデルに入射させた。

シュリーレン法の光源にはナノスパーク（発光時間 50 ns）を用い、アクリル樹脂の固体モデル内部の応力波を可視化し、瞬間写真撮影を行った。

光学的な配置は次のようになっている。ナノスパーク

光源からの光線を、焦点距離 50mm のレンズによって集束させて直径 2mm のピンホールを通過させ、焦点距離 150mm の平行レンズにより光線を平行にした後、観測部に到達させる。観測部を通過した光はさらに焦点距離 500mm のレンズでナイフエッジに集束し、暗室に置かれたカメラに届き、観測部の様子を瞬間写真撮影する。

## 3. 計算方法

実験で得られたアクリルブロック内部の応力波のシュリーレン写真と比較するために数値シミュレーションを行う。

固体ブロック内に誘起される応力波のシミュレーションは以下のように実行される。はじめに、気体力学シミュレーションを実行し、固体まわりの流れ場を求め、固体表面の圧力変動の履歴を一旦コンピューターファイルに保存する。次に固体表面の圧力履歴を境界条件として用いることによって、弾性体内部に形成される応力波についての弾性力学シミュレーションを実行する。

気体力学および弾性力学に対する 2 次元基礎方程式は次の保存形式で示される。

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x} + \frac{\partial G_k}{\partial y} = 0, \quad k = g \text{ or } s \quad (1)$$

ここで、添字  $k=g$  は気体力学方程式を、 $k=s$  は弾性力学方程式を示す。

気体力学方程式の保存量ベクトル  $Q_g$  および流束ベクトル  $F_g, G_g$  は次のようになる。

$$Q_g = [\rho, \rho v_x, \rho v_y, E]^T \quad (2)$$

$$F_g = [\rho v_x, \rho v_x^2 + p, \rho v_x v_y, v_x(E + p)]^T \quad (3)$$

$$G_g = [\rho v_y, \rho v_x v_y, \rho v_y^2 + p, v_y(E + p)]^T \quad (4)$$

ここで、 $\rho$  は理想気体の密度、 $v_x$  および  $v_y$  はそれぞれ速度の  $x$  成分および  $y$  成分であり、 $E$  はエネルギー密度、 $p$  は圧力である。気体力学方程式は Roe スキーム<sup>6</sup>に基づく有限体積法を採用して数値計算を行う。

弾性力学方程式において、その保存量ベクトル  $Q_s$  および流束ベクトル  $F_s, G_s$  は次のように表される。

$$Q_s = [\rho_s u_x, \rho_s u_y, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}]^T \quad (5)$$

$$F_s = [\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \rho_s c_1^2 u_x, \rho_s c_2^2 u_y, \rho_s c_3^2 u_x]^T \quad (6)$$

$$G_s = [\sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \rho_s c_3^2 u_y, \rho_s c_2^2 u_x, \rho_s c_1^2 u_y]^T \quad (7)$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_3^2 = \frac{\lambda}{\rho} \quad (8)$$

ここで、 $\rho_s$  は固体の密度、 $u_x$  および  $u_y$  はそれぞれ変位速度の  $x$  成分および  $y$  成分である。また、 $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  はそれぞれ  $x$  方向、 $y$  方向の圧縮引張応力で、 $\sigma_{xy}$  はせん断応力である。 $c_1$  と  $c_2$  はそれぞれ疎密波とせん断波の速度であり、 $\lambda$ ,  $\mu$  は Lamé 定数である。

弾性力学方程式についても有限体積法を採用するが、Godunov の考え方を弾性力学方程式に適用して開発した方法<sup>1</sup>を用いる。

保存方程式 (1) を体積要素  $c_{i,j}$  で積分することにより、弾性力学方程式に対する次の有限体積スキームを得る。

$$A_{i,j} \frac{dQ_{s,i,j}}{dt} + L(Q_{s,i,j}) = 0 \quad (9)$$

$$L(Q_{s,i,j}) = F_{s,n,i+\frac{1}{2},j} \Delta s_{i+\frac{1}{2},j} - F_{s,n,i-\frac{1}{2},j} \Delta s_{i-\frac{1}{2},j} + F_{s,n,i,j+\frac{1}{2}} \Delta s_{i,j+\frac{1}{2}} - F_{s,n,i,j-\frac{1}{2}} \Delta s_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

ここで、 $Q_{s,i,j}$  は時間  $t$  における体積要素  $c_{i,j}$  内の保存量ベクトル  $Q_s$  の平均値であり、要素  $c_{i,j}$  の面積は  $A_{i,j}$  で示す。さらに  $\Delta s_{i,i+1/2,j}$  と  $\Delta s_{i,j+1/2}$  はそれぞれ要素  $c_{i,j}$  と  $c_{i,j+1}$ , 要素  $c_{i,j}$  と  $c_{i+1,j}$  の間の境界の距離である。

$F_{s,n,i+1/2,j}$  と  $F_{s,n,i,j+1/2}$  はそれぞれ  $\Delta s_{i+1/2,j}$  と  $\Delta s_{i,j+1/2}$  の要素境界に対して法線方向の流束ベクトルであり、 $F_{s,n} = F_s \cos \theta + G_s \sin \theta$  で表される。なお、 $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  は要素境界に対して法線方向の方向余弦である。

式 (9) の時間積分について、本論文では 2 段階ルンゲ-クッタ法を採用する。有限体積スキームにおいて要素境界での流束の数値を求めるため、Godunov の考え方<sup>7</sup>を弾性力学に適用する。直角座標における保存量  $Q_s$  を要素境界の法線方向 ( $\xi$  軸) および接線方向からなる座標系の成分で表す保存量に変換する。即ち

$$\hat{Q}_s = [\rho u_n, \rho u_t, \sigma_{nn}, \sigma_{tn}, \sigma_{tt}]^T \quad (11)$$

ここで、添字の  $n$  および  $t$  は法線および接線成分を示す。要素  $c_{i,j}$  で一定値をとり要素境界で不連続となるような 1 次元リーマン問題を考えると、次のようになる。

$$\frac{\partial \hat{Q}_s}{\partial t} = \frac{\partial F(\hat{Q}_s)}{\partial \xi} \quad (12)$$

$$\hat{Q}_s|_{t=0} = \begin{cases} \hat{Q}_{sR}, & \xi > 0 \\ \hat{Q}_{sL}, & \xi < 0 \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 $\xi$  は要素方向の法線方向の座標であり、添え字  $R$  と  $L$  はそれぞれ境界に隣接した要素の値  $\hat{Q}_s$  を示す。

このリーマン問題は波動の速度がそれぞれ  $c_1, c_2$  である 2 つの 1 次元波動方程式に帰着できるので、解析解を単純に求めることができる。詳細は著者らの文献 1 を参照されたい。

リーマン問題の解から要素境界上の値  $Q_s^*$  が得られ、これから要素境界上の流束ベクトル  $F_{sn}(Q_s^*)$  を計算する。また、空間精度を向上させるために、MUSCL 法<sup>8</sup>を使用する。

#### 4. 結果および検討

衝撃波管の実験条件を表 1 に示す。ここで、 $p_1$  と  $p_2$  は低圧部に注入されたアルゴンの圧力および高圧部に注入されたヘリウムの圧力であり、 $u_s$  は入射衝撃波の代表的な速度、 $M_s$  は衝撃マッハ数である。さらに、反射衝撃波の背後の圧力である  $p_5$  を示している。

Tab. 1: Shock-Tube Conditions

| $p_1$ (Ar) | $p_2$ (He) | $p_5$ (Ar) | $u_s$   | $M_s$ |
|------------|------------|------------|---------|-------|
| 12 kPa     | 0.9 MPa    | 0.57 MPa   | 991 m/s | 3.0   |

#### 4.1 衝突面が平面で先端角 60 °の固体ブロック

まず、10mm の正方形断面で衝突面が平面であるアクリルブロックの場合の実験および計算結果を示す。

図 1 はブロックまわりの流れ場とブロック内部の応力場のシュリーレン写真である。12kPa のアルゴンガス中を左から右にマッハ数 3.02 で伝播してきた入射衝撃波は、拡大流路で多少回折し、ブロックの平面頭部に正面衝突した後反射する。入射衝撃波によって誘起され、ブロック内を伝播する平面応力波 (疎密波) を観察することができる。

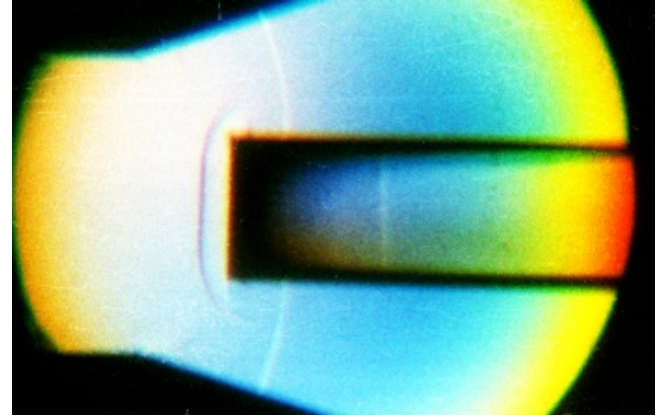


Fig. 1: Schlieren photograph of shock waves and stress waves.

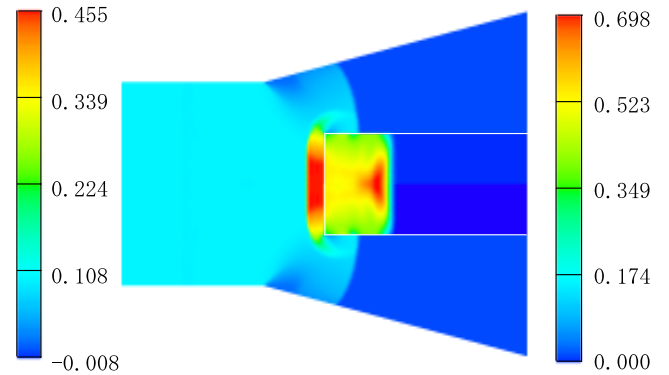


Fig. 2: Contours of pressure and stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

図 1 において、入射衝撃波と固体内の応力波の速度を比較すると、アクリル樹脂の疎密波の速度が約 2.7km/s であることが見積もることができる。今回のシミュレーションで使うアクリルブロックの物性値は表 2 のように要約される。ここで、 $\rho_s$  はアクリル樹脂の密度、 $\nu$  はポアソン比、 $c_1$  と  $c_2$  はそれぞれ疎密波、せん断波の速度である。なお、 $c_2$  は  $c_1$  と  $\nu$  から決定される。

数値シミュレーションにおいては、固体ブロックにマッハ数 3 の平面衝撃波を衝突させるという条件で、表 2 の物性値を用いて計算を行う。図 2 は、図 1 のシュリーレン

Tab. 2: The Properties of Acrylic Block

| $\rho_s$               | $\nu$ | $c_1$    | $c_2$     |
|------------------------|-------|----------|-----------|
| 1056 kg/m <sup>3</sup> | 0.33  | 2.7 km/s | 1.35 km/s |

写真に対応したブロックまわりの圧力場およびブロック内部の応力場 ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ) の計算結果を表す等値面図である。ここで、左側のカラーバーは気体領域の圧力 (MPa) を表し、右側のカラーバーは固体領域の応力値 (MPa) を表す。実験結果と計算結果における波面の様子がかなり良く一致していることが分かる。

平面応力波が伝播する方向を応力が集中するように尖らせたとき、その先端部分では応力集中による固体の破壊が予想される。そこで、衝撃波との衝突面が 20mm × 10mm の長方形断面で、応力波の伝播方向で先端角 60° となるアクリルブロックを用意し、同様の条件で実験を行う。

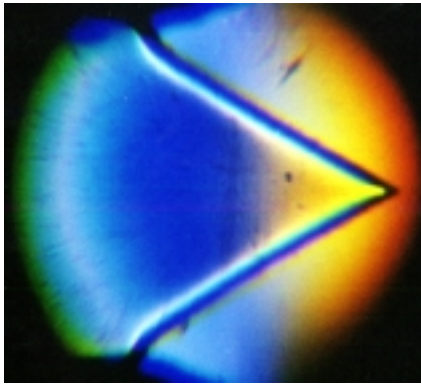


Fig. 3: Schlieren photograph of stress waves.

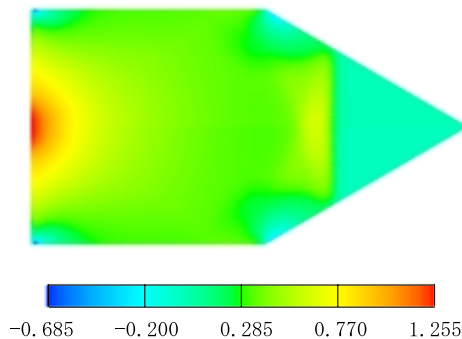


Fig. 4: Contour of stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

図3はブロックの先端部分を撮影したシュリーレン写真である。図1に見られる平面応力波と同じ波面が、尖らせた先端部分へと伝播していく様子を観察することができる。

図4は図3のシュリーレン写真に対応したブロック内部の応力場 ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ) の計算結果を表す等値面図である。衝突面における入射衝撃波の反射により、反射波の背面で圧力が階段状に上昇し、ブロック内部に1次元疎密波が伝播する。1次元疎密波の進行と共に発生、伝播するせん断波、レイリ波の影響により、1次元疎密波の後ろの応力パターンが複雑に変化している。図4の上

下側面は観測部に固定されているため、固定された側部から中心軸に向かって圧縮されており、衝撃波の入射面にかかる圧力上昇が応力波の波面よりも高い値を示している。固定端から自由端に移り変わる部分で膨張波が発生しているが、固体内の応力波 (疎密波) はその影響を受けずに、そのまま尖らせた先端部分へと伝播する。波面が先端部分へ差し掛かるときの応力場を示す計算結果を図5に示す。

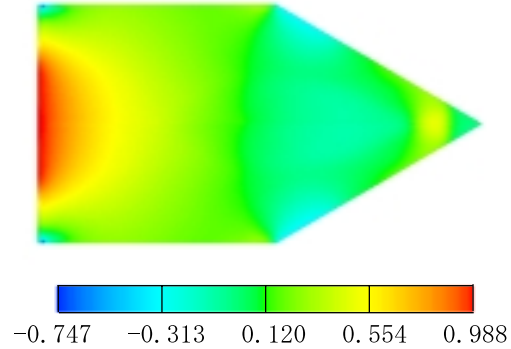


Fig. 5: Contour of stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

先端部分に応力が伝播すると集束するのではないかと考えたが、波面先端の応力値は反射されるまでほぼ一定値 (0.65 MPa) を示している。また図3に示すシュリーレン法の実験結果からも平面応力波を表す細い直線が先端部分で確認されている。実験ではおよそ100回ほどの応力波伝播を繰り返したが、実際の現象として先端部分の破壊は起こらなかった。

先端部分で反射した圧縮波は背後から進行してくるせん断波や角から発生している膨張波と干渉し合う。いくつかの波が重なり合い複雑な応力場を示すが、応力値は急速に減衰していく。これは側部から中心軸に向かって圧縮されているためと考えられる。

#### 4.2 衝突面が凹型で先端角 60° の固体モデル

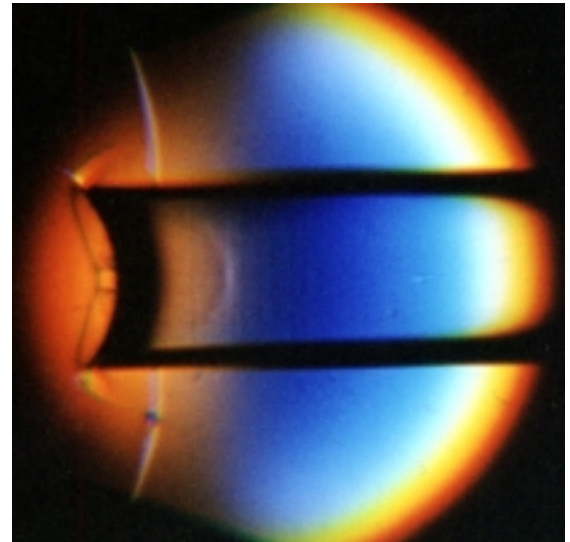


Fig. 6: Schlieren photograph of shock waves and stress waves.

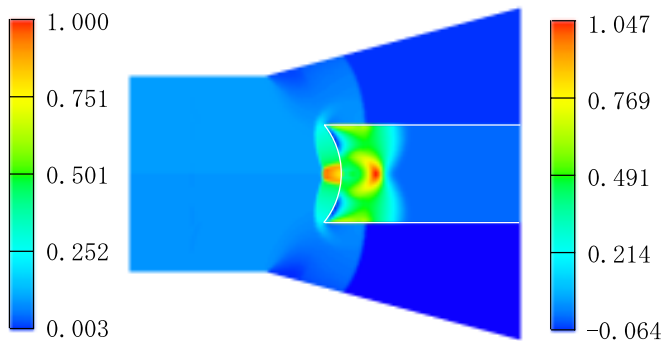


Fig. 7: Contours of pressure and stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

平面衝撃波が凹型反射面で跳ね返るとき、反射衝撃波が焦点に集中することはよく知られている。凹型反射面内部の固体内においては、凹型反射面表面の気体中で反射衝撃波が集束することにより、応力波も固体中で集束する。10mmの正方形断面における凹型反射面アクリルブロックの衝撃波及び応力波の集束を表した実験結果及び計算結果を図6、図7に示す。集束する衝撃波及び応力波について実験結果と計算結果における波面の位置、形状がかなり良く一致していることが分かる。

いったん集束した応力波は円弧状に拡散しながら伝播する。応力波が集束し、拡散する現象はホイヘンスの原理からも説明できる。

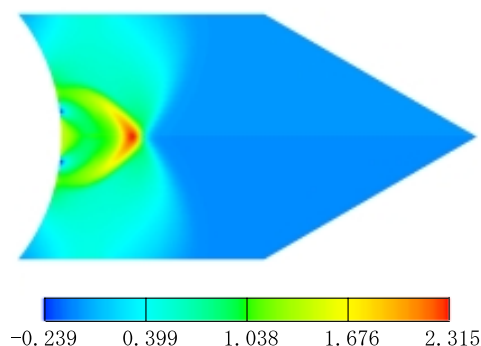


Fig. 8: Contour of stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

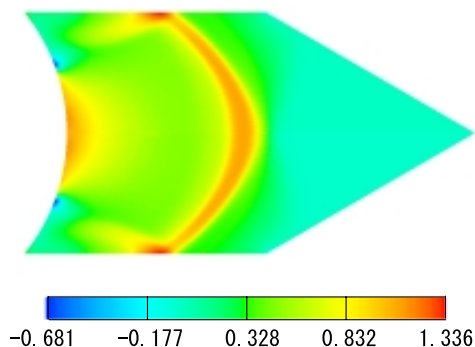


Fig. 9: Contour of stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

図8は今回の固体モデルに対する応力波の集束する位置を示す計算結果である。非常に高い応力値を持つ弓状の波面が描かれている。図9は円弧状に広がる応力波の端が、固定された側部に到達して反射した様子を表す計算結果である。反射応力波が先端部分へ向かう圧縮波と側部壁面でつながったまま中心に向かって伝播する様子が描かれている。

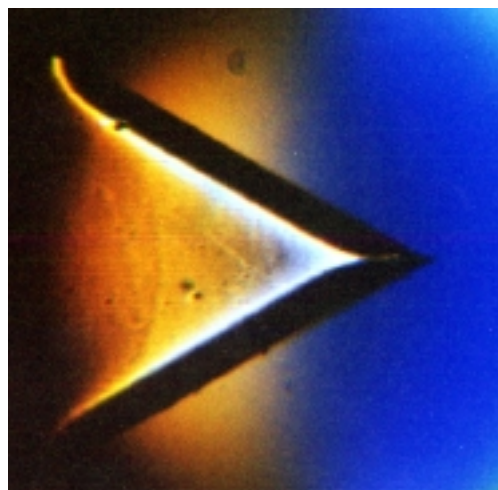


Fig. 10: Schlieren photograph of stress waves.

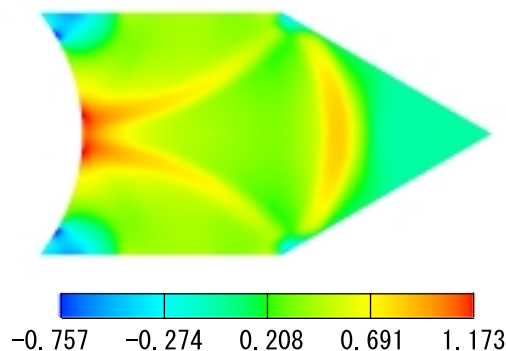


Fig. 11: Contour of stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

図10はシュリーレン瞬間写真である。拡散しながら伝播する応力波の円弧状の波面が、尖らせた先端部分へと向かう様子を観察することができる。図11に対応する計算結果を示す。図10のシュリーレン写真の応力波波面を再現できている。また、側部からの反射波と先端部分へ向かう圧縮波がつながった部分は、固定端から自由端へと移り変わる角の部分へと到達し、角から発生する膨張波によって打ち消され、圧縮波と反射波が切り離れたかのような応力場が描かれている。実験では観測部のアクリルの先端部分だけしか観察することができないので、先端部分へ向かう応力波は観察できたが、中心に向かう側部からの反射波は観察することが出来なかった。

図12に、さらに時間が経過し応力波が先端部分に到達した時の実験結果を示す。先端部分で波面が観察される。図13に実験結果に対応する計算結果を示す。先端部分の圧縮波だけでなく、壁面で反射した圧縮波や角から発生する膨張波、またせん断波などのさまざまな波が干渉する複雑な応力場になっている。

この形状の固体モデルにおいても先端部分の破壊は起こらなかった。シミュレーションでは実験結果に対応した応力波波面を再現できたが、波面の応力値は先端部分が尖っているにもかかわらず減衰している。

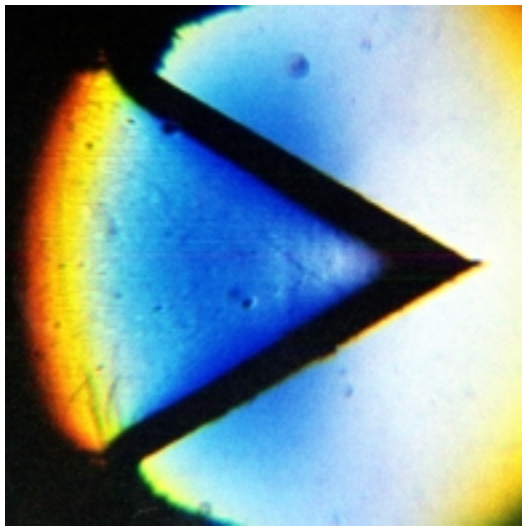


Fig. 12: Schlieren photograph of stress waves.

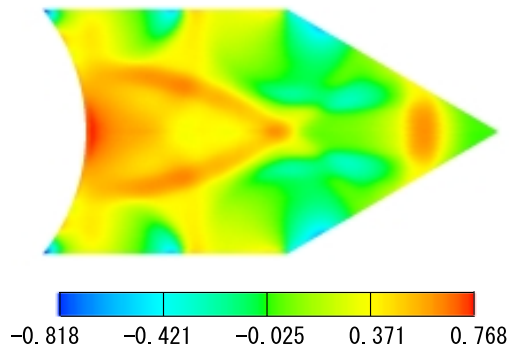


Fig. 13: Contour of stress ( $\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ).

## 5. 結言

本研究において、気体中の入射衝撃波が固体に衝突する時に固体内に誘起される応力波についての実験及び数値シミュレーションを行った。

衝撃波管を用いた実験において、およそマッハ数3の平面衝撃波を、12kPaの静止アルゴンガス中に設置された各種形状の数種類の透明なアクリル樹脂製の固体モデルに入射させた。

今回の研究では、尖らせた先端部分の破壊を考えたが、実際の現象として1つのモデルにつき100回程度の応力波伝播を繰り返したにもかかわらず先端部分の破壊は起こらなかった。またシミュレーションでは、先端部分に向かう応力波は尖らしたことに影響を受けていない。数値シミュレーションでは実験に対応する応力波伝播を再現することができた。

衝撃波との衝突面の形状を変化させると、衝撃波の速度と応力波の速度の違いにより試験片内部の応力場が多様に変化することが観察され、シミュレーションにより再現できた。応力場は衝突面の形状に強く依存しており、伝播方向の形状にはあまり影響を受けていない。

## 参考文献

1. 高野, 後藤, 西野 (1998) 弾性動力学方程式に対する有限体積法日本機械学会論文集 A 編 64-626:2471-2476
2. Takano Y, Hayashi K, Goto T (1997) Simulations for stress waves induced in solid material by reflection of strong shock waves. Proc. of International Conference on Fluid Engineering, JSME Centennial Grand Congress, Tokyo: 413-416
3. Takano Y, Hayashi K, Goto T (1997) A computational procedure for interactions of shock waves with solid materials in liquid. Proc. of 21st International Symposium on Shock Waves, Australia: Paper 5571
4. Takano Y, Mizushiri Y, Goto T (1999) Stress waves induced in an acrylic block by shock waves. 22nd Int. Symp. Shock Wave, London: Paper 2311
5. Takano Y, Akamatsu T (1984) A diaphragmless shock tube. J. Phys. E: Sci. Instrum. 17: 644-646
6. Roe PJ (1981) Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. Comput. Phys. 43:357-372
7. Godunov SK (1959) A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. Mat. Sb. 47:357-393
8. van Leer, B. J., J. Comput. Phys. 43, (1979), 101-139.