電磁堰シールに伴う不安定現象解析

An Instability Analysis of Electromagnetic Seal

河野 晴彦，慶應大院，〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: kohno@tana.mech.keio.ac.jp
棚橋 隆彦，慶應大，〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: tana@mech.keio.ac.jp
Haruhiko Kohno, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, JAPAN
Takahiko Tanahashi, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, JAPAN

This paper presents the hybrid finite element and boundary element method (FEM-BEM) with a level set method (LSM) for the analysis of a free surface deformed in the alternating current magnetic field. Three-dimensional numerical simulations in the electromagnetic seal are carried out to investigate the behavior of the liquid metal. The free surface deforms more largely in the lower direction than that apart from the coil. Moreover, the gradient of the deformation to time becomes bigger as the increase of the current density in the coil because of the enhancement of the Lorentz force. However, this can not be applied to the case which selects the frequency as the variable parameter. It is found the free surface near the coil deforms irregularly as the increase of the frequency related with the skin effect.

１．緒言

コイルに電流を流すことによって生じる交流磁場は，導電性を有する溶融金属内で電磁誘導作用により起電力を生じさせ，その結果，液体内部に誘導電流が発生する．そして，磁場内に電流が流れることによってローレンツ力が生じ，それによって流体の運動状態が変化することになる．本研究ではこの電磁力学的挙動を基礎におき，非接触で導電性流体を制御する工学的手法の一つである電磁堰シールの解析を行った．その際に，大きく変形する自由表面[(1)]の挙動に対しては Level Set 法[(2)]を適用し，更に交流磁場に対しては Hybrid FEM-BEM[(3)]により数値解析を行った．

２．数値解析手法

２.１ Level Set 法

自由表面は，マクロな視点で見れば物理量が不連続に変化する面として捉えられるが，ミクロな視点で見ると，およそ分子の平均自由行程の 3 倍ほどの厚さを持って物理量が連続的に変化している．Level Set 法は，この概念を数値計算上の自由表面の解析に応用した手法で，物理量が連続的な変化をなすこの微小な幅を，格子幅の 3～5 倍程度の大きさに相当する ε まで広げることによって自由表面の特異性を消去し，あたかも 1 流体モデルのように 2 流体モデルを扱うことができる．

2 つの流体の識別は，自由表面からの垂直距離を表す距離関数 ϕ_1 を導入して以下の様に定義する．

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x},t) > 0 & in \quad fluid\,2 \\ f_1(\mathbf{x},t) = 0 & in \quad free \quad surface \\ f_1(\mathbf{x},t) < 0 & in \quad fluid\,1 \end{cases} \tag{1}$$

また，諸物理量を，自由表面を中央に挟むバンド幅 2 ε 内で連続的に変化させるために，2 つの近似超関数，すなわち，近似 Heaviside 関数と近似 Delta 関数を導入した．近似 Heaviside 関数とそれを用いたスムージングの式，及び近似 Delta 関数を以下に示す．

$$\begin{cases} H_e(f_1) = 0 & if \quad f_1 < -e \\ H_e(f_1) = \dfrac{1}{2}\left\{1 + \dfrac{f_1}{e} + \dfrac{1}{p}\sin\left(\dfrac{pf_1}{e}\right)\right\} & if \quad |f_1| \le e \\ H_e(f_1) = 1 & if \quad f_1 > e \end{cases} \tag{2}$$

$$A = A_1 + (A_2 - A_1)H_e \tag{3}$$

$$\begin{cases} d_e(f_1) = \dfrac{1}{2e}\left\{1 + \cos\left(\dfrac{pf_1}{e}\right)\right\} & if \quad |f_1| < e \\ d_e(f_1) = 0 & otherwise \end{cases} \tag{4}$$

(3)式における A_1，A_2 にはそれぞれの流体が有する密度，動粘性係数，電気伝導率を代入する．また，(4)式は表面張力項に導入するものだが，これによって表面圧から体積力に変換がなされることになる．この考えは CSF（continuum surface force）法[(4)]に基づくものである．

自由表面は次式で示される界面の運動学的条件に従って変形する．

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)f_1 = 0 \tag{5}$$

(5)式は，界面の運動速度が流速に等しいことを表している．しかし，その様な形で全領域において(5)式を計算すると，自由表面（ϕ_1=0）以外の場所で距離関数の性質が崩れることになる．それを防ぐために以下の式で再初期化（reinitialization）[(3)]を施す．

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = S(f_1)(1 - |\nabla f_1|) \tag{6}$$

$$S(f_1) = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + e^2}} \tag{7}$$

(7)式で示される $S(\phi_1)$の絶対値は，ϕ_1 の絶対値が小さい時に小さくなり，ϕ_1 の絶対値が大きな時に大きな値をとる．この事は，自由表面近傍における再初期化における修正量は少なく，自由表面から離れるにしたがってその値が大きくなることを示している．τ は疑似時間であり，実際の時間 t とは無関係である．

Level Set 法では自由表面が陰的に決定されるために，再初期化の過程で非物理的な体積変動が生じ，体積が保存されなくなる．これが Level Set 法の短所と言えるべき点であるが，以下の式によって体積の保存を満たすための修正を行う[(5)]．

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \{V_0 - V(t)\}(-P + \nabla\cdot\mathbf{n})\cdot|\nabla f_1| = 0 \tag{8}$$

$$V_0 = \iiint H_e(f_1)dxdydz\Big|_{t=0} \tag{9}$$

$$V(t) = \iiint H_e(f_1)dxdydz\Big|_{t=t} \tag{10}$$

(8)式における P は計算安定化のための正の定数で，本研究

においては 1 と設定した．また，(6)，(8)式はそれぞれ次式で示す移流方程式の形で記述できる．

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+S(f_1)\frac{\nabla f_1}{|\nabla f_1|}\cdot\nabla f_1=S(f_1) \tag{11}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\{V_0-V(t)\}(-1+\nabla\cdot\mathbf{n})\frac{\nabla f_1}{|\nabla f_1|}\cdot\nabla f_1=0 \tag{12}$$

(5)，(11)，(12)式は CIP 法[6]を適用することによって高精度に解析した．

2.2 A-f 法

磁束密度と電界を磁気ベクトルポテンシャル A とスカラーポテンシャル ϕ_2 を用いて表すと，

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{13}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla f_2-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{14}$$

と書ける．また，アンペアの法則とオームの法則及び電荷保存の法則は以下に示すものである．

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \tag{15}$$

$$\mathbf{J}=s_m(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{16}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}=0 \tag{17}$$

(16)式を(15)式に代入したものと，(16)式の両辺に発散をとった後(17)式を適用したものに(13)，(14)式を代入すると，以下に示す A-f 法の基礎式が導かれる．

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{v}=-\nabla f_2-\frac{1}{s_m}\nabla\times\left(\frac{1}{m}\nabla\times\mathbf{A}\right) \tag{18}$$

$$\nabla\cdot\left[s_m\left\{\nabla f_2+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{v}\right\}\right]=0 \tag{19}$$

本研究では周波数が比較的小さい問題を扱っているため，クーロンゲージ

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0 \tag{20}$$

を適用すると，(18)，(19)式は以下の様に簡単化される．

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{v}=-\nabla f_2+\frac{1}{s_m m}\nabla^2\mathbf{A} \tag{21}$$

$$\nabla^2 f_2=\nabla\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{22}$$

2.3 境界要素法

境界要素法による解析は，注目した領域に対して境界のみを離散化するため，2 次元問題を 1 次元的に，3 次元問題を 2 次元的に取り扱うことができる利点がある．有限要素法では適当な境界条件が与えられたときには解くことができるが，渦電流問題等の開領域問題の場合には境界条件の設定が困難になる．従って，本研究で行う解析では，円柱格子外のコイルを含む空気領域において，無限または半無限領域場を適切に表現することができる境界要素法を適用することにする．この領域についての A-f 法の基礎方程式は次式で与えられる．

$$\mathbf{J}_f=-\frac{1}{m_0}\nabla^2\mathbf{A} \tag{23}$$

ここで $\mathbf{J}_f$ は強制電流密度である．

2.4 二重格子法

格子節点上の磁気ベクトルポテンシャル **A** およびスカラーポテンシャル ϕ_2 の値はマトリクスの逆行列を Skyline 法により計算することで得られるが，この時格子数は計算メモリに対応して限界があり，また，格子数が多いほど計算に多大な時間を要するという欠点がある．そこで本研究では，二重格子法を適用することによってこの問題を解決した．この手法は，速度場解析格子（初期設定格子）と電磁場解析格子の 2 種類を設定することによって，計算メモリの削減，及び計算時間の短縮をはかるものである．図 1 にその概要を示す．

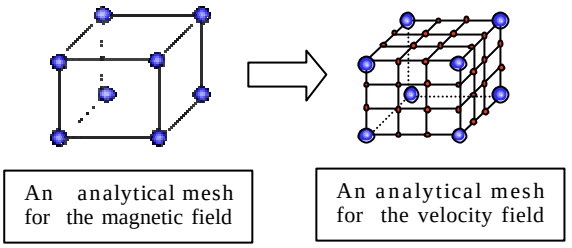

Fig.1 Linear interpolation of the magnetic field variables.

まず，速度場解析格子 27（3×3×3）個をひとまとめとして，新たに 1 つの格子を形成する．これを電磁場解析格子として適用するわけだが，その頂点における 8 つの節点は，要素を形成する速度場解析格子に含まれる，8 つの節点と一致する座標を持つ．従って，この操作の結果，電磁場解析格子数は速度場解析格子数の 1/27 に相当する数となる．電磁場解析格子を用いて磁束密度，電流密度，ローレンツ力を計算した後は，それらの物理量を節点座標が等しい速度場解析格子の節点に移行し，それらの値を用いて他の節点上の電磁場に関する物理量を線形補間により求める．

以上の操作により，少ないメモリ容量で短時間の内に，全節点に対応する電磁場の物理量を求めることができる．

3．解析モデル及び支配方程式

解析モデルは図 2 に示すように有限要素法による解析領域として直方体モデルを適用し，その横に 1 本のコイルがまっすぐ上下に伸びており，交流電流が流れている状態を設定する．ここで直方体格子内は，距離関数 ϕ_1=0 を境に空気領域と液体金属の 2 相が存在する．解析格子は 6 面体で，要素数と節点数はそれぞれ 6750，9424 と設定した．

支配方程式は，速度場において Navier-Stokes の方程式と連続の式が以下に示す形で成り立つ．これらの式の離散化には GSMAC 有限要素法[7][8]を適用した．

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{24}$$

$$r\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+r(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+m\nabla^2\mathbf{v}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}-s_s(\nabla\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}d_e \tag{25}$$

本研究では温度場を考慮していないため，ジュール発熱，及び自由表面上におけるマランゴニ効果は発生しないものとする．また，底部を除く壁面には slip 条件を適用した．

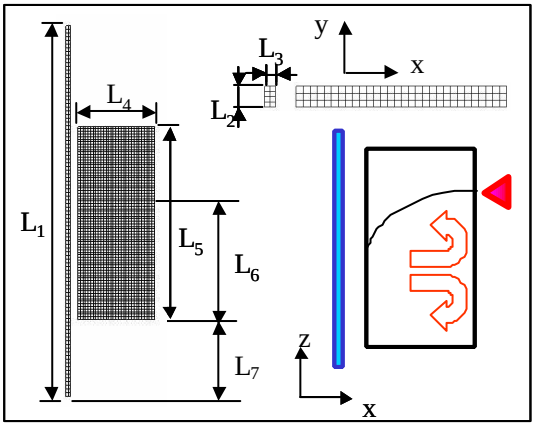

Fig. 2 Mathematical model of the electromagnetic seal.

表 1 に本研究に用いた融液（ウッドメタル）と空気の物性値，表 2 に解析モデルの寸法，及び表 3 にコイルを流れる交流電流のパラメータを示す．

Tab.1 Physical properties of melt and air.

Density (melt) (air)	[kg/m³]	ρ_1 ρ_2	9.70×10^3 1.18
Kinematic Viscosity	[m²/s]	ν_1 ν_2	1.40×10^{-7} 1.54×10^{-5}
Surface Tension	[N/m]	σ_s	0.5
Electrical Conductivity	[S/m]	σ_{m1} σ_{m2}	1.06×10^6 0.00
Relative Magnetic Permeability	[—]	μ_r	1.00

Tab.2 Conditions of mathematical model.

Coil Height	[m]	L_1	4.80×10^{-1}
Coil-Melt Width (y)	[m]	L_2	1.00×10^{-2}
Coil Width (x)	[m]	L_3	5.00×10^{-3}
Air-Melt Width (x)	[m]	L_4	1.00×10^{-1}
Air-Melt Height	[m]	L_5	2.50×10^{-1}
Melt Height	[m]	L_6	1.50×10^{-1}
Melt position (z)	[m]	L_7	1.00×10^{-1}

Tab.3 Magnetic field parameters of the coil.

Current Density	[A/m²]	j_f	1.20×10^8 -2.00×10^8
Frequency	[Hz]	f	2.00×10^3 -3.00×10^3

4．解析プログラムの正当性

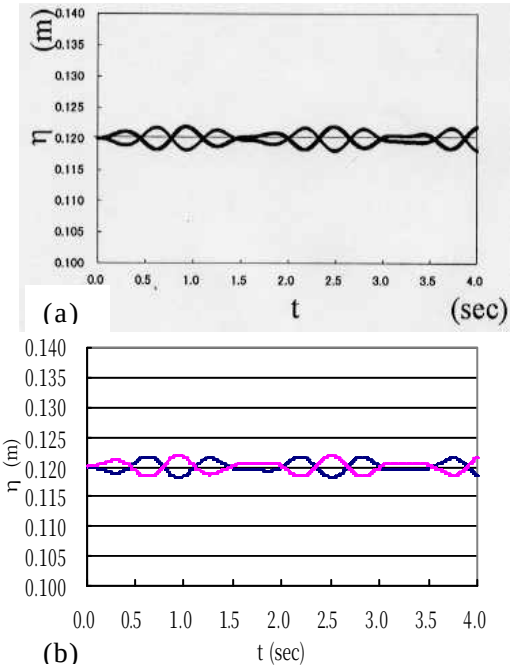

Fig.3 Comparison of the results between the ALE (a) and the LSM (b).

図 3 は，本研究で適用した Level Set 法のプログラムを検証するために，sloshing による液面の振動解析結果を ALE 法[9]によって計算された結果と比較したものである．この時，液面の初期高さは 0.12m，加振周波数・振幅はそれぞれ 1.3Hz，1.00×10^{-3}m と設定した．また，供試流体は水銀である．ALE 法では自由表面の位置が直接計算されるのに対して，Level Set 法ではそれが陰的に決定される違いはあるが，(a)，(b)より，2 つの結果が定性的・定量的に良好に一致していることがわかる．この事から，プログラムの正当性が確認された．

5．解析結果

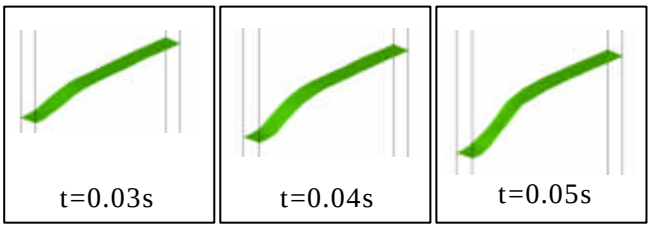

Fig.4 Deformation process of the free surface with the current density 2.00×10^8A/m² and the frequency 2.00×10^3Hz.

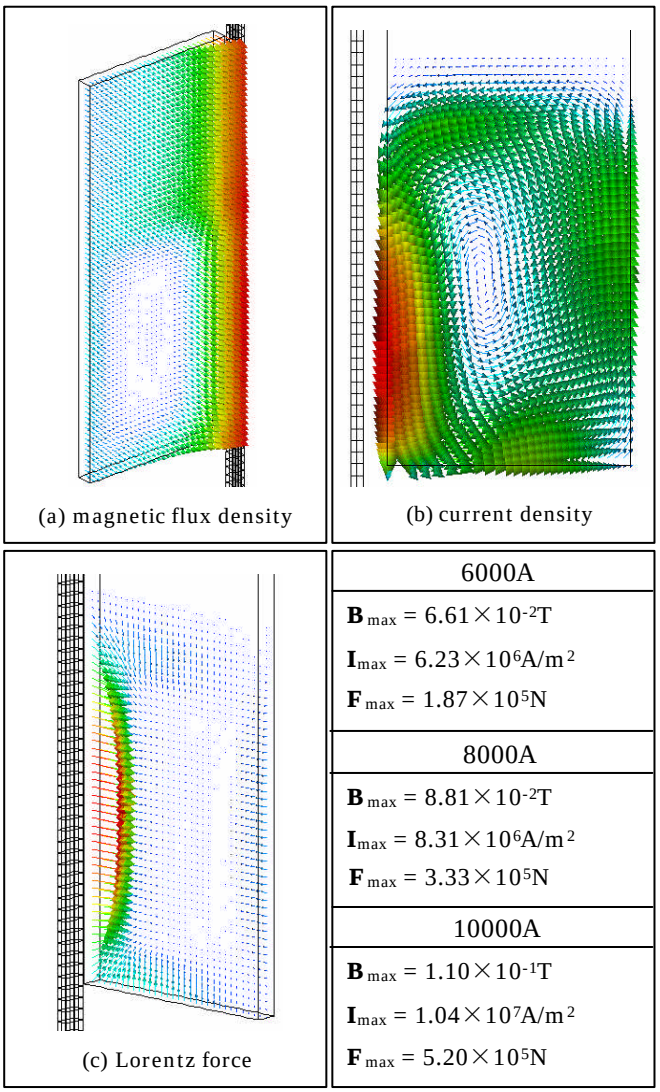

Fig.5 Distributions of the magnetic field physical quantities and their magnitude on the vertical plane with the frequency 2.00×10^3Hz at 0.001s.

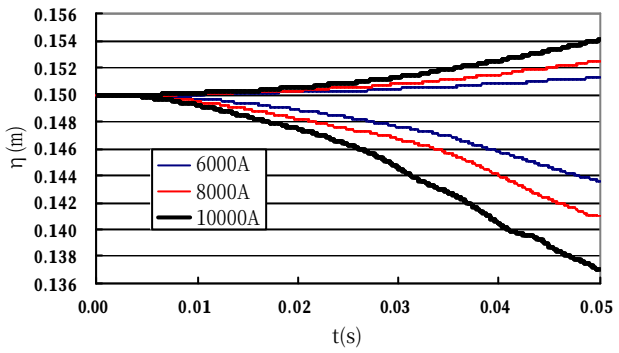

Fig.6 Comparison of the transitions in terms of the liquid height at X=0, L_4 with the variable current density and the fixed frequency 2000Hz.

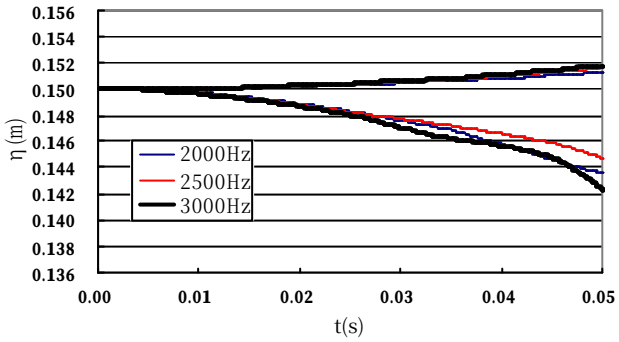

Fig.7 Comparison of the transitions in terms of the liquid height at X=0, L_4 with the variable frequency and the fixed current 6000A.

図 4 は，コイルに 10000A の交流電流が流れた時に生じる自由表面形状の変化を示したものであり，図 5 は初期における磁束密度，電流密度，ローレンツ力の分布を電磁堰の幅中央の垂直断面で示したものである．直線状のコイルに流れる交流電流は，それと垂直な方向に図 5(a)に示す磁束密度を発生させる．この時磁束密度は，コイルに近い場所において大きく，遠ざかるにつれて減衰していく．そして，その大きさを緩和する様にして，(b)に示す渦電流が垂直断面上で生じる．この渦電流とは，導体が広がりを持つとき，特定の回路に従わず最も抵抗の少ない路に小回路を作って渦状に電流が流れる現象であるが，本解析結果はその様子を良好に再現している．また，空気領域においては電気伝導率が 0 のため，渦電流は生じない．以上 2 つの物理量から(c)に示すローレンツ力が内部の導電性液体を圧縮する方向に働く．その結果，融液は図 2 の模式図に示すように大きな 2 つの渦を形成し，上部の渦における流れの方向に沿って自由表面が変形することになる．この時，コイルに近い液面においては流れと重力の方向が一致し，さらにその下方において液体が強いローレンツ力によって内部に圧縮されていることから，大きな速度を伴って下に移動することになる．一方，コイルから遠い液面においては，重力と流れの方向が逆であり，また，大きなローレンツ力が流体に作用しないという理由から上に向かう変形の度合いは小さい．これらの様子は，図 4 において定性的に，図 6 において定量的に評価することができる．図 6 を見ると，どの電流密度の値においても上方へ向かう変形（>0.15m）は，下方へ向かう変形（<0.15m）と比較してその増加量が小さいことに気付く．ここで，コイルに流れる電流密度を増加させると図 5 に示す様に内部のローレンツ力も増加するため，結果として融液がより強い力で駆動されることにより高さ方向の変形量が大きくなる．この事は，時間に対する変形のこう配が，大きな電流密度ほど急になっていることから確かめられる．

図 7 は電流密度を一定にして周波数を変化させた時の液面の推移を表したものである．この場合，上方へ向かう変形は周波数の増加に伴って大きくなっているが，下方へ向かう変形は図 6 の場合と異なる．最終的には周波数が一番大きな 3000Hz の時に最も大きく変形しているが，2500Hz の変形量は 2000Hz のそれと比較して小さい．この事は，周波数が増加すると磁束密度が導電性流体の外側に集まる，いわゆる表皮効果に起因するものと思われる．表皮効果によってローレンツ力の分布は変化するが，それはコイルに近い液面の変形に大きな影響を与える．

6．結論

電磁場の計算に Hybrid FEM-BEM を，自由表面の計算に Level Set 法を適用することによって，非接触で導電性流体を制御する電磁堰シールの 3 次元数値解析を行った．流体内部に生じる磁束密度と誘導電流により，ローレンツ力が流体を圧縮する方向に働き，その結果，自由表面の形状が弧を描くように変形する様子が確かめられた．また，電流密度や交流周波数の値が大きいほど，変形のこう配が急になる様子を定量的に確かめることができた．本解析の範囲では，まだ流体の挙動は定常状態に到っておらず，更なる自由表面の変形を捉えるべく解析を進めていく所存である．また，今後の課題として温度場を導入した解析，すなわちジュール発熱やマランゴニ効果を導入した計算，更に，固液界面のぬれ性を考慮した解析を行う必要がある．

参考文献

(1) 棚橋隆彦，槙原孝文，“自由界面のダイナミックス”，計算工学，**2**-1(1997), 24-32.

(2) Sussman, M., Smereka, P., and Osher, S., “A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow”, *J. Computational Physics*, **114**(1994), 146-159.

(3) Minowa, T., Morita, K., Takemoto, J., and Tanahashi, T., “Hybrid FEM-BEM Analysis of Molten Metal under Alternating Currents using ALE-GSMAC Method”, *CMES*, in press.

(4) Brackbill, J. U., Kothe, D. B., and Zemach, C., “A Continuum Method for Modeling Surface Tension”, *J. Computational Physics*, **100**(1992), 335-354.

(5) Chang, Y. C., Hou, T. Y., Merriman, B., and Osher, S., “A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows”, *J. Computational Physics*, **124**(1996), 449-464.

(6) 槙原孝文，柴田悦太郎，棚橋隆彦，”キャビティ流れによる GSMAC-CIP 法の検証”，機論，**65**-629, B(1999), 116-123.

(7) Tanahashi, T., Oki, Y., and Henjes, K., “An Application of GSMAC-FEM to Electrically Conducting Fluid Flows Driven by Lorentz Force”, *Comp. Fluid Dyn.*, **1**(1993), 233-248.

(8) Tanahashi, T., Okanaga, H., and Saito, T., “GSMAC Finite Element Method for Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers”, *Inter. J. Numerical Methods in Fluids*, **11**(1990), 113-118.

(9) 木倉宏成，武口達，澤田達男，棚橋隆彦，“Arbitrary Lagrangian-Eulerian GSMAC 有限要素法による非線形水面波の数値解析”，機論，**57**-540, B(1991), 2632-2639.