

指向性分子間ポテンシャルとモチベーションを有する粒子集団としての生物流

Creature crowd flow simulation with directional molecular potential and motivation function

荒館俊, 埼玉大院, 浦和市下大久保 255, E-mail: takashi@lamb.mech.saitama-u.ac.jp

平原裕行, 埼玉大工, 浦和市下大久保 255, E-mail: hira@mech.saitama-u.ac.jp

川橋正昭, 埼玉大工, 浦和市下大久保 255, E-mail: mkawa@mech.saitama-u.ac.jp

Takashi Aradate, Graduated school of Saitama University, 255 Shimo-okubo, Urawa, Saitama, 338-8570, Japan

Hiroyuki Hirahara, Saitama University, 255 Shimo-okubo Urawa Saitama, 338-8570, Japan

Masaaki Kawahashi, Saitama University, 255 Shimo-okubo Urawa Saitama, 338-8570, Japan

Fluid dynamical approach of molecular dynamics method was applied to a creature's flow. Creatures, such as humans, fishes, bird and so on, move in a cluster or crowd usually. Features of crowd behavior were discussed from the point of fluid dynamical view. The motivation of its motion was classified into a several categories due to intelligence. In the present report, three primitive categories were taken into consideration. In order to express an individual molecular potential, directional and influence functions in the dynamics of collision were introduced to take account for the dependency of view angle of creatures. Thermo- dynamical macro quantity such as temperature, pressure were defined for the creature flow. Crossing flows and head on collision between two crowds were simulated and compared with the previous analysis.

1. 序論

離散的に存在する非連続体が, 全体として流動している場合の運動に関しては, 従来から様々な解析が行われてきた. 代表的な例として, 例えば, 交通流¹⁾に関しては, 制御工学的観点から交通量の予測, 渋滞の発生予測, 衝突の回避などの点に関して, 多くの研究が行われてきた. これらにおいては, 車などの平均速度と個々の速度との関連, 車間距離の影響, 交通の流れの中での情報の伝達手法などが議論され, 成果をあげている. また, それらの解析のための制御パラメータを獲得することを目的とした高速道路, 幹線道路における流動の可視化も行われている. 可視化の対象は, 道路上の車だけではなく, 駅²⁾や横断歩道³⁾などの人間の群集に対しても行われ, その特徴的な現象の抽出が行われている.

このような都市工学的な問題のみならず, 同様な考察は生物の流れに対しても行われている. 生物の流れの場合には, それぞれの種が特有の知性を有し, それに対して, 様々なシミュレーションが行われている. 個々の生物は, 単独で行動する場合とは異なり, 群れとして行動するときには, 様々な特徴ある性質を示す. このような生物群の行動は, 生物学, 環境工学の観点から非常に興味ある問題であり, これまでに幾つかの解析が行われている. よく知られているように, 魚群や鳥の群れの行動は従来から動物学的に様々な観察と解析が行われており, 人の群集の行動などは都市工学, 安全工学の観点から研究が行われている.

近年では, 生物の流れは, 複雑系の観点からの考察が行われている. 例えば, めだかの群れのシミュレーション⁴⁾が複雑系の問題として取り上げられている. それによれば, めだかの集団運動がシミュレーションされ, 集団の行動, 分裂, 個体の飛散などが表現されている. 複雑系の一つの特徴は自己臨界現象にある. 群として生活あるいは行動する集団は, 一定の規則に従い行動する. その行動を観察していくと, 群はある状態を境に分裂したり崩壊したりすることがある. このような現象は, 群をなす個々の個体の行動をある規則によって予測し, 相互の干渉を明確に規則付けることで説明していくことができる. その個体の行動を律する規則は複雑でその解析手法はまちまちである.

これらの分析は, 行動学的な解析で, いわば現象論的な手法に基づいている. これに対して, これらの流動を力学的に捉えて, その基本特性を抽出し, その基本特性に知的な行動

要素を付加していこうとする手法も非常に有意義である. そのためには, 生物の行動を知的なレベルによって分類し, 知的レベルの低いほうから数学モデルを構築していく必要がある.

全く知性を有しない個体群の運動として, 例えば, 単純な気体分子の運動は力学的に解析され多くの成果があり, 単原子分子の場合にはほとんど確立されていると言っても良い. これを基本として, 生物や交通の流れを流体力学的に観察した場合, アナロジーの成り立つことが多く, その意味で流体力学的なアプローチはこれらの流れの解析に多くの知見を与えるものと期待される. 例えば, 高速道路で車線が減少するときの渋滞の問題は, 超音速流れと単純にアナロジーが成り立つし, 事故の情報は衝撃波によく例えられるし, Witham⁵⁾が行ったような, 交通問題における伝達情報は, 道路上を伝播する特性曲線として表現される.

このような意味から, 個体の運動を分子運動論的に展開し, 生物群の運動をシミュレーションし, さらにこれに知的な性質を付加していき実際の運動の解析を行うというアプローチは非常に興味深いものである. 本報告では, このような観点から, 人の流れについてのシミュレーションを, 分子運動論的定義から出発して基本的な力学モデルを定義することで行動学を展開し, 群集団の持つ性質を, エネルギー, 温度, 圧力といったマクロな状態量で整理し考察することを目的としている.

2. 個体間の力学

2.1 行動の要素

生物の運動の行動決定は, 非常に複雑で, 様々な要素が関係している. 行動の決定要素を知的レベルの低いほうから順に, 以下に列挙してみた.

行動の基本的モチベーション

接触による知覚情報

近距離の視覚情報

偶発的な方向転換

これらについて若干説明すると, は, 各個体がそれぞれの目的地へ向かおうとする行動の基本要素である. とは類似しているが, 個体間の近距離での, 互いの回避行動の原因となる. 本報告では, この3つを扱った.

2.2 個体のポテンシャル

分子間ポテンシャルを人間の個体間のポテンシャルに適用する。これは、上記の と の要素を表現するためである。一般に分子間ポテンシャルは、以下のように表現される。

$$U(r) = a \left(\frac{d}{r} \right)^s - b \left(\frac{d}{r} \right)^{s'}$$

ここで第1項は斥力項、第2項は引力項である。この式の定数 a, b, s, s' を適切に設定することで、最適なポテンシャルを表現することができる。一般によく知られているレナードジョーンズポテンシャルは、次のような式である。

$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{d}{r} \right)^{12} - \left(\frac{d}{r} \right)^6 \right]$$

ここでこの式を

$$U(r) = a' \left[\left(\frac{d}{r} \right)^s - \left(\frac{d}{r} \right)^{s'} \right]$$

と置き、最適な値を決定する。

ここで、 $S = qs'$ 、 U が最小値となるときの r の値を r_B とする。このとき $U = -\epsilon$ となるような a' の値を決める。また、ここで $\epsilon = 1$ 、 $d = 1.0\text{m}$ とする。このとき a' は、

$$a' = \frac{q^{q+1}}{q-1}$$

として表すことができる。

この $r = r_B$ は、ポテンシャルの底を表す距離であり、前方の粒子に追従する運動を表現するためにも重要な値である。

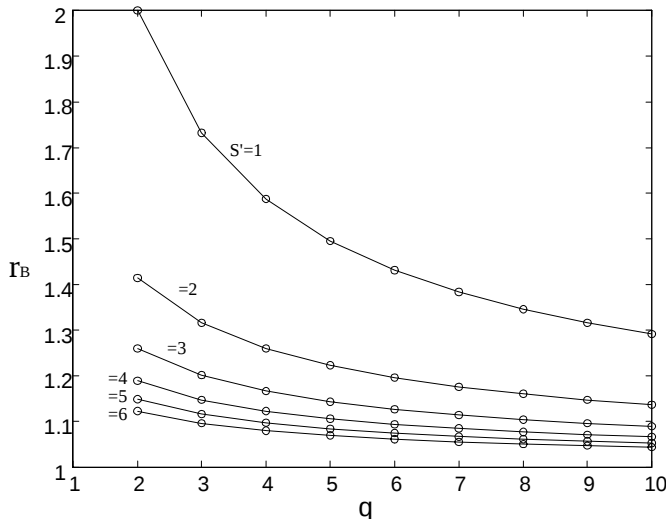


Fig.1 Potential parameters

$s' = 1 \sim 6$ について、 q と r_B の関係を求めた結果を Fig.1 に示す。 r_B は、ポテンシャルの井戸の深さが最も深くなる時、つまり、分子間力が斥力から引力へ変わるときの半径を与え、これは分子の大きさを決定する重要な因子である。 s, s' とその比 q は、ポテンシャルの堅さを表す因子である。したがって r_B は、生物が安定して存在するときの平均個体間距離に相当すると考えればよい。ここでは、Fig.1 の結果を参考にして、 $r_B = 1.5\text{m}$ とし、 $q = 4$ 、 $s' = 1$ を採用した。その場合のポテンシャルの式を次に示す。

$$U(r) = \frac{4^{q3}}{3} \left[\left(\frac{d}{r} \right)^4 - \left(\frac{d}{r} \right)^1 \right]$$

次に、人間の知覚が持つ指向性について考える。人間の行動は、視覚により大きな影響を受けている。そのためその行動は、前方に対し敏感であるが、側方、後方に関しては鈍感である。そのため、粒子前方には斥力が強く働いている。また後方については、後方の粒子が前方の粒子に追従することが起こりうることから、引力が大きく作用している。そのため、人間の持つ個体間ポテンシャルは、角度に依存する。これを表現するため本報告では、分子間ポテンシャルに指向性関数を導入した。

Fig.2 で、2 個体間の位置関係と、それぞれの向きを表す。これを元に、次の 2 つの指向性関数を定義する。

$$g_{fi} = \frac{1 + 5\cos^2\theta_{ij}}{2}$$

$$g_{bi} = \frac{1 - \cos\theta_{ij}}{2}$$

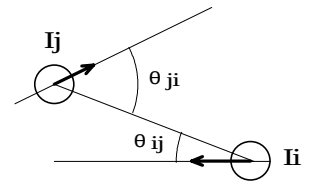


Fig.2 Position between two particles

これらの内、 α_{fi} は斥力項に、 α_{bi} は引力項に対するものであり、それぞれの項にかけられる。この図で、粒子 I_j は、粒子 I_i の影響を受ける。しかも、このとき受ける影響は、粒子 I_j 自体の向きにも左右し、正面に対しては敏感に、側方・後方に対しては鈍感に反応する。そこで、粒子 I_j の向きによる影響係数 β_j を定義し、以下のように表した。

$$\beta_j = \frac{1 - \cos\theta_{ji}}{2}$$

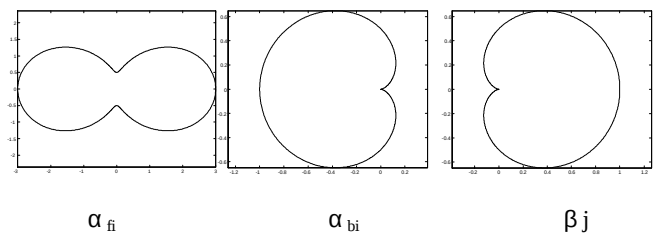


Fig.3 Direction and influence function

これらの指向性関数と影響係数を視覚的に表したものが、Fig.3 である。

これらの指向性関数を導入したポテンシャルの式が、以下の式である。

$$U(r) = \frac{4^{q3}}{3} \left[g_{fi} \left(\frac{d}{r} \right)^4 - g_{bi} \left(\frac{d}{r} \right)^1 \right]$$

$$= \frac{4^{q3}}{3} \left[\frac{1 + 5\cos^2\theta_{ij}}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^4 - \frac{1 - \cos\theta_{ij}}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^1 \right]$$

Fig.4 に、ここで定義したポテンシャルを示す。

この図は、左側が指向性を加えていない場合、右側が加えた場合のポテンシャルである。左右ともに、紙面の左上が進行方向に当たる。本報告では、粒子の進行方向を粒子の正面とした。指向性を加えなかった場合は、全方位に対して一様なポテンシャル分布になっているが、指向性を加えた場合、その分布は正面では斥力が、背後では引力がそれぞれ強調された分布になっている。

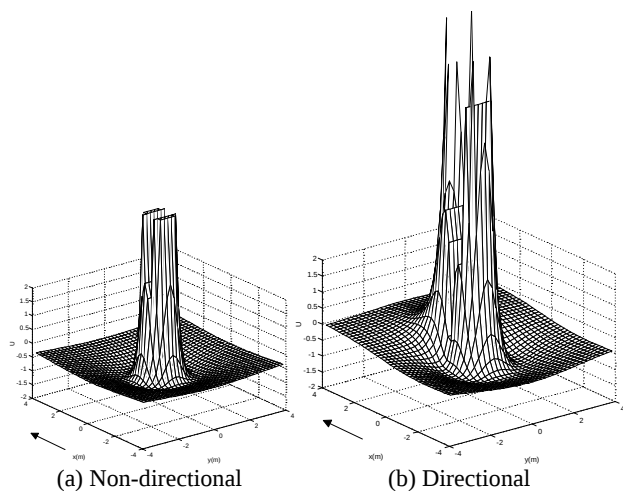


Fig.4 Potential distribution

2.3 個体のモチベーション

個体の持つモチベーションを考えるに当たり、まず2個体間の力の釣合を考える。ここでいう力とは、個体間のポテンシャルによるものである。力の釣合式は、次の式であり、

$$ma=f$$

これを、

$$a = \frac{f}{m}$$

と変形する。2個体の干渉を考慮する場合、質量 m は換算質量 μ を用いる。 μ は、

$$D = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

である。ここで、 m_1 は粒子1の、 m_2 は粒子2の質量である。従って力の釣合式は、ポテンシャル U も用いて表すと、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f}{m}$$

$$= \frac{1}{D} \frac{dU}{dr}$$

と書くことができる。この式を、時刻 t_1 から t_2 にかけて積分する。

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{f}{m} dt$$

$$= \frac{1}{D} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dr} dt$$

従って、

$$v^2 - v^1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{f}{m} dt$$

となり、時刻 t_2 での粒子速度は、

$$v^2 = v^1 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{f}{m} dt$$

と表される。すなわち、上の式では、時刻 t_2 の速度は、前の時刻 t_1 に、干渉の結果生じた速度変化分を加えることによって求められる。しかしながら、通常の生物の行動は、このままではシミュレーションすることはできない。なぜならば、

この式では、生物の行動は、ある初期速度が与えられた場合、その後の行動は、すべて個体間の干渉によって左右されることになるからである。生物の行動の基本はある目的を持った行動であるから、ここでその行動の目的を表すために、個体の持つモチベーション関数 M を導入する。これは、粒子の目的地へ向かうとする、一定の大きさを持ったベクトルである。一般的にはこのモチベーション関数を、時間、空間の関数として与えれば、様々な目的行動を表現することができる。

本報告では、最も単純に、 M は一定のベクトルであると置いている。すなわち、粒子の持つ時刻 t_1 における速度 v^1 に、補正項 X を加え、一定の向きと大きさを持つようにしたものである。このモチベーションは、次の式で表す。

$$M = v^1 + 6$$

これを用いることで、時刻 t_2 における速度は次のように表される。

$$v^2 = M + \int_{t_1}^{t_2} \frac{f}{m} dt = M + \frac{1}{D} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dr} dt$$

従って、指向性関数も加えると、次の式で、表現される。

$$\begin{aligned} v^2 &= M \\ &+ \frac{1}{D} \int_{t_1}^{t_2} \frac{4^{4/3}}{3} \frac{d}{dr} \left(9 \left(\frac{d}{r} \right)^4 - 9 \left(\frac{d}{r} \right)^1 \right) dt \\ &= M \\ &+ \frac{1}{D} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1 + \cos \theta_{ji}}{2} \frac{4^{4/3}}{3} \\ &\quad \frac{d}{dr} \left(\frac{1 + 5 \cos^2 \theta_{ij}}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^4 - \frac{1 - \cos \theta_{ij}}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^1 \right) dt \end{aligned}$$

2.4 マクロ量の定義

以上によって群集の運動が表現された後に、 N 個の母集団を対象にした局所的な温度、数密度、圧力といったマクロ量を古典分子運動論とのアナロジーによって定義できる。

個体 i に対する数密度 n 、密度 ρ は、例えば、自分自身を含めた周囲の N 個体を対象にして、 N 番目に近い個体までの距離を r_N とすれば、

$$n = \frac{N}{\pi r_N^2} \quad \rho = \frac{n}{N} \sum m_i$$

温度は群集の平均速度からの変動成分を計算して次式で表す。

$$T = \frac{2}{3N} \frac{1}{k} \left\langle \frac{1}{2} \sum m_i (v_i - \bar{v})^2 \right\rangle$$

圧力は気体の状態方程式とのアナロジーから次式で定義する。

$$p = nkT = \frac{2}{3N} n \left\langle \frac{1}{2} \sum m_i (v_i - \bar{v})^2 \right\rangle$$

圧力は、 N/m の次元を持ち単位長さ当たりの力として定義できる。温度の次元 K に関してはボルツマン定数（分子1個当たりのエネルギーと温度との換算係数）に相当する定数 k を適当に定めればよい。ただし、 k がある特定の集団に対して時間的に一定でよいのか、あるいはどのように決定すべきなのかは今後、更に検討を要する重要な事項である。

3.結果及び考察

3.1 2 個体間の運動のシミュレーション

Fig.2 のような, 2 粒子の運動のシミュレーションを行った。ここでは, 個体 1 が静止しており, それに個体 2 が近づいていく場合を行った。計算結果を Fig.5 に示す。ここで個体 1 は, 図の原点で止まっており, Fig.5 では, 原点の○印で表した。指向性は考慮しており, 個体 1 は紙面の左方向を向いている。

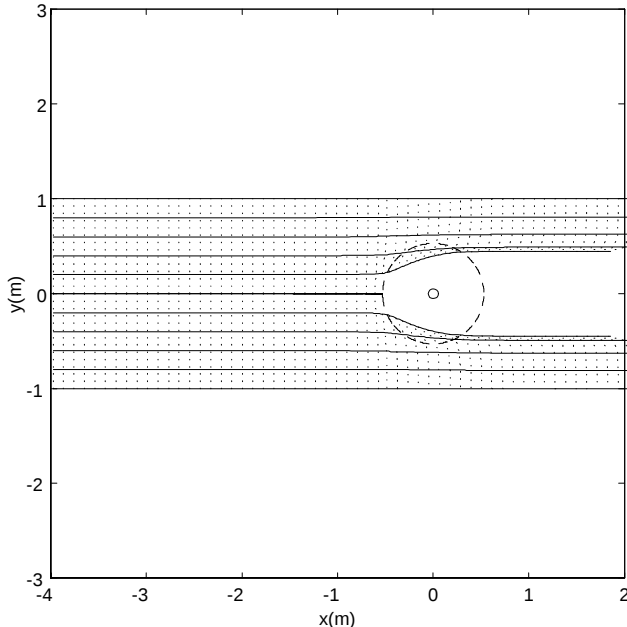


Fig.5 Simulated motion between two persons (against)

個体 2 には, 紙面右方向に向かい, 一定速度で運動しようとするモチベーションを与えた。大きさは, 1.1m/s である。指向性は考慮しており, その時点での進行方向を粒子の正面とした。また, 各個体の質量は 60kg とした。

ここで個体 2 の初期位置を, y 方向に少しずつずらして計算を行った。Fig.5 の横線は, それぞれの場合での個体 2 の軌跡を表している。個体 2 が個体 1 の存在により, 個体 1 の周囲を迂回する運動が表されている。また, 個体 1 の正面に向かって進んだ粒子は, 個体 1 に一定の距離を置いて静止した。ここが, 個体 2 の持つモチベーションと個体間ポテンシャルによる斥力が釣り合う所である。

原点周辺の点線円は, その距離を半径として描いたものである。モチベーションとポテンシャルの大きさのバランスにより, その半径は変化する。個体 1 の側方では, この円内に個体 2 が入り込んでいる。これは, ポテンシャルに作用している指向性の影響により, 個体 1 側方への斥力が弱くなっているからである。

3.2 交差流のシミュレーション

次に, クラスタの交差流を考えた。集団が他の集団を横断するのは, 人間特有の行動である。その基本的な設定を Fig.6 に示す。

2 つの集団(クラスタ)を用意し, それぞれをグループ 1, グループ 2 とした。グループ 1 を紙面左から右へ, グループ 2 を紙面下から上へ移動させた。2 つのグループとも, 粒子を 100 個ずつ配置した。モチベーションを与える場合には, $M=1.1\text{m/s}$ をそれぞれの方向へ向けて与えた。初期の配置はランダムに設定した。ただし, グループの疎密を数密度であ

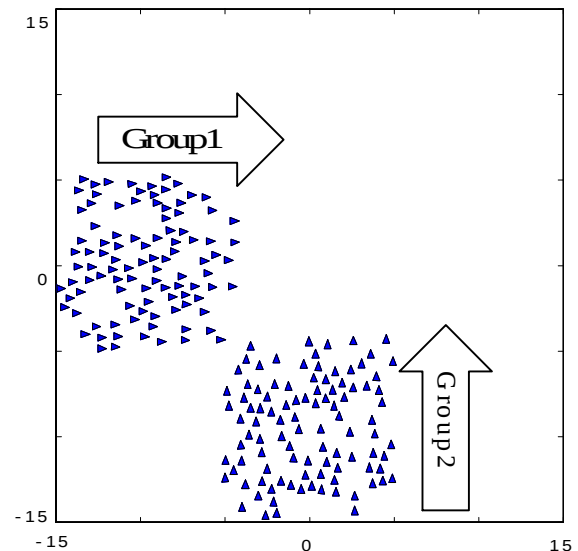
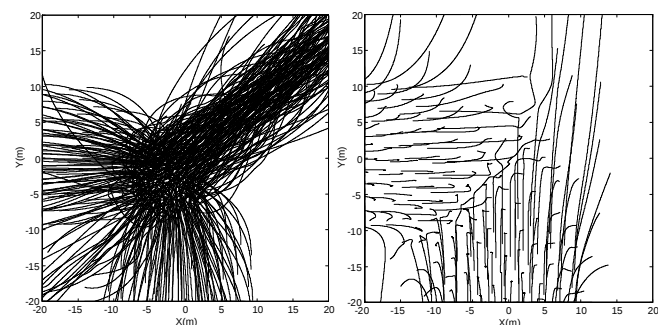


Fig.6 Movement of cluster in cross flow

らかじめ考慮し, それに相当する粒子間距離が, 初期状態与えられるように調整を行った。Fig.6 に示した三角形が一つ一つの粒子であり, それぞれの向いている方向を示している。ここでは, 指向性やモチベーションの効果を考えていく。

3.2.1 指向性の効果

Fig.7 は, 粒子にモチベーションを与えなかった場合の交差流を流跡線で表したものである。(a)は粒子に指向性・モチベーションとも与えなかった場合, (b)はモチベーションは与えず, 指向性のみを与えた場合である。初期配置は, 粒子間隔を 2m に調整し, 比較的疎な状態とした。粒子にモチベーションを与えなかったため, 初期速度 1.1m/s をそれぞれの進む方向へ向けて与え, その慣性だけで運動す



(a) Non-directional (b) Directional
Fig.7 Cross flow without motivation

るようにした。

(a)が示すように, 粒子が指向性もモチベーションも持たない場合, それぞれのグループは次第に集まりながら進む。これは, 粒子の持つ引力の影響である。気体・液体とは異なり, 有限な数の粒子が局所的に集中して存在しているからである。集まりながら進む粒子は, 両グループが接触したところで, 他方のグループを横断できず, 図の対角線方向に広がる。多くは力の合成で右上へ向かって進むが, 一部は左下へ向かう。この現象を人間に当てはめる場合, 極めて不自然である。

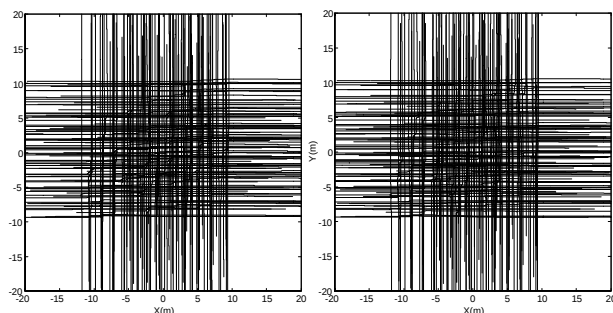
一方 (b) のように粒子に指向性を与えた場合, (a)とは対

照的な動きを示した。(a)に見られるような粒子の集まりが、見られなくなっている。これは指向性関数の効果により、粒子背後以外に働く引力が、弱くなっているからである。多くの粒子は初期速度の方向へ並行して進む。グループ両端の粒子が広がるように進んでいるのは、斥力にはじかれているからである。両グループが接触したとき、これも他方のグループを横断できないが、こちらは各粒子が急激な減速を見せる。粒子正面には、指向性関数により斥力が働いているからである。そして一度速度をゆるめた粒子は、それ以上粒子を動かそうとする力が存在しないため、その場でほとんど停止してしまう。

どちらの場合も、両グループの接触後、粒子は他方のグループを横断することができない。これは、粒子がモティベーションを有していないからである。

3.2.2 モティベーションの効果

Fig.8 は、粒子にモティベーションを与えた場合の流跡線である。(a)は指向性を与えなかった場合、(b)は指向性を与えた場合である。(a)については、Fig.7 で見られたような、粒子の集まりながらの移動が見られなくなり、各集団とも、平行な移動を示している。これは、個体間ポテンシャルによる引力の影響より、モティベーションの効果の方が大きいからであると考えられる。(b)については、集団が交差する際の急激な減速が見られなくなっている。これは、斥力による制動を受けても、モティベーションの効果により運動を続けられるからである。



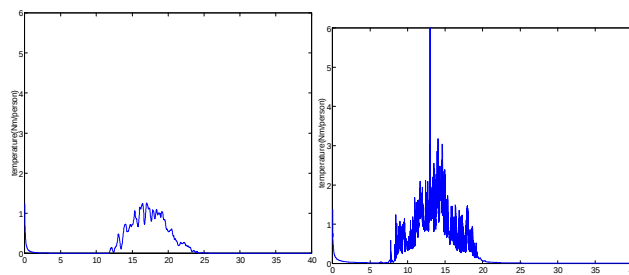
(a) Non-directional (b) Directional
Fig.8 Cross flow with motivation

どちらの場合も、モティベーションを与えてはじめて、集団同士の横断が見られるようになった。両グループの交差がなされている間、それぞれの粒子は他の粒子の影響を受けてこれを回避するため、非常に複雑な挙動を示している。ともにすべての軌跡を表示したためわかりにくいですが、指向性を与えた方が、粒子の方向転換は頻繁に、激しくなされていることが観察された。

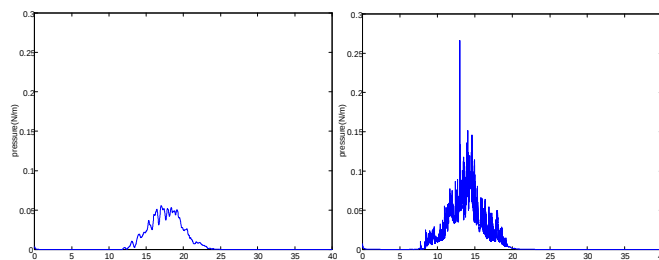
3.2.3 マクロ量の計算

Fig.8 に示した運動について、温度、圧力のマクロ量の計算を行った。温度は圧力の計算に用いられるだけでなく、粒子の運動の平均速度に対するばらつきを測る上でも非常に重要な量である。圧力は、各粒子について、その最も近傍にある 10 粒子の入る円の面積から計算した密度を用いて、これを求めた。

温度の時間的変化を Fig.9 に、圧力を Fig.10 に示す。ともにグループ 1 についての量で、両方とも、(a)が指向性を考慮しない場合、(b)が考慮した場合である。



(a) Non-directional (b) Directional
Fig.9 Temperature of cluster

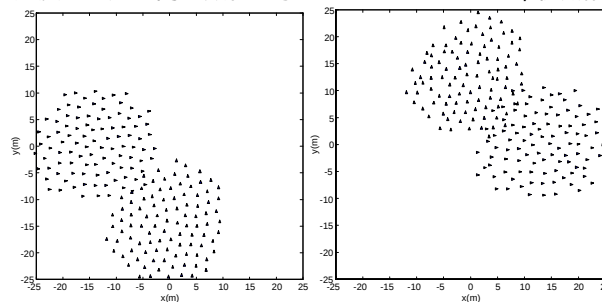


(a) Non-directional (b) Directional
Fig.10 Pressure of cluster

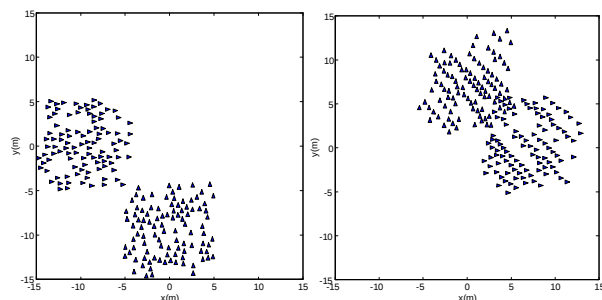
図から明らかなように、温度・圧力とも、指向性を有する方の変動が非常に大きくなっている。時間的振幅も大きくなり、変動スペクトルも非常に高く、鋭くなっていることが観察される。これは粒子に指向性が加わることで、粒子同士の干渉が、短時間に、しかも強力になされているからである。

3.2.4 初期配置の影響

前節に示したマクロ量の値は、初期配置の状態に強く依存する。すなわち、初期状態での密度が大きければ、それだけ温度・圧力も高い数値を示すことになる。また、初期配置で



(a) Before cross (b) After cross
Fig.11 Distribution of humans in cross flow case of low density



(a) Before cross (b) After cross
Fig.12 Distribution of humans in cross flow case of high density

の粒子の分布が、時間的変動に影響し、グラフの形を変化させる。

また初期配置の粒子密度は、集団交差前後の粒子の分布に影響を与える。Fig.11 は、粒子の初期配置を比較的疎にした場合の、交差前後の粒子分布である。この場合の粒子間距離は、2m 以上である。そして Fig.12 は、初期配置を密な状態にした場合である。粒子間距離は、0.4m 以上である。

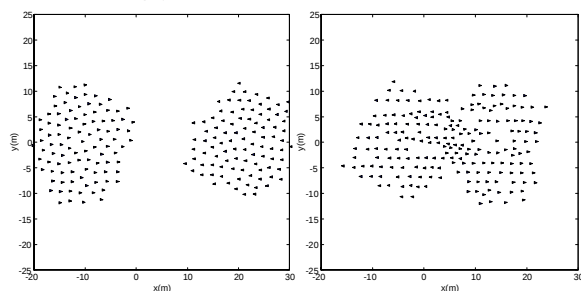
いずれも(a)が交差前、(b)が交差後の粒子分布で、指向性を考慮した場合である。疎な状態の交差流では、交差前後の粒子分布に大きな変化は見られない。一方密な状態では、集団内部に粒子の列が斜めに生じ、斜めの縞模様が現れている。

過去の研究において、実際の人の群集が交差するとき、これと同じように人間の列が斜めに生じ、群集内部に斜めの縞模様の生じることが報告されている。粒子が密な場合のクロスフローシミュレーションは、その報告との一致を見た。

このような縞模様は、交差流における整流効果と呼べるものであると思われる。この効果は、粒子の指向性の有無に関わらず現れた。ただし指向性を考慮した場合の方が、列と列の間隔が広がっている。

3.3 対抗流のシミュレーション

交差流に引き続き、2つの集団が正面から衝突する場合である対向流のシミュレーションを行った。ここでは、集団の衝突の前後で、集団内の粒子の分布に規則性が見られるか否かについて考察した。



(a) Before counter (b) After counter
Fig.13 Distribution of humans in counter flow case of high density

Fig.13 に示したのが、対抗流の一例である。粒子に指向性を考慮し、また粒子の密度を 0.4m という、比較的密な状態に設定した。粒子数は、交差流の場合と同じで、各集団について 100 個を配置した。それぞれのモティベーションは、互いに向かい合う方向に設定した。その大きさは、1.1m/s である。

その結果、温度・圧力は、交差流の場合と同様な結果が得られた。そして、粒子を密な状態にした場合、衝突、対向の結果、集団内の粒子が列をなし、進行方向に平行な縞模様が現れた。過去にもこの現象の観察を行ったものがあり、計算結果は、その報告と一致した。

4. 結論

以上のように、本研究の目的とする生物流に関して、基本的な個体ポテンシャルモデルを構築することで、集団運動を適切に表現でき、集団（クラスター）のマクロ量を定量的に表現し妥当な結果を得ることができた。シミュレーションの結果から、二つの群集流動のクロス、正面衝突では、個体間の空間分布に規則性が発生し、これによって流動がスムーズに行われることや、個体の有する指向性の存在によって、集団の合流と分離がスムーズに行われることが明確に説明で

きた。反面、群集のマクロな熱力学的な量は、指向性を考慮しない場合よりも変動が大きいことが明らかとなった。

参考文献

- (1) Wagner,C. and Hoffmann,C. and Sollacher,R. and Wagenhuber, J. and Schumann,B., "Second-order continuum traffic model," Phys. Review E, Vol.54, No.5, Nov., (1996), pp.5073-5085.
- (2) 中,"交差流動の構造," 日本建築学会論文報告集 258(1977),pp.93-102.
- (3) 加藤,上原,中村,吉岡,"群集対向流動の解析,"日本建築学会論文報告集 289(1980),pp.119-129.
- (4) 科学シミュレーション研究会,"パソコンで見る複雑系・カオス・量子," 講談社(1997),pp. 163-191.
- (5) Witham,G.B., "Linear and Nonlinear Waves, Wiley," New York,(1974), pp.68-80.