# 極超音速希薄流における気体分子と固体表面干渉モデルの影響

Effects of Gas-Surface Interaction Model in Hypersonic Rarefied Gas Flow

 ○ 坪井伸幸,宇宙科学研究所宇宙輸送研究系,神奈川県相模原市由野台 3-1-1, E-mail:tsuboi@flab.eng.isas.ac.jp 松本洋一郎,東大大学院工学系研究科機械工学専攻,東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail:ymats@mech.t.u-tokyo.ac.jp
 Nobuyuki Tsuboi, Institute of Space and Astronautical Science, Yoshinodai 3-1-1, Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa
 Yoichiro Matsumoto, Mechanical Engineering, The University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656

A DSMC (direct simulation Monte Carlo) simulation using Dynamic Molecular Collision (DMC) model and Multi-Stage (MS) model based on Molecular Dynamics (MD) calculation is applied for solving the two-dimensional nonequilibrium hypersonic rarefied flow over a flat plate with angle of leading edge. Numerical results show that nonequilibrium between translational and rotational temperature are obtained behind the leading edge over the plate. Pressure, heat flux ratio on the plate and rotational temperature in the DSMC results agree well with those in the experimental results. The results also indicates that the effects of gas-surface interaction are revealed and correrated with a rarefaction parameter  $\overline{V}$ .

## 1. はじめに

近年,国内外で宇宙往還機及び惑星探査機の開発が活発に推進されているが,その空力における重要な課題の1つとして,再突入時の衝撃波/境界層干渉がある。その衝撃波/境界層干渉の代表的な現象の一つとして,鋭い前縁を有する平板近傍で生じる粘性干渉が挙げられる。これは平板前縁で急激に発達する境界層と一様流の干渉と定義できる。平板前縁における流れ場の概要を図1に示す。連続体領域では,境界層の急激な発達のため衝撃波と境界層が強く相互干渉するstrong interaction 及び境界層の発達が穏やかであるため相互干渉が弱いweak interaction が平板前縁で現れるが,rarefaction parameter  $\overline{V}(=M_{\infty}\sqrt{C/Re_{x}}) > 0.15^{-1}$ であるような,衝撃波と境界層が融合する領域における流れ場の構造及び並進温度と回転温度の非平衡現象はまだ十分に解明されていない。さらに,希薄気体流れでは平均自由行程が代表長さに比較して大きくなるため,面分子干渉の影響が無視できず,その影響を詳細に把握する必要がある。希薄気体流れの解析には,DSMC(direct simulation

希薄気体流れの解析には,DSMC(direct simulation Monte Carlo)法が有効である<sup>2,3</sup>。しかし,2原子分子 気体に対して提案されているモデルは,局所平衡を仮定 した現象論的モデルのため,非平衡な流れ場に対する適 用には物理現象を正確に再現可能とは言えない。



Fig. 1: Schematic of viscous interaction near a sharp leading edge.

そこで,本研究では,徳増らによって提案された衝突 モデルである DMC(Dynamic Molecular Collision) モデ ル<sup>4</sup>,山西らによって提案された面分子干渉モデルである MS(Multi-Stage) モデル<sup>5</sup>を DSMC 法に適用した。そし て,希薄気体における極超音速非平衡流中の衝撃波/境 界層干渉における様々な面分子干渉モデルの影響を明ら かにすると共に,本手法の有効性を示す。

## 2. 数値計算法

本研究で使用した2次元DSMC法は,以下の節で述べ る通り,分子動力学法によって構築されたデータを基にし ている。また,分子衝突頻度の計算には,Null-Collision 法<sup>6</sup>を使用している。DSMC法における計算実行上の問 題点は,分子が属するセルを検索するための計算負荷が 大きいことである。そこで本研究では,検索時間短縮と 任意形状への適応性を考慮して,非構造格子型の格子情 報を保持することにより改善を図っている<sup>7</sup>。さらに,よ り一層の計算時間の短縮のため,計算コードの並列化を 実施している。並列化は,MPIを使用しており,さらに 並列効率を上げるために計算セル内の粒子数を考慮して 各プロセッサに計算領域を能動的に割り当てている。2次 元 DSMC 計算手法の詳細は文献 8 を参照されたい。

#### **2.1 2**原子分子衝突モデル

本研究では、分子衝突の際、様々なエネルギー状態を 有する2原子分子の2体衝突を分子動力学法によりシミュ レーションし、その結果得られた分子の衝突断面積及び 衝突後のエネルギー分布に対するモデルを構築するDMC モデルを採用している。具体的には、まず様々な並進/回 転エネルギー状態を有する2原子分子の2体衝突を分子 動力学法により多数実施する。次に、得られたデータを もとに、衝突後のエネルギー分布を表す確率密度関数及 び衝突断面積を取得し、テーブル化する。さらにDSMC 計算において、このテーブル化されたデータにより、各 セル内の分子衝突前のエネルギー状態から衝突後のエネ ルギー状態を算出する。なお、本手法の詳細は文献4を 参照されたい。

## 2.2 面分子干渉モデル

平均自由行程が代表長さに比べて非常に小さい場合は 面分子干渉の影響は非常に小さく,壁面近傍の流れは拡 散反射,つまり完全適応により影響を受ける。この状態 は,固体表面に入射した分子は表面に吸着し,表面温度 の Maxwell-Boltzmann 分布に従って離脱する状態であ る。しかし,実際は表面に吸着しないで散乱する分子も 存在し,その存在確率は表面の材質と状態に大きく依存 する。

本研究では,面分子干渉モデルとして(i)拡散反射モデ ル(ii)Cercignani-Lampis-Lord(CLL)モデル<sup>9</sup>(iii)Multi-Stage(MS)モデル<sup>5</sup>の3種類を使用した。

拡散反射モデルは,一度固体表面に付着し,気体分子の エネルギーが固体分子のエネルギーと十分に平衡となっ た後,入射方向とは無関係に等方的に散乱するとするモ デルである。反射角度の分布は余弦則に従い,分子の速度

Tab. 1: Simulation conditions.

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Leading Edge angle[deg.]	20							30							
Mach number M∞	20.2							4.89							
Working Gas	Nitrogen							Nitrogen							
Stagnation pressure p0[Pa]	3.5×10 <sup>5</sup>							983							
Stagnation temperatureT <sub>0</sub> [K]	1,100							669							
Freestream temperature T <sub>∞</sub> [K]	13.32							115.8							
Freestream pressure p <sub>∞</sub> [Pa]	0.06831							2.12							
Freestream velocity V <sub>∞</sub> [m/s]	1,503							1,072							
Reynolds number Re∞(based	566						707								
on L=0.05[m],2L=plate length)															
Wall temperature T <sub>w</sub> [K]	290							290							
Knudsen number Kn∞	0.047						0.024								
(based on L)															
Wall boundary condition	Diffuse	MS	CLL					Diffuse	MS	MS CLL					
Accomm coeff $\alpha n/\alpha t/\alpha r$	_	_	1/0 986/1	0.95	0.9	0.8	07	_	_	1/0 986/1	0.95	0.9	0.8	07	





(a)Computational grid system for No.1-7

(b)Computational grid system for No.8-14

Fig. 2: Computational grid systems.

分布は壁面温度による Maxwell-Boltzmann 分布に従う。 このモデルは,主に表面仕上げが粗い場合(工業的な加工 面の場合,いわゆる engineering surface の場合)や,表 面で気体分子が吸着しやすい場合にこのモデルを適用す る事が多い

CLL モデルは,入射速度 ci で固体表面に衝突した気体 分子が,反射速度 $c_r$ で固体表面から離脱する確率 $P(c_i 
ightarrow P(c_i 
igh$ cr)を考え,熱平衡状態での詳細釣り合いが保たれる関数 を数学的な考察より導出している。単原子分子の場合は、 この関数のパラメータとして,壁面の接線方向と法線方向のエネルギーに関する2つの適応係数を使用する。接 線方向速度を $c'_{it} = \sqrt{c^2_{it} + c^2_{iz}}$ ,法線方向速度を $c_{in}$ をとすると,以下のような接線方向の速度変化と法線方向の速度変化は独立な確率過程に従うとしている。

\_ *,* ,

$$P(c'_{it} \to c'_{rt}) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_t (2 - \alpha)}} \exp\left[-\frac{\left\{c'_{rt} - (1 - \alpha_t)c'_{it}\right\}^2}{\alpha_t (2 - \alpha_t)}\right] \quad (1)$$

$$P(c_{in} \to c_{rn}) = \frac{2c_{rn}}{\alpha_n} I_0 \left( \frac{2\sqrt{1 - \alpha_n}c_{in}c_{rn}}{\alpha_n} \right) \times \exp\left\{ -\frac{c_{rn}^2 + (1 - \alpha_n)c_{in}^2}{\alpha_n} \right\}$$
(2)

ここで, I<sub>0</sub>は0次の第1種修正ベッセル関数である。 た, $\alpha_t, \alpha_n$ はそれぞれ接線方向の運動量適応係数及び法 線方向の運動エネルギー適応係数である。等核2原子分 子の場合はこれに加えて回転エネルギーに対する適応係 数を使用する。確率密度関数は以下の通りである。

$$P(E_i \to E_r) = \frac{1}{\alpha_r} I_0 \left[ \frac{2\sqrt{1 - \alpha_r E_i E_r}}{\alpha_r} c_{in} c_{rn} \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{E_i + (1 - \alpha_r) E_r}{\alpha_r} \right] \quad (3)$$

ただし, $\alpha_n$ は回転エネルギーの適応係数,Eは回転エネ ルギーである。 \_3つの適応係数

上記の様に2つないし3つの適応係数 を使用する。この結果,葉状の散乱角度分布を良く再現 するが,それぞれの適応係数の値が異なる場合,それぞれ の熱平衡温度が異なる場合がある。本論文では,Arkilic ら及び Cook らが実施した分子線散乱実験結果より算出 した窒素の子/グラファイト表面に対する適応係数<sup>10,11</sup>及 び 0.7~0.95 までの適応係数を使用している。

MS モデルは,分子動力学法により得られた知見を基に 山西らにより構築されたモデルであり,(i)衝突後の並進 及び回転エネルギーの決定(ii)壁面凹凸等による気体分 子の散乱挙動の決定 (iii) 気体分子の反射後の挙動の決定 の3ステージから構成されている。MSモデルは入射気体 分子として窒素分子,酸素分子,アルゴン原子,固体試料として窒素分子,たを想定して構築されている。G体 分子は窒素分子であること,Lengrandらの実験ではグラファイト粉末を模型表面に塗布していることから<sup>12</sup>,本 研究では窒素分子/グラファイト表面の MS モデルを使用

Copyright © 2000 by JSCFD



Fig. 3: Density contours over the plate for  $M_{\infty} = 20.2$ .

した。なお, MS モデルの詳細は文献5を参照されたい。

## 3. 結果及び考察

計算条件は,Lengrandらが実験で実施した条件<sup>13</sup>及び 我々がアーヘン工科大学にて実施した条件<sup>14,15</sup>を使用し た。一様流中の平均自由行程が1mmのオーダーとなる ため,前縁形状の影響が無視できないことから,本研究 では前縁形状の影響を考慮に入れた状態で計算を実施し た。計算に使用した格子を図2に示す。計算格子は壁面近 傍及び前縁近傍に集中させており,計算格子は,No.1~7 では平板上面側に58(流れ方向)×40(鉛直方向),下面側 に40×18, no.8~14 では平板上面側に58×40,下面側に 45×18 である。

### **3.1** *M*<sub>∞</sub>=20.2 における計算結果

Lengrand らが行った  $M_{\infty} = 20.2$ の実験では,平板の 材質は真鍮であり,密度計測及び平板上圧力計測ではそ のままで,熱流束の計測では熱伝達を良くするために,グ ラファイト粉末を表面に塗布している<sup>12</sup>。このことを考



Fig. 4: Density profiles over the plate at X/L=1.5 for  $M_{\infty}=20.2.$ 

慮すると,空間密度及び平板上圧力の実験結果との比較の際には拡散反射モデル,熱流束の比較の際には MS モデルを使用した結果を使用するのが妥当と思われる。



Fig. 5: Pressure distributions on the plate for  $M_\infty=20.2.$ 

図3に,様々な面分子干渉モデルを使用した場合の平 板上の密度分布を示す。これより,拡散反射,MSモデ ルには平板前縁で発生する衝撃波及びその背後の境界層 の発達には違いがほとんど見られないことが分かる。し かし,CLLモデルで適応係数を1より小さくする程,平 板前縁で発生する衝撃波が弱くなり,また衝撃波角度が 小さくなる様子が把握できる。

図4に示すX/L = 1.5における断面密度分布より,拡散反射は実験結果に近いがCLLモデル及びMSモデルは実験結果より低い値を示している。また,図5に示す平板上圧力分布からは,MSモデルは拡散反射とCLLモデルの中間の値を示している。実験結果は,前縁近傍で



Fig. 6: Heat transfer rate distributions on the plate for  $M_{\infty}=20.2.$ 



Fig. 7: Skin friction distributions on the plate for  $M_{\infty} = 20.2$ .



Fig. 8: Translational temperature distributions on the plate for  $M_{\infty}=20.2$ .



Fig. 9: Rotational temperature distributions on the plate for  $M_{\infty} = 20.2$ .

は拡散反射,後縁近傍では CLL モデル (No.3)の結果に 近いことが分かる。CLL モデルでは,適応係数が0.7の 場合,拡散反射の場合の壁面圧力の約1/3と大きく減少 していることが分かる。ここで,DSMC法で算出した壁 面圧力は,壁面に衝突した分子の運動量変化を使用して いる。

さらに図6に示す平板上熱流束分布からは,前縁近傍 ではMSモデルはCLLモデル(No.3)とほぼ同じ値を,後 縁近傍ではMSモデルは拡散反射やCLLモデル(No.3) よりも僅かに低い値を示している。実験結果は概ねMS モデルの結果が示す分布に最も近いことが分かる。また CLLモデルの適応係数を0.7にすると,熱流束は拡散反 射の約半分になっていることが分かる。

これらの結果から分かることは、熱流束を計測した場合の平板上の流れは、極めて MS モデルが予測した結果に近いことがいえる。また、平板上圧力に関しては、前縁近傍で極めて拡散反射の傾向が強く、後縁近傍では鏡面反射成分が生じていると考えられる。

図7に示す壁面摩擦係数の比較より,拡散反射の結果 が最も壁面摩擦係数が大きいが,CLLモデル(No.7)は その半分以下となり,分布がほぼ平坦になっている。MS モデルの場合は概ね拡散反射とCLLモデル(No.3)の間 の値を示している。

図8に示す平板上並進温度分布を示す。前縁近傍では MSモデルは拡散反射モデル,CLLモデル(No.3)の間の 分布を示しているが,後縁では MS モデルは他2モデ の結果より高い値を示している。図9に示す 平板上回 転温度分布に関しては,拡散反射モデルのみが僅かに MS モデル , CLL モデル (No.3) より大きいものの , 並進温 度ほど際だった違いは見られない。なお,並進温度 転温度共に適応係数を変化させると計算結果は大き 並進温度 疓 特に並進温度に関しては適応係数が 0.9 以下の場 化し, し、特に並進温度に関しては思想がない。 、並進温度のオーバーシュートが見られなくなってい ことが分かる。さらに、並進温度に関しては壁面温度 近い値に、回転温度に関しては壁面温度より低い値と 合 に近い値に なり,特に回転温度に関してはまだ緩和が十分でない とが分かる。

実際の実験状況を考慮すると,密度分布に関しては拡散 反射を使用した DSMC 結果と実験結果はほぼ一致すると いえる。しかし,圧力分布に関しては拡散反射を使用した DSMC 結果は実験結果と前縁近傍のみ一致し,X/L>0.5 では CLL モデル(No.3)の結果が実験結果に近い値を示 している。熱流束分布に関しては,MS モデルを使用し た結果が最も実験結果に近い分布を示している。 以上の結果より,平板前縁近傍では拡散反射が支配的



Fig. 10: Density contours over the plate for  $M_{\infty} = 4.89$ .

であり,平板後縁では鏡面反射成分を含む MS,CLL モデ ル (No.3) の方が実験結果と一致する傾向にあることが言 える。

**3.2** *M*<sub>∞</sub>=4.89 における計算結果 参考文献14に示す実験では、平板の材質を熱伝導が 良くなるように銅で製作されている。銅表面近傍の散乱 は、分子動力学法の解析から、銅表面での散乱は、拡散 反射とほとんど違いがないことが示されている<sup>15</sup>。ここ



Fig. 11: Pressure distributions on the plate for  $M_{\infty} = 4.89.$ 

では,前節の結果との比較のため,敢えてグラファイト 表面を想定した MS モデル及びグラファイト表面を想定した MS モデル及びグラファイト表面に対す る適応係数を使用した CLL モデルを使用した。 図10 に,様々な面分子干渉モデルを使用した場合の平 板上の密度分布を示す。拡散反射, MS モデルの結果の間 にはほとんど違いが見られない。しかし,CLL モデルに おける適応係数を1より小さくする程,前縁で発生す 範疇波が弱くなっていく傾向が把握できる。しかし、前 衝撃波が弱くなっていく傾向が把握できる。しかし、前



Fig. 12: Heat transfer rate distributions on the plate for  $M_{\infty} = 4.89$ .

節で示した  $M_{\infty}=20.2$ の結果ほど大きな変化が見られない。これは, Kn が約半分ほど違うためであると考えら れる。

図11に示す壁面圧力分布より,拡散反射,MSモデル 及び CLLモデル (No.10)には大きな違いは見られず,ま た図12に示す壁面熱流束分布,図13に示す壁面摩擦係 数分布にも同様の傾向が見られる。CLLモデルの適応係数を 0.95 以下にすると,壁面圧力,壁面熱流束分布及び壁面摩擦係数が No.8~10 の結果よりも低下することが分 かる。特に,最大壁面圧力及び最大壁面摩擦係数に関しては,CLLモデル(No.14)の結果は拡散反射の場合の約 半分となっていることが示されている。

図14,15 に平板上1mm 位置における並進温度及び回転 温度分布を示す。回転温度の比較には、実験結果 $^{14,15}$ も示している。なお、実験では前縁から20 mm(X/L = 0.4)より後方では3次元的な影響が存在するため,本図では



Fig. 13: Skin friction distributions on the plate for  $M_{\infty}=4.89.$ 



Fig. 14: Translational temperature distributions at Y=1mm over the plate for  $M_{\infty}=4.89$ .



Fig. 15: Rotational temperature distributions at Y=1mm over the plate for  $M_{\infty} = 4.89$ .

X/L = 1.0まで示している。並進温度,回転温度共に,拡 散反射,MSモデル及び CLLモデル (No.10)の間には大 きな違いは見られない。また,実験結果は概ね No.8~10 の結果の範囲内であることが示されている。一方,CLL モデルの適応係数を1より小さくすると,その影響は極 めて大きいことが分かる。特に,拡散反射では並進温度 と回転温度の非平衡が無次元値で最大0.8であるが,CLL モデル (No.14)では,両者の間の非平衡はほとんど見ら れない。また,壁面温度と比較しても CLLモデルの適応 係数を小さくすると並進温度,回転温度の緩和が遅れる 傾向が見られる。

次に,前縁から 5 mm,20 mm(X/L = 0.1, 0.4)における 平板上の断面回転温度分布を図 16,17 に示す。実験結果と の比較では,拡散反射, MS モデル, CLL モデル (No.10) が実験結果と良い一致を示している。一方, CLL モデル の適応係数が 0.95 以下では実験結果と一致しないことが 分かる。これらの比較より,本計算条件における平板上 の流れ場は,面分子干渉の影響がほとんど存在しないと 考えられる。



Fig. 16: Rotaional temperature profiles at X/L = 0.1for  $M_{\infty} = 4.89$ .



Fig. 17: Rotaional temperature profiles at X/L = 0.4for  $M_{\infty} = 4.89$ .

**3.3 Rarefaction parameter** *V* による面分子干渉の 影響の把握

以上の結果の相関を調べるため,相似パラメータを使用して比較検討した。図 18,19 に  $M_{\infty} = 20.2$  における結果,図 20 に  $M_{\infty} = 4.89$  における結果を示す。理論として strong interaction theory 及び weak interaction theory<sup>16,17</sup>も同図に示す。これより,merged layer 中で



Fig. 18: Rarefaction effects for pressure distributions on the plate for  $M_{\infty} = 20.2$ .

は実験結果及び DSMC 計算結果はいずれも strong interaction theory 及び weak interaction theory より低い値 を示している。このことは, merged layer 中では連続体 理論から導出されたこれらの理論は成り立たないことを 意味している。また,面分子干渉の影響に関しては,CLL モデルの適応係数を小さくすると,拡散反射の結果がシ フトしていることが分かる。この理由は,適応係数を小 さくすると,平板位置に関わらずほぼ同一の割合で鏡面 反射成分が増加するためであると考えられる。以上の結 果から言えることは, merged layer 中での壁面の適応係 数があらかじめ分かっていなくても,拡散反射の結果と ある適応係数での CLL モデルの結果が有れば,壁面圧力 及び熱流束の推算が可能になると言える。

4. 終わりに

希薄気体における極超音速非平衡流中に置かれた平板 上の衝撃波と境界層の干渉に対して面分子干渉の効果を 考慮した2次元DSMC計算を実施し,以下の結論を得た。

- (1) ミクロスケールである分子の挙動を分子動力学法により解析し、この結果を基にして衝突モデル及び面分子干渉モデルを構築し、それを用いてマクロスケールである物体周りの流れ場をDSMC法により解析する方法を確立した。その結果、非平衡な流れ場に対して合理的な解析が可能になり、2次元DSMC計算を実験結果と比較することで有効性を確認した。
   (2) 2次元DSMC 解析における面分子干渉の影響に関した。
- (2) 2次元 DSMC 解析における面分子干渉の影響に関しては,拡散反射よりも CLL モデル, MS モデルの方が鏡面反射成分の増加による平板上圧力,熱流束の



Fig. 19: Rarefaction effects for heat transfer rate distributions on the plate for  $M_{\infty} = 20.2$ .



Fig. 20: Rarefaction effects for pressure distributions on the plate for  $M_{\infty} = 4.89$ .

最大値の低下が見られた。そして, $M_{\infty} = 20.2$ では MS モデル, $M_{\infty} = 4.89$ では拡散反射を使用した結 果が最も実験結果を再現可能であることを示した。 (3)壁面圧力分布,熱流床分布に関して相似パラメータ

(3)壁面圧力分布,熱流束分布に関して相似パラメータを使用して比較検討した結果,merged layer 中では ほぼ拡散反射の結果が面分子干渉の度合いによって シフトする結果となった。このことから,面分子干 渉の影響があらかじめ分かれば,壁面圧力,壁面温 度が推算可能であることを示した。

#### 謝辞

本研究は一部日本学術振興会科学研究費補助金を受け て実施したものであり、ここに感謝の意を表する。また、 実験を実施させて頂くと共に貴重なご助言までをも頂い たドイツアーヘン工科大学衝撃波研究所のA.E.Beylich 教授に感謝の意を表する。

## 参考文献

- 1. Stollery JL, Kumar D, Atcliffe PA, Theoretical and Experimental Methods in Hypersonic Flows, AGARD-CP-514 (1993), 5-1 - 5-10.
- 2. Bird, G.A., Molecular Gas Dynamics, Clarendon Press, Oxford (1976).
- 3. Nanbu, K., J Phys. Soc. Jpn., Vol. 49(1990), 2042-2049.
- 4. Tokumasu, T. and Matsumoto Y., Phys. Fluids, Vol. 11, No.7(1999), 1907-1920.
- 5. Yamanishi, N. and Matsumoto, Y., Phys. Fluids, Vol.11, No.11(1999), 3540-3551.
- 6. Koura, K., Phys. Fluids, 29 (1986), 3509-3511.
- 7. 福本・南部,機論, 59-586,B(1993), 117-122.
- 8. 坪井・山口・松本,機論,66-646,B(2000),117-122.
- 9. Lord, R.G., Proceeding of the 16th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics(1988), 1427-1433.
- 10. Arkilic, E.B., Schmidt, M.A. and Breuer, K.S., Proceeding of the 20th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics(1996), 983-988.
- 11. Cook, S.R. and Hoffbauer, M.A., Proceeding of the 20th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics(1996), 467-472.
- 12. Lengrand, J.C., private communication, 1999.
- 13. Lengrand, J.C. et al., 18th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics (1992), 276-284.
- 14. 坪井・松本,平成11年度衝撃波シンポジウム(2000), 181-184.
- 15. 坪井, 東京大学学位論文 (2000).
- 16. Anderson, J.D., Jr., Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics, McGraw-Hill Book Co., New York(1989).
- 17. Vidal, R.J. and Wittliff, C.E., Proceeding of the 3rd International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (1963), 343-378.