第１４回数値流体力学シンポジウム
<講演番号 D09-1>

<衝突の影響を加えたVlasov-Maxwell 方程式の数値計算>

<Numerical Simulation of Vlasov-Maxwell Equations with Collisions.>

近藤　芳昭，東工大総理工院，〒152-8552　目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: ykondo@es.titech.ac.jp
矢部　　孝，東京工業大学，　〒152-8552　目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: yabe@mech.titech.ac.jp
Yoshiaki Kondoh, Department of Energy Sciences, Tokyo Institute of Technology,
O-okayama, Meguro-ku 2-12-1, Japan
Takashi Yabe, Department of Mechanical Sciences and Engineering, Tokyo Institute of Technology,
O-okayama, Meguro-ku 2-12-1, Japan

<Abstract > The numerical solutions of the Vlasov-Maxwell system have been investigated. We present some simulation results under temperature gradients. Then, it is necessary to consider the velocity distribution function of the charged particles more accurately to calculate the heat flows of the electron and the relation between the electric field and the magnetic field. For example, heat flux and all relational coefficients can be evaluated by solving the Vlasov equation with collision term numerically for the velocity distribution function in a gas of electrons and ions. It is shown that the use of the simulation scheme that uses the CIP method gives an accurate solution of the Vlasov equation.

１．はじめに

これまで、レーザー生成プラズマ中での電子の輸送現象について実験的、理論的にも多くの研究がなされてきている。[1-4,8] その様な現象では、大きな温度勾配が生じることにより、電子による熱の伝導が行われる。また、その電子の輸送に伴ない電流が流れることによって電場と磁場が発生し、それらが重要な役割を果たす。本研究では、荷電粒子間の衝突の影響を考慮し、電子電流の流れや熱の移動などについてのシミュレーションを行う。このとき、電子の流れや電場、磁場の関係を計算するためには、より正確に粒子の速度分布を考慮しなければならない。そこで、電磁場に対するマクスウェル方程式と、ブラゾフ方程式の右辺に衝突項を加えた式を考え、高精度である CIP 法を用いた数値解析を行う。

２．基礎方程式

位相空間内における粒子群の位置と速度を表わす分布関数 $f\,(r,v,t)$ を考えると、$f\,(r,v,t)$ が満たさなければならない基礎方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{V}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{V}} = 0 \qquad (1)$$

である。この式は Vlasov 方程式と呼ばれるもので、$\boldsymbol{F}$ は粒子に働く力で、電子に対しては $\boldsymbol{F} = -\mathrm{e}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})/\mathrm{m}_e$ となる。 ただし v は電子の速度、e は素電荷、m_e は電子の質量である。さらに、この(1)式の右辺に粒子の衝突の影響を考慮した項を加えて計算する。この衝突項に関しては様々な形が提唱されているのだが、今回は簡単な形としてよく用いられている以下のような BGK モデルを考える。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -n\left(f - f_0\right) \qquad (2)$$

ここで、f_0 は平衡状態での分布関数であり、ν は衝突周波数を表わす。今回の計算ではこの衝突周波数 $\nu \sim n/v^3$ と考慮して計算を行った。また、(1)式中の $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ はそれぞれプラズマ中の電場と磁場であり、以下の Maxwell 方程式を同時に解くことによって求めることができる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4pr \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (4)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (5)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4p}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (6)$$

これら(1)～(6)の Vlasov-Maxwell 方程式を解いていくが、実際の数値シミュレーションにおいて計算するさいには以下の様な無次元化を行い計算する。

$$r \to \frac{r}{l_D} \quad , \quad t \to \frac{t}{w_p} \quad , \quad V \to \frac{V}{V_{th}} \quad ,$$

$$n \to \frac{n}{n_0} \quad , \quad r \to \frac{r}{en_0} \quad , \quad J \to \frac{J}{en_0 V_{th}} \quad .$$

ただし、λ_D はデバイ波長、ω_p はプラズマ振動数、V_{th} は電子熱速度、n_0 は初期密度である。

また、J、ρ については分布関数を速度についてモーメントをとり、決定することができる。

$$\boldsymbol{r} = \sum_j q_j \int d\boldsymbol{v}\; f_j$$

$$\boldsymbol{J} = \sum_j q_j \int d\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v} f_j$$

３．熱輸送

この章では簡単に Spitzer-Harm 理論による熱拡散の法則について触れる。これは、電子の熱流束を計算する際に良く使われるものである。プラズマ中での Spitzer-Harm 理論による熱の輸送現象の詳細については多くの文献に記述されている。[5,8]

熱流は Spitzer や Harm らによって研究され[6]、彼らの理論は一定の領域については精度の良いものとして知られている。特に小さな速度領域では、熱流は Spitzer-Harm 理論によって良く近似される。Spitzer や Harm らは弱い電場と温度勾配のあるときの電子分布関数について計算をした。このとき、Spitzer-Harm 理論による熱伝導は電子の分布関数がマクスウェル分布に近いものと仮定して計算されている。分布関数は局所マクスウェル分布において Knudsen 数、$K=\lambda_{mfp}/L$ で、λ_{mfp} は電子平均自由行程、L はプラズマ中の不均一さに関係したスケール長である。K が電子速度の増加関数であることから、Spitzer-Harm 理論における熱伝導の分布は高速度領域において破綻する。

また、この法則はレーザ生成プラズマ等のように、急な温度勾配があるような場所付近では熱流を過大に評価してしまう。しかし、それを緩和するために、熱流 Q に制限を設け、”free-streaming imit”

$$Q_{fre} = \alpha nkT\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}$$

を使って計算する。k はボルツマン定数。ただし、この α の値は経験的に決められる係数である。

4．計算

ステップ的な温度勾配存在下において、そのときの電子の流れや熱の移動について数値シミュレーションを行った。

初期分布関数 f (**r**,**v**,t) は次のような Maxwell 型（2 次元系）を用いている。

$$f = \frac{1}{2p}\frac{1}{V_{th}^{2}}\exp\left(-\frac{V^2}{2}\frac{1}{V_{th}^{2}}\right)$$

温度勾配が x 方向のみに存在しているとし、Fig. **1** にその初期条件を簡単な模式図で表わす。

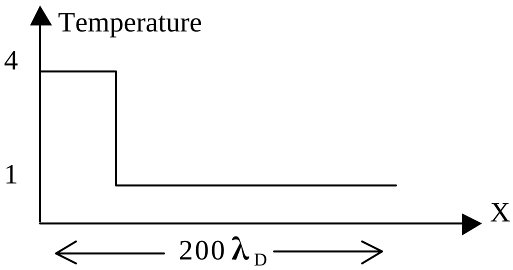

Fig.1 Sketch of initial condition.

計算領域については実空間 x 方向に $200\lambda_D$ 取っているが、y 方向に関しては境界条件を周期的とし、初期条件も一様な分布としているので、計算時間短縮のために領域を減らして $2\lambda_D$ としている。x 方向の境界条件は、Fig.1 の左端を高温加熱領域とし、温度 T=4 として以後この温度を維持し続けるものとした。また、Fig.1 の右端は自由境界としている。初期条件で密度は一様にして、最初粒子の流れは温度勾配 ▽T によるものだけとしている。また、イオンはバックグラウンドとして扱い、静止していて、均一に分布しているものと仮定している。

温度 T は 2 乗平均速度$<v^2>$から計算でき、熱流 Q は今、温度勾配が x 方向のみなので$<v_x v^2>$から見積もることができる。

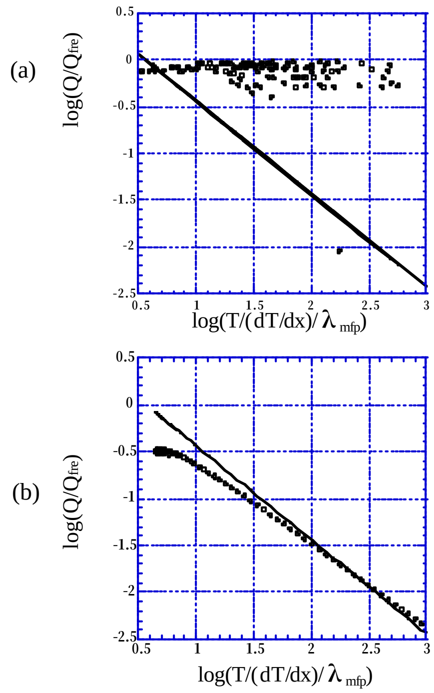

Fig.2. Heat flows with inverse temperature gradient at times t=30ω_p^{-1}. Calculated with (a) : non collision term, (b) : include collision term. The solid line gives the Spitzer-Harm theory. Calculation results are plotted.

最初に、衝突項がある場合と無い場合の比較の計算を行った。Fig.2 に示されるように、衝突の無い場合の結果(a)では、熱流 Q が縦軸で 0 に近い値をとっている。これは熱流 Q が Q_{fre} に近い値を取っている事になる。一方、衝突項を含んだ計算(b)では、熱流 Q は Spitzer-Harm 理論線に近い値を取っている。これは Spitzer-Harm 理論が、衝突が十分起こるような低速領域について考慮されているために、この様な結果になったものと考えられ、衝突が起こらないような場合（又は高速領域）に最大熱流量（すなわち、Q_{fre}）を与えるという事が確認できる。また、Vlasov 方程式に付加した BGK モデル衝突項も良く機能しているものと思われる。

計算結果を Fig.3、4 に示す。Fig.3 は温度 T 及び熱流$<v_x v^2>$に関しての図である。この図からは、時間とともに温度勾配が広がっていく様子を見ることができる。熱流も同様に時間とともに広がっていくが、最大となる値は加熱領域近傍で常に起っている。この値より右側に heat front が形成される。

Fig.4 では数値シミュレーションから得られた熱流 Q（$<v_x v^2>$）と Spitzer-Harm 理論により得られる熱流 Q_{sh} について free-streaming limit Q_{fre} で割って対数をとったものと、L/λ_{mfp}（このとき L は局所的な温度勾配▽T の逆数に関連して L=T/(dT/dx)となり、平均自由行程 $\lambda_{mfp} \sim v^4/n$ として計算している）の対数でプロットしている。また、Q_{fre} の α は 1 としてフィッティングしている。この図では境界の影響を受けていると見られる点については除外してプロットしている。

Fig.4 の左端は最高位となる熱流の heat front にあたる。右下に伸びる曲線はその heat front に沿ったものである。この図からも分かるように heat front 付近で Q_{sh} は計算値よりも高い値がでている。これは急な温度勾配▽T のために発生する比較的高速な電子のためと思われる。大きな速度が

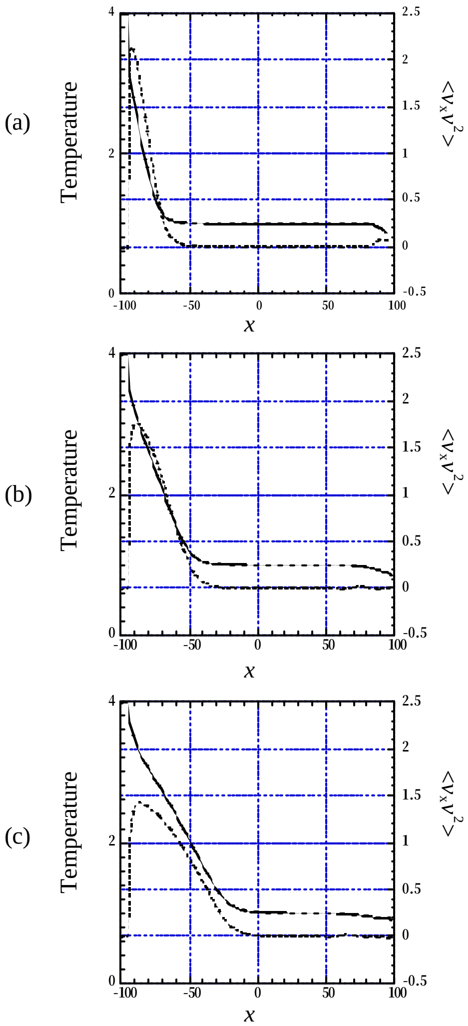

Fig.3. Temperature and heat flows as functions of x at times (a) t=10, (b) t=25, (c) t=50ω_p^{-1}. The solid line: temperature, dash-dotted line: heat flux $<v_x v^2>$.

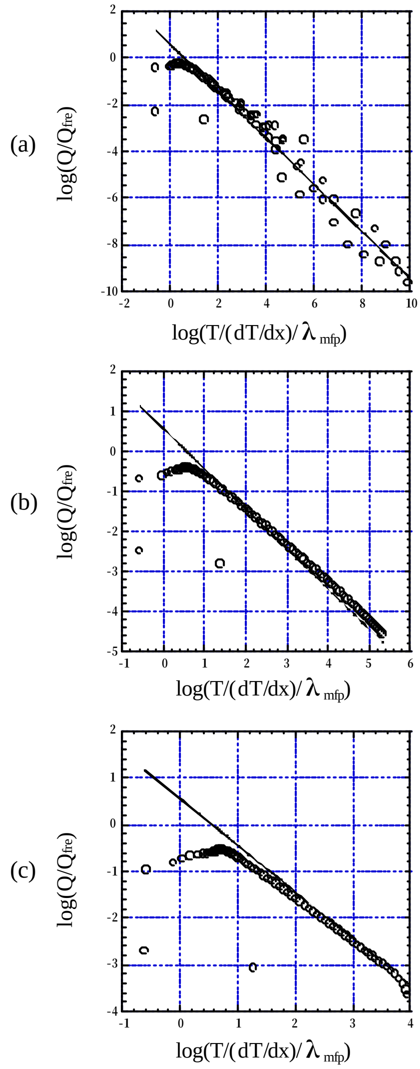

Fig.4. Heat flows with inverse temperature gradient at times (a) t=10, (b) t=25, (c) t=50ω_p^{-1}. Computed results are plotted. The solid line gives the Spitzer-Harm theory.

発生した場合、Q_{sh} は発散するために Q_{fre} を導入したが、その値に収束していくことになる。つまり、熱流が温度勾配▽T に比例する性質を持つ Spitzer-Harm 理論で熱流 Q_{sh} は計算されているが、急激な温度勾配が発生した場合にこの計算では最大熱流束の大きさを過大評価してしまうという問題点を、free-streaming limit Q_{fre} を導入することにより回避しているためにその様な事がおきると $Q_{sh} \rightarrow Q_{fre}$ へと値が変化している。一方、長い平均自由行程を持つ高速電子による影響は Q_{fre} で切られているので考慮されていない。しかしながら、この図では右下の方にあたる Fig.3 の熱流(破線)が緩やかに変化している領域に対しては、両方が良く一致している結果が得られた。

次に、分布関数 f についてそのマクスウェル分布成分 f_0 と熱流成分 f_1 について考える。熱の流れにはマクスウェル分布の裾の方に当たる少数の電子の影響がある。よって、▽T が小さく、マクスウェル分布に近い分布ほど Spitzer-Harm 理論で精度の良い値になると考えられる。Fig.5 に heat front の位置での f_0 と f_1の比を取ったものを示す。10ω_p^{-1} では大きな速度の領域で非常に高い値を示しているが、これは f_0 がこの領域では殆ど分布が無いのに対して、f_1 は流れの成分としてこのとき既に値を持っているためである。これは 25ω_p^{-1} で高速領域の値が大きく下がっている事からも分かる。何故なら f_0 は時間を経ても殆ど分布が変わらないのに対して f_1 は時間とともに変化（減少）していくからである。また、負の速度領域で比が 0 を越えているのはリターンカレントが存在している事も示している。[8]

以上から分かったことは、温度勾配▽T があるような場合では熱流は単純にプラズマの巨視的な量（値）で決まるのではなく、電子の速度分布の変化も効いてくるということである。

5．結論

今回、電子の流れや熱の移動について Vlasov-Maxwell 方程式に CIP 法を用いた計算を行った。電子の平均自由行程の数倍程度の長さで急な温度勾配▽T があるような場合の数値シミュレーションを行ったが、その様な場合でも理論式に近い結果を得ることができ、熱流についての精度の良い計算を行えたことが示せた。

今後の課題としては、現在プラズマ中でのエネルギーバランス等に関して、熱流束の計算というものが重要な要素の一つとなっている。この問題については、レーザ生成プラズマや、果ては宇宙プラズマにおいても重要なことである。[7]今回は熱流に関しての基礎的な計算を行ったが、そ

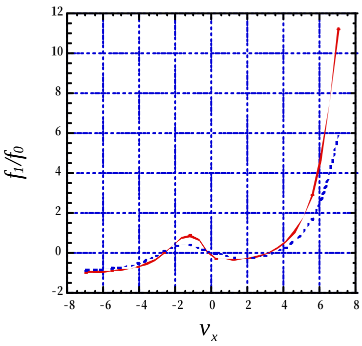

Fig.5. The ratio of f_0 and f_1 when times t=10ω_p^{-1} (solid line) and 25ω_p^{-1} (dotted line). The value f_0 (which describes temperature) is local Maxwell distribution and the value f_1 describes heat flow.

ういった問題への応用についても徐々に考えていくことができるものと思われる。

６．参考文献

(1) N.N.Ljepojevic and P.MacNeice, Phys.Rev.A, 40, 987, (1989).
(2) J.P.Matte and J.Virmont, Phys.Rev.Lett.49, 1936 (1982).
(3) E.M.Epperlein, G.J.Rickard and A.R.Bell, Phys.Rev.Lett.61, 2453 (1988).
(4) J.Delettrez, Can.J.Phys. 64, 932, (1986).
(5) L.Spitzer, Jr. Physics of fully ionized gases. Wiley-Interscience, New York, NY. 1967.
(6)L.Spitzer,JR. and R.Harm, Phys.Rev.Lett.89, 977 (1953).
(7)S.Chandrasekhar, Principles of Stellar Dynamics, Dover Publications, New York, 1960.
(8) A.R.Bell, G.Evans and D.J.Nicholas, Phys.Rev.Lett.46, 243 (1981).