

流体・構造の相互依存性が強い連成問題の数値手法

Numerical Methods for FSI Problems with Strong Dependence between Fluid and Structure

張 群, 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, qun@sml.k.u-tokyo.ac.jp

久田俊明 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, hisada@ingram.t.u-tokyo.ac.jp

ZHANG, Qun, Univ. of Tokyo, Hongo 7-3-1, bunkyo-ku, Tokyo

HISADA, Toshiaki, Univ. of Tokyo, Hongo 7-3-1, bunkyo-ku, Tokyo

Abstract A 3D finite element analysis program is newly developed for fluid-structure interaction (FSI) problems with a strong dependence between the fluid and structure. An ALE finite element method with automatic mesh updating is formulated for large changes of the fluid domain. In order to cope with the numerical instability caused by the buckling of a thin shell structure, a strong coupling strategy is adopted together with some stabilization methods. A numerical simulation of a simplified artificial heart pump is demonstrated to show the capability of the proposed methods.

1 要旨

流体・構造連成問題は従来から連続体力学における重要なテーマであったにも拘わらず、構造力学、流体力学のアプローチの違いに起因する統一的解析手法構成の困難さから多くの研究者の手掛けるところとならないで來た。しかし最近では国内外で連成力学問題を正面から解こうとする気運が生じてきており、特に有限要素法の分野では飛躍的な進展を遂げつつある。⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾ 連成問題も構造、流体間の相互作用の弱い問題から強い問題まで様々あり、また手法も構造と流体を別々に解く弱連成法から同時に解く強連成法まで幾つかのバリエーションがある。一方、解析が困難になる場合、その原因が構造側にあるのか流体側にあるのかも問題に応じて異なるため、一般的な対応法というより個別の対応が必要となる。著者らは数年前から拍動型人工心臓血液ポンプの解析を行う機会を得、流体力により柔軟で薄い構造（ダイアフラム）が座屈し、その後極限的変形に至るまでの流体・構造相互依存性が強い連成問題に取り組んできた。⁽⁹⁾⁻⁽¹³⁾

本研究では Arbitrary Lagrangian Eulerian(ALE) 有限要素法を流体領域に、また total Lagrange (updated Lagrange) 法を構造領域に適用し、強連成法、弱連成法の定式化を行い、流体・構造連成解析における強連成法と弱連成法の特徴及び問題点を議論する。流体・構造の相互依存性が強い連成問題における解析上の困難を解決するために、流体・構造の連成法、空間安定化手法、時間安定化手法、時間増分ステップの制御の三つの面から考察する。また、数値解析例を通じて、流体・構造の相互依存性が強い連成問題に適切な数値手法を検証する。

2 基礎方程式

2.1 ALE 表記法による流体の定式化

ALE N-S 方程式の Euler 表示

流速を v 、体積弾性率を B 、圧力を P 、質量密度を ρ とすると、等温変化条件を仮定した流体の連続の式と平衡方程式の ALE 表示は次のようになる。⁽¹⁴⁾

$$\frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial t} \Big|_x + \frac{1}{B} c_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } R_t^f \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_x + \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad \text{in } R_t^f, \quad (2)$$

ただし、 $\partial(\cdot)/\partial t|_x$ は ALE 座標系における時間変化率、 c は速度 v_m を持つ ALE 座標系に対する流体の相対速度 $v - v_m$ を表す。 σ は Cauchy 応力、 g は重力加速度、 R_t^f は時刻 t における流体領域を表す。また右肩の記号 f は流体の諸量であることを示す。なお、Newton 流体を仮定すると構成式を次のようにおく。

$$\sigma = -pI + 2\mu D, \quad (3)$$

ただし、 I は 単位テンソル、 D は歪み速度テンソル、 μ は粘性係数である。境界 ∂R_t^f は基本境界 (Dirichlet-type) $\partial(R_t^f)_g$ と自然境界 (Neumann-type) $\partial(R_t^f)_h$ から構成される。

$$v_i = \bar{v}_i \quad \text{on } (\partial R_t^f)_g \quad (4)$$

$$\sigma_{ji} n_j = \bar{h}_i \quad \text{on } (\partial R_t^f)_h \quad (5)$$

なお、この論文では LES Smagorinsky 乱流モデルを高 Reynolds 数流れに適用する。

有限要素定式化

式 (1), (2) に対し Galerkin 法に基づく有限要素離散化を行うとマトリックス方程式が得られる。これらの式はさらにまとめて次の 1 つのマトリックス方程式で表すことができる。

$$M^f \varphi^* + C^f \varphi^f = F^f \quad (6)$$

ここで

$$M^f = \begin{bmatrix} M^P & \\ & M \end{bmatrix}, \quad C^f = \begin{bmatrix} A^P & G^T \\ -G & A + K_\mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\varphi^f = \begin{Bmatrix} P \\ V \end{Bmatrix}, \quad F^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

である。 M^P と M は圧力、速度についての質量マトリクス、 A^P と A は圧力、速度についての対流項のマトリクスである。 K_μ は粘性マトリクス、 G は発散についてのマトリクス、 P と V は ALE 座標系における圧力と速度ベクトルの時間変化率、 F は外力ベクトルである。

2.2 Total Lagrange 法による構造の有限要素定式化基礎方程式

R_t^s は時刻 t における構造領域である。構造領域の境界 ∂R_t^s は自然境界 $(\partial R_t^s)_g$ と基本境界 $(\partial R_t^s)_h$ からなる。ただし、右肩の符号 s は構造の諸量であることを示す。構造の平衡方程式の Lagrange 表示は次のように示される。

$$\rho_0^s \frac{d^2 u}{dt^2} = \nabla \cdot \Pi + \rho_0^s g \quad \text{in } R_0^s \quad (8)$$

Π は第 1 Piola-Kirchhoff 応力、 ρ_0^s は基準配置での質量密度である。本研究では微小ひずみ・大回転(大変形)を仮定し、構成則としては、第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみの間に線形弾性体の構成式が成立するものとする。⁽¹⁶⁾

構造の有限要素離散化

構造解析は式 (8) の弱形式から有限要素離散を行い、非線型方程式の増分分解を行うと次のマトリックス方程式が得られる。

$$M \Delta \ddot{U} + t K \Delta U = t + \Delta t F - t Q^s \quad (9)$$

ここで、 M は構造の質量マトリックス、 K は接線剛性マトリックス、 F は外力ベクトル、 Q は構造の内力と慣性力に対応する等価節点力ベクトルである。また $\Delta \ddot{U}$ 、 ΔU は加速度増分と変位増分ベクトルである。マトリックスとベクトルの左肩の記号 t 、 $t + \Delta t$ は時刻を示す。

3 流体・構造境界面の制御方法

流体構造境界面での幾何学的連続条件は次式で、

$$v_i^f = v_i^s \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{on } \partial R_t^c, \quad (10)$$

また、境界面での平衡条件は次式で与えられる。

$$\sigma_{ji}^f n_j^f + \sigma_{ji}^s n_j^s = \bar{h}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{on } \partial R_t^c, \quad (11)$$

ただし、 n^f 、 n^s はそれぞれ境界面での流体と構造の外向き単位法線ベクトル、 \bar{h} は境界面における単位面積あたりの外力ベクトルである。 ∂R_t^c は流体・構造境界面の領域を示す。

流体と構造の両者ともに連続体要素を使うと、それらの形状関数が同じであり、かつ節点が共有されていれば、境界面における連続条件(式 (10))と平衡条件(式 (11) の弱形式)は自動的に満足される。一方、流体には連続体要素を用い、構造には構造要素(梁要素又はシェル要素)を用いる場合には、構造側の境界面は節点を結ぶ厚さを持たない面で定義され、幾何学的連続条件はこの面に対して満足される。また平衡条件は、連続体要素の場合と同じように単に共通自由度のマージにより達成されるが、流体要素には回転自由度がないため、節点でのモーメントは構造側だけで自己平衡することになる。

4 連成系方程式

流体・構造連成系の変数ベクトルを次のように定義する。

$$\varphi^{fs} = \begin{Bmatrix} \varphi_i^f \\ \varphi_c \\ \varphi_i^s \end{Bmatrix}, \quad U^s = \begin{Bmatrix} - \\ U_c \\ U_i^s \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

ただし、 φ_i^f ($\varphi_i^f = (P, V_i^f)^t$) は流体の構造とは独立な変数ベクトル、 φ_c ($\varphi_c = V_c$) は流体・構造共有の変数ベクトル(連続性を満足する)、 φ_i^s ($\varphi_i^s = V_i^s$) は構造の流体とは独立な変数ベクトルである。 U^s は構造の変位ベクトルである。この場合連成系の方程式の増分形は次のように表される。

$${}^t M^{fs} \Delta \varphi^{fs} + {}^t C^f \Delta \varphi^{fs} + {}^t K^s \Delta U^s = {}^{t + \Delta t} F - {}^t Q^{fs} \quad (13)$$

${}^{t + \Delta t} F$ は時刻 $t + \Delta t$ での連成系に対する外力ベクトル、 ${}^t Q^{fs}$ は時刻 t での連成系の等価節点力(内力と慣性力を含む)ベクトルである。 ${}^t M^{fs}$ は時刻 t での連成系の質量マトリックス、 ${}^t C^f$ は時刻 t での流体の発散、粘性、対流項を含むマトリックス、 ${}^t K^s$ は時刻 t での構造の接線剛性マトリックスである。ただし、右肩符号 fs は流体と構造の両方からの寄与を意味する。これらのマトリックスとベクトルの詳細は以下のように表される。

$${}^t M^{fs} = \begin{bmatrix} {}^t M_{ii}^f & {}^t M_{ic}^f & \mathbf{0} \\ {}^t M_{ci}^f & {}^t M_{cc}^f + {}^t M_{cc}^s & {}^t M_{ci}^s \\ \mathbf{0} & {}^t M_{ic}^s & {}^t M_{ii}^s \end{bmatrix} \quad (14)$$

$${}^t C^f = \begin{bmatrix} {}^t C_{ii} & {}^t C_{ic} & \mathbf{0} \\ {}^t C_{ci} & {}^t C_{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad {}^t K^s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t K_{cc} & {}^t K_{ci} \\ \mathbf{0} & {}^t K_{ic} & {}^t K_{ii} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$${}^t Q^{fs} = \begin{Bmatrix} {}^t Q_i^f \\ {}^t Q_{vc}^f + {}^t Q_c^s \\ {}^t Q_i^s \end{Bmatrix}, \quad {}^{t + \Delta t} F^{fs} = \begin{Bmatrix} {}^{t + \Delta t} F_i^f \\ {}^{t + \Delta t} F_c \\ {}^{t + \Delta t} F_i^s \end{Bmatrix} \quad (16)$$

以上の式における添字 c と i は共通部分と独立部分の変数であることを意味する。 ${}^t M_{ic}^f$ と ${}^t M_{ci}^f$ は質量マトリックスの連成部分、 ${}^t C_{ic}$ と ${}^t C_{ci}$ は粘性項マトリックスの連成部分である。 ${}^t Q_{vc}^f + {}^t Q_c^s$ は内力ベクトルの連成部分を表す。ただし、 ${}^t M^{fs}$ と ${}^t C^f$ は割線型マトリックスの意味になる。著者らは ${}^t M^{fs}$ 、 ${}^t C^f$ について接線型マトリックスも誘導しているが、⁽⁹⁾ 後述のように時間増分ステップの制御を行い、適切な Δt を保つ場合は割線型マトリックスを用いても収束性の問題を全く生じない。

時間積分法(Newmark- β 法)を適用すると、式 (13) は次のようにになる。

$$[{}^t M^{fs} + \Delta t \gamma {}^t C^f + \Delta t^2 \beta {}^t K^s] \Delta \varphi^{fs} = {}^{t + \Delta t} F - {}^t Q^{fs} \quad (17)$$

ただし、 Δt は時間増分ステップ、 γ と β Newmark- β 法のパラメータである。更に式 (17) を整理すると次式 (18) が得られる。

$$\begin{bmatrix} {}^t \Lambda_{ii}^f & {}^t \Lambda_{ic}^f & {}^t \mathbf{0} \\ {}^t \Lambda_{ci}^f & {}^t \Lambda_{cc}^f + {}^t \Lambda_{cc}^s & {}^t \Lambda_{ci}^s \\ \mathbf{0} & {}^t \Lambda_{ic}^s & {}^t \Lambda_{ii}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varphi_i^f \\ \Delta \varphi_c \\ \Delta \varphi_i^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t R_i^f \\ {}^t R_c \\ {}^t R_i^s \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 ${}^t\Lambda_{ic}^f$ と ${}^t\Lambda_{ci}^s$ はマトリックスの連成項である。内力ベクトルの連成項は残差ベクトル \mathbf{R} の流体・構造共通部分 ${}^t\mathbf{R}_c$ に含まれる。

5 連成系の解析手法

5.1 連成系の解析手順

拡張された PMA⁽¹²⁾ に基づくメッシュの自動制御を含めた流体・構造連成系の解析手順は次のように示される。

時間増分ステップの開始

1. 時間増分 $t + \Delta t$
2. 連成系変数ベクトルの予測
3. メッシュの制御
4. 反復計算の開始
 - a 連成系方程式の求解 (式 (18))
 - b メッシュの制御
5. 反復計算終了

時間増分ステップ終了

以下においてはステップ 4.a の連成系方程式の求解について検討する。

5.2 強連成法

強連成法は連成系解析のステップ 4.a で式 (18) を一括して解くため、連成系の反復計算で収束速度が確保できる。特に流体と構造の相互依存性が強い問題に対して強連成は必要不可欠になる場合もある。⁽¹²⁾

5.3 幾つかの弱連成法

5.3.1 もっとも単純な弱連成法 (simple weak coupling method)

流体から解析をスタートするもっとも単純な弱連成法の求解手順は次のように示される。

1. 流体の解析

$\Delta\varphi_c = \mathbf{0}$ を仮定して、

$$\Lambda_{ii}^{f(i-1)} \Delta\varphi_i^f = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_i^{f(i-1)} \quad (19)$$

を解き、流体の内部残差による流体内部変数ベクトルの増分量 $\Delta\varphi_i^f$ が得られる。このステップで前反復ステップで得られた構造の速度、加速度を境界条件として流体に与える。つまり流体・構造の境界面における変位(、速度、加速度)の基本境界条件問題になる。この方法は境界面における節点の移動を許容しないため、境界面での流体力を過大に評価する傾向がある。

2. 流体諸量の更新：

$(i-1) \rightarrow i'$ 、更新された流体力を構造に与える。

3. 構造の解析：

流体からの付加マトリックスを無視して次式；

$$\Lambda_{cc}^{f(i')} \Delta\varphi_c + \Lambda_{ci}^{s(i-1)} \Delta\varphi_i^s = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c^{s(i')} \quad (20)$$

$$\Lambda_{ic}^{s(i-1)} \Delta\varphi_c + \Lambda_{ii}^{s(i-1)} \Delta\varphi_i^s = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_i^{s(i-1)} \quad (21)$$

により構造の応答を求める。更新された構造の変位、速度、加速度を流体に与える。

ステップ 3 では、ステップ 1 で得られた(過大評価された)流体力を構造に与えて構造のみの計算を行うが、このとき、周囲の流体による抑制作用が考慮されない為構造の応答も過大評価する傾向となる。このような流体・構造間の反復を続けるとだんだん

間違った方向の解に収束するか、或いは発散を引き起こすことになる。即ち単純な弱連成法は流体解析と構造解析が独立にいる為、プログラムの開発はもっとも簡単であるが、流体・構造の相互依存性が強い問題に対しては有効ではない。

5.3.2 流体力を緩和する修正弱連成法 (1)

もっとも単純な弱連成法の収束上の問題を解決するために、野村ら⁽⁷⁾は流体力を緩和することにより構造解析の安定性を実現する改良型弱連成を提案した。本研究では、野村らの研究に基づいて、新たに流体力の増分を緩和することによる修正弱連成法を検討した。具体的な解析手順は次のように示される。

1. 流体力初期値の代入

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_f^{(0)} = {}^t \mathbf{F}_f \quad (22)$$

2. 反復解析

a. 反復計算の開始 ($i=1, N$)

b. 流体の解析(反復)

c. 緩和された流体力を構造に与える

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_f^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_f^{(i-1)} + \\ &\frac{{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_f^{(i)} - {}^t \mathbf{F}_f}{N} \quad \text{if } i < N \end{aligned} \quad (23)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_f^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_f^{(i)} \quad \text{if } i < N \quad (24)$$

d. 構造の解析(反復、流体の付加質量と付加粘性は考慮しない)

e. 更新された構造の変位、速度、加速度を流体に与える

3. 反復計算の終了

ここで、N は反復回数で、収束状況により修正する。

5.3.3 付加質量の導入による修正弱連成法 (2)

構造の解析のステップで構造の質量マトリックスに拡大係数を掛けることにより流体の付加質量効果を近似する。つまり、

$$\mathbf{M}_{\text{add}} = k \mathbf{M}_{cc}^s \quad (25)$$

ここで k は 1 より大きい拡大係数で、本文の解析例では適切な値を探索して決定する。

5.3.4 構造の応答を緩和することによる修正弱連成法 (3)

張ら^{(9), (11)}は構造の応答を緩和することによる修正弱連成法を提案した。つまり、構造の解析のステップで得られた解の増分量(加速度、速度、変位)に緩和係数 α を掛ける。この緩和された構造応答の増分値を前反復ステップで得られた解に加算し、修正された構造の変位、速度、加速度が得られる。

$$\Delta\varphi_i^s = \alpha \dot{\Delta}\varphi_i^s \quad (26)$$

この方法は単純な弱連成法における収束性の問題を解決でき、また、緩和係数を調整することにより解析の収束性を確保した上で計算の効率を向上させることができる。しかし、流体・構造の相互依存性が強くなるに従って、緩和係数を小さくしなければならないため、反復計算の収束速度が悪くなる。

なお構造の応答を緩和すること(式(26))は、式(20)と式(21)の右側の残差ベクトルの各成分に同じ緩和係数 α を掛けること、又は式(20)と式(21)の左側のマトリックスに $1/\alpha$ を掛けて拡大することと等価である。

6 数値安定化手法と時間増分ステップの制御

6.1 空間安定化手法

流体解析における空間安定化手法

Reynolds 数が高く、対流項が支配的な流れに対してはメッシュの分割が不十分な場合に解の空間の乱れがよく起る。このような不安性を防止するための空間安定化手法として、本研究では SU (Streamline Upwind) 法又は SUPG (Streamline Upwind/Petrov Galerkin) 法を流体要素に適用した。⁽¹⁵⁾

6.2 時間安定化手法

構造解析における安定化手法

薄い膜構造の動的解析を行う時、膜が薄くなると共に回転自由度に対応する構造の固有振動数が大きくなるため、動解析における限界時間ステップが厳しくなる。本研究では Pica, A. ら⁽¹⁷⁾により提案された薄い膜構造に対する効率的な質量マトリックス - 修正質量マトリックスを適用する。この修正質量マトリックスは薄肉膜構造の高次振動数を低下させて、実用上解の精度を損うことなく動的座屈解析の数値安定性を向上させる。

時間積分法における安定化手法

拡張された PMA⁽¹²⁾ 法は予測ステップで加速度をゼロにすることにより時間方向の安定性を向上させ得る。また、構造の座屈挙動を伴う非線形解析においては、高次モードを減衰させることにより限界時間増分ステップの改善が期待できる。Newmark - β 法においては、⁽¹⁸⁾

$$\gamma > \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (27)$$

となるように γ 値を $1/2$ から増加させていくことにより数値減衰の大きさを連続的に変化させることができる(例えば、 $\gamma = 0.6, \beta = 0.3025$)。この減衰によると低次モードにもある程度の減衰を生じる。

6.3 時間増分ステップの制御

本問題ではシェルの座屈により力学特性が大きく変化するので、解の収束性と計算効率を保証する為には時間増分ステップ Δt の適切な自動制御法が必要となる。本研究では次の制御法を適用した。即ち、第 k 時間増分ステップにおいて N_k 回の反復で収束条件が満足されると、次の時間増分ステップ Δt_{k+1} は以下の式(28)を利用して調節する。ただし、 N_{exp} は希望する反復回数である。一方、もし最大反復回数 N_{max} 回の反復をしても収束条件が満足されない場合には Δt を式(29)によって減少させ、このステップの解析を再スタートする。つまり本手法では反復回数を希望する回数に近づけるように時間増分ステップの大きさを調節している。

$$\Delta t_{k+1} = \Delta t_k \times N_{\text{exp}} / N_k \quad (28)$$

$$\Delta t_{k+1} = \Delta t_k \times N_{\text{exp}} / N_{\text{max}} \quad (29)$$

7 並列計算

流体・構造連成解析では通常、問題の規模(総自由度と連成解析の反復回数)が大きくなるため、並列計算などの工夫が必要となる。本研究では東京大学情報基盤センターの SR8000 を用いて 3 D 連成解析を行う。通信 library は MPI を使用し、ソルバについてはバンド型 Gauss 消去法を利用した。⁽¹⁹⁾

8 解析例

8.1 簡単な流入問題

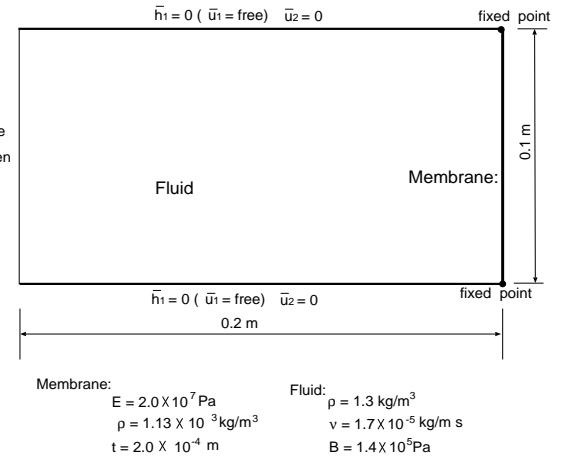


Fig. 1: Simple interaction problem

解析対象(右端を弾性膜で閉じた円筒)の中央断面及び諸元を図 1 に示す。応力境界条件としては、図 2 に示すように流入口の法線方向の応力を 600 秒間で最大値 1000 Pa まで正弦関数に従い増加させる。構造には 4 節点 MITC シェル要素、流体には六面体 8/1d(8 流速節点、一定圧力)混合要素を用いた。なお以降の問題もすべてこの要素を用いる。表 1 は単純な弱連成法と強連成法の計

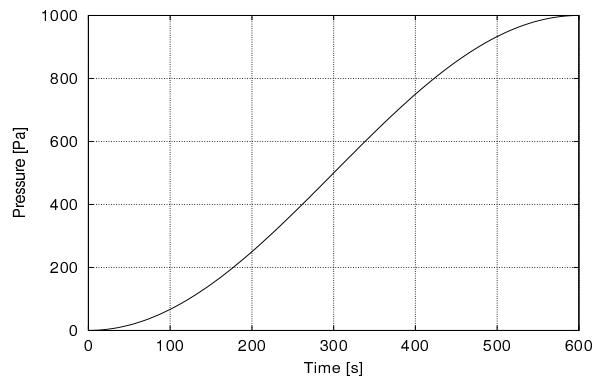


Fig. 2: Pressure history given to left boundary

算効率及び $t = 600\text{s}$ での膜中央点の水平方向の変位を比較したものである。この問題は、流体にかける外力の変化により構造の応答が引き起こされる流体・構造の相互依存性が弱い連成問題なので、単純な弱連成法でも解析の収束性が保証でき、両者にかかる計算時間はそれほど差がない。

8.2 空中に吊された膜の座屈挙動

解析対象領域及び諸元を野村の研究⁽⁸⁾を参考して図 3 のように定める。膜の諸元は薄いビニール製の膜を

表 1: Computational efficiencies of simple weak coupling method and strong coupling method ($t = 100$ s)

連成法	Δt	反復回数	1ステップの計算時間	膜中央点の変位($t=600$ s)
強連成法	1.0 s	5	70 秒	0.0294 m
単純な弱連成法	1.0 s	5	100 s 分	0.0294 m

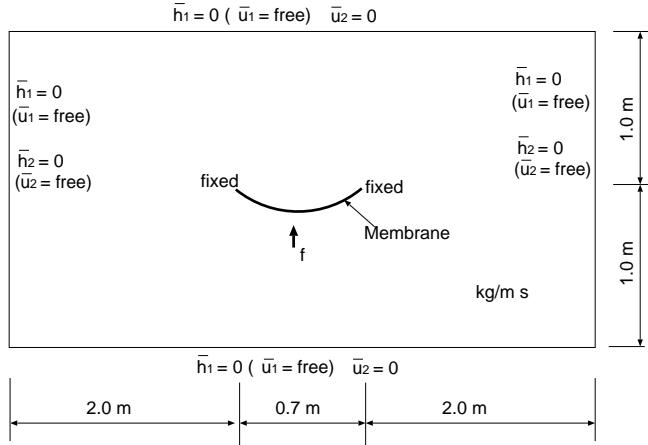


Fig. 3: Membrane model in air (Nomura and Shimmyo⁽⁸⁾)

想定して、厚さは $t = 2.01 \times 10^{-4} m$, ヤング率 $E = 2.0 \times 10^9 Pa$, 質量密度は $\rho = 0.6963 \times 10^3 kg/m^3$ とする。流体としては空気を想定し密度 $1.3 kg/m^3$, 動粘性係数 $\nu = 1.7 \times 10^{-5} kg/m \cdot s$, 体積弾性率 $B = 1.0 \times 10^5 Pa$ とする。初期条件としては、流体の初期流速と初期圧力をゼロとする。膜の初期応力はゼロで、初期形状は図 3 に示される寸法の懸垂線（カテナリ）である。膜に無重力状態（重力と外力の釣り合い状態）を仮定して、上向きの等分布荷重を作成させる。この等分布荷重は、1.0s でちょうど膜の自重に相当する上向きの荷重になるような速度で、ゼロから線形的に増加させる。また、3D のプログラムで解析するので紙面方向は滑り条件を与える。メッシュの制御方法として、膜の上下部に位置する流体節点の運動は膜からの距離により比例的に移動させる。このような構造座屈を伴う連成問題は、構造座屈が発生する段階で構造応答の急激な変化が引き起こされるため（図 5）、単純な弱連成法は無効になる。5 節で列挙した弱連成法と強連成法の計算効率と精度の比較を表 2 に示す。この表から分かるように構造の座屈により流体・構造の相互依存性が強くなるため、単純な弱連成法では収束結果が得られず、また修正弱連成法でも計算効率が悪くなる。図 4 は時刻 $t=1.76$ s で膜が完全に反転した状態における空気の流速分布を示すものである。更に膜の中央点の垂直方向の変位と速度の履歴の比較（強連成法と修正弱連成法（3）による結果）を図 5 に示す。

8.3 人工心臓検証モデルの 3D 連成解析

解析モデルは別途行われた可視化実験に合せて設定した。解析モデルの縦断面の幾何形状と寸法を図 6 に示す。流体の物性値は可視化液 (NaI) に合せて質量密度 $\rho = 1.90 \times 10^3 kg/m^3$, 粘性係数 $\mu = 3.42 \times 10^{-3} Pa \cdot s$, 体積弾性率 $\kappa = 2.06 \times 10^9 Pa$ とした。ポリウレタン製の

表 2: Computational efficiencies of modified weak coupling method and strong coupling method ($t = 2.0$ s)

連成法	Δt	反復回数	1ステップの計算時間	残差ベクトルの二次ノルマ
強連成法	2.58e-3	6	30 秒	1.2e-16
修正弱連成法 (1) ($N = 10$)	8.24e-4	10	5 分	6.2e-15
修正弱連成法 (2) ($k = 4.0$)	8.24e-4	29	6 分	8.4e-15
修正弱連成法 (3) ($\alpha = 0.2$)	8.24e-4	73	15.2 分	1.0e-14
単純な弱連成法	失敗			

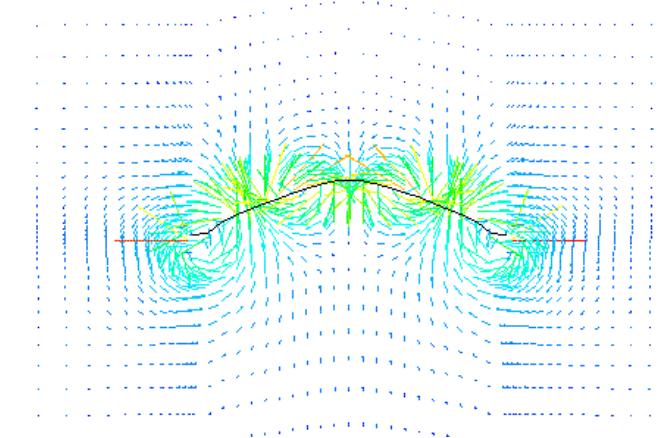
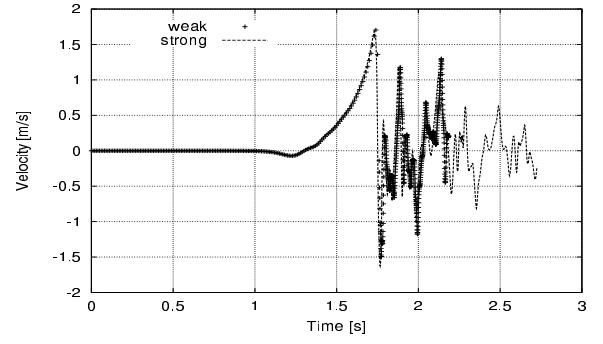
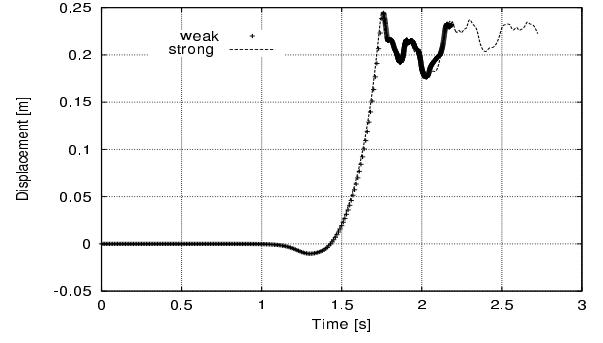


Fig. 4: Deformation of membrane and velocity distribution of air ($t = 1.76$ s)



(a) Velocity



(b) Displacement

Fig. 5: Buckling behavior of membrane in wind (comparison of strong coupling and modified weak coupling methods(3))

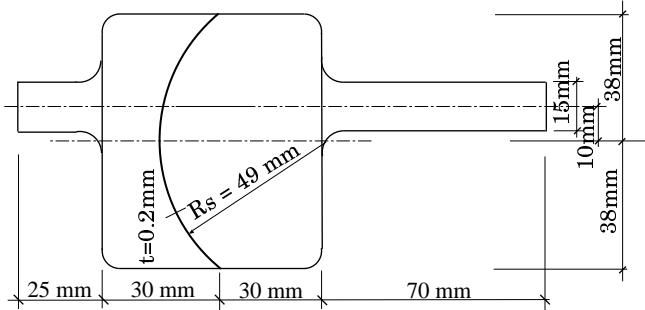


Fig. 6: 3D simplified artificial heart model (cross section)

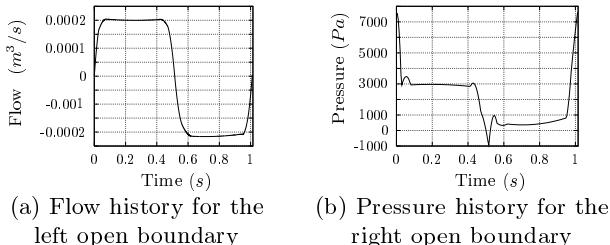


Fig. 7: Computational conditions for the open boundaries

ダイアフラムの材料定数は、ヤング率 $E = 2.0 \times 10^7$ Pa, ポアソン比 $\nu = 0.45$, 質量密度 $\rho = 1.13 \times 10^3$ kg/m³, また厚さは $t = 0.26$ mm である(周囲の固定部に近いところは 0.26mm より少し厚く設定した)。流体の初期条件としては、流速は 0, 圧力は静水圧とする。ダイアフラムは初期に自然状態(無応力状態)にあるものとする。境界条件としては、左端開口部の水平方向に流量を指定する(図 7(a))。ただし流速分布は均一分布を仮定し、また垂直方向の応力値は 0 と与える。右端開口部においては応力が指定される(図 7(b))が、数値安定性を確保するために流速分布として均一分布を仮定する。垂直方向の応力値は 0 とする。本問題は構造の極端な座屈と複雑な流れ場を含む大規模問題なので、現有の計算機資源で解析を可能とするために以下の方法を採用した。流体解析には SU 法、構造の MITC シェル要素には修正質量マトリックスを用いた。時間積分法には数値減衰を導入し、また前述の自動的時間ステップを採用した。1 周期の解析は SR8000 を 8PE (バンド型 Gauss 消去法の並列計算) 使用して大体 1 週間程度であった。流速とダイアフラムの変形履歴を図 8 に示す。

本解析では、修正弱連成法を用いる場合は時間増分ステップと緩和係数をかなり小さく与えても ($\Delta t = 1.0 \times 10^{-15}$ s) 1 ステップの計算すらできなかった。この原因を分析すると以下のことが分かった。つまり、流体解析のステップでは流体の境界は総て流速条件が与えられ、体積弾性率が(構造の剛性に較べ)大きい流体に対して、illposed 問題になる。具体的には、入り口からの流体の流入により莫大な流体圧力が引き起こされ、その流体力を構造に与えると構造の大きな変形がもたらされ、次に流体の解析ステップに入ると解が発散するのである。

9 まとめ

流体と構造の相互依存性が弱い連成系に対しては、単純な弱連成法は有効である。流体と構造の相互依存性が

強くなると、単純な弱連成法では収束解が得られないことがある。本文で採用した修正弱連成法を適用すると収束解が得られる場合もあるが、時間増分ステップ Δt の制限値が相当小さくなり、各時間増分ステップにおける反復回数は数十回程度かかる。従って計算効率を考慮すると、現実には弱連成法による解析は不可能であると考えられる。また 3 D 人工心臓検証モデルのような流体領域の open 界面に非定常な流速条件を与える連成問題に対しては弱連成法では流体解析ステップで illposed 問題になるため、強連成法は必要不可欠である。また、構造の極端な座屈と複雑な流れ場による大規模問題なので、現有の計算機資源で解析を可能とするためには、時間と空間の安定化手法、時間増分ステップの制御法及び並列化手法が要求される。

参考文献

- [1] Nitikitpaisoon, C. and Bathe, K. J., *Comput. Struct.*, 47-4/5 (1993) 871–891.
- [2] Bathe, K. J., ほか 2 名, *Comput. Structu.*, 56-2/3 (1997) 193–213.
- [3] Kalro, V. and Tezduyar, T. E., *Fourth Japan-US Symposium on the Finite Element Methods in Large-Scale Computational Fluid Dynamics Proceedings*, (Japan, Tokyo, 1998) 31–36.
- [4] Stein, K., ほか 3 名, *Fourth Japan-US Symposium on the Finite Element Methods in Large-Scale Computational Fluid Dynamics Proceedings*, (Japan, Tokyo, 1998) 119–124.
- [5] Rifai, S. M., ほか 4 名, *Submitted for publications in “Parallel Computational Methods for Flow Simulation and Modeling”*, *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg. special issue*
- [6] Johnson, A. A. and Tezduyar, T. E.: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 145, pp. 301–321 (1997).
- [7] Nomura, T. and Shinmyo, M., *Submitted for publications in Int. J. of Computational Fluid Dynamics (IJCFD)*.
- [8] Nomura T. and Shinmyo M., *Fourth Japan-US Symposium on the Finite Element Methods in Large-Scale Computational Fluid Dynamics Proceedings*, (Japan, Tokyo, 1998) 67–72,
- [9] 張群, 東京大学学位論文, 1999.
- [10] Zhang, Q. and Hisada, T., *Theoretical and Applied Mechanics*, Proceedings of the 47th Japan National Congress for Applied Mechanics, 47 (1998) 167–174.
- [11] 張群, 久田, EM2000 論文集.
- [12] 張群, 久田 俊明, 構造座屈と領域大変動を伴う流体・構造連成問題の ALE 有限要素解析, 日本機械学会論文集掲載予定.
- [13] 張群, 久田 俊明, 日本機械学会論文集投稿予定.
- [14] Huerta, A. and Liu, W. K., *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 69 (1988) 277–324.
- [15] Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R.: *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 32 (1982) 199–259

- [16] Bathe, K.-J., Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Inc., 1996
- [17] Pica, A. and Hinton, E, *Int. J. for Numer. Methods Engrg.*, 17 (1991) 1749-1761.
- [18] 久田俊明, 野口裕久: 「非線形有限要素法の基礎と応用」, 丸善 (1995).
- [19] 村田大二郎, 東大修士論文, 2000.

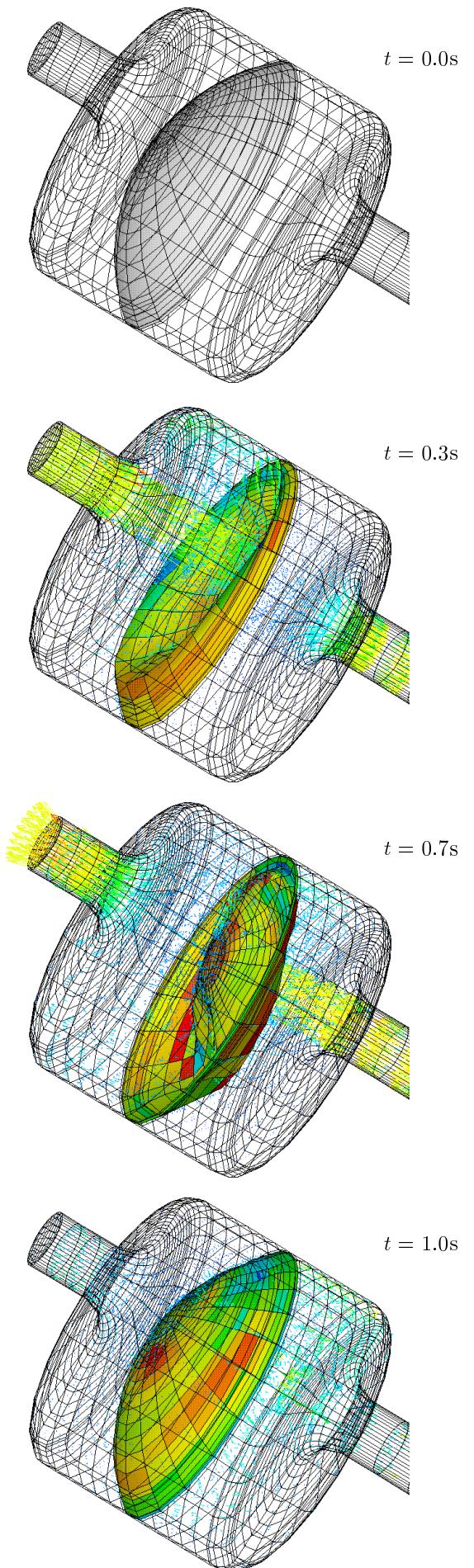


Fig. 8: Deformations and velocity distributions