

フリーメッシュ法の流体解析への適用

Application of free mesh method to the fluid analysis

○ 野島 和也, 中央大理工, 〒 122-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail : <noji@kc.chuo-u.ac.jp>

川原 睦人, 中央大理工, 〒 122-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail : <kawa@civil.chuo-u.ac.jp>

Kazuya NOJIMA, Dept. of Civil Eng., Chuo Univ., Kasuga1-12-27, Bunkyo-ku Tokyo 112-8551, JAPAN

Mutsuto Kawahara, Dept. of Civil Eng., Chuo Univ., Kasuga1-12-27, Bunkyo-ku Tokyo 112-8551, JAPAN

This paper presents an application of free mesh method to the fluid analysis. Free Mesh Method (FMM) is the analytic technique in which the mesh data is not necessary as the input data. It is a kind of mesh less method. The process of free mesh method is shown in this research. Delaunay triangulation is used in the process which temporary elements are made to distribute. We do comparison with FEM that generally being used to examine the validity of FMM solving two-dimensional advection equation in this research. Moreover a two-dimensional incompressible flow that is described by the Navier-Stokes equation is solved.

1. はじめに

近年, 有限要素解析において, 入力データとしての要素生成の時間が, 実際の計算を行う時間よりも長くなってきている. このことから, 本研究では初期のメッシュデータの入力を必要としないメッシュレス解法に注目する. 本論では, 現在メッシュレス解法として, よく取り上げられているものの中のフリーメッシュ法を用いて, 流体解析をすることにより, その手法の有効性を検討する.

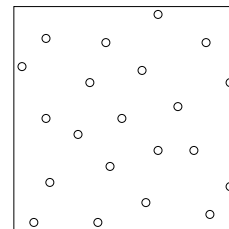


Fig.1. (step1)

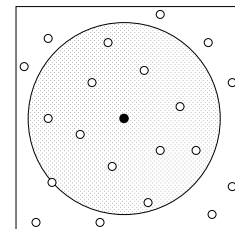


Fig.2. (Step2)

2. フリーメッシュ法

フリーメッシュ法 (FMM) は, 要素-節点コネクティビティー情報を入力情報として必要せず, 剛性マトリクスの評価を節点単位で行う数値解析手法である. この手法を用いれば, 境界情報と節点分布のみから解析対象をモデル化することができる. フリーメッシュ法では, 各節点ごとに周囲の節点を用いて局所的な有限要素を発生させ節点の状態量を評価する. 局所的要素としては三角形要素を用いるので, 補間関数は従来の有限要素法と同じ物を用いることができる. また, 有限要素法のための計算手法が利用可能である. フリーメッシュ法の解析手順を以下に示す.

解析手順

- i. 解析のための節点を解析領域全体に分布する (Fig. 1).
- ii. 節点群の中のあるひとつの節点に着目し, これを中心節点とする. 中心節点からある半径にある節点を局所要素作成の候補節点として選ぶ (Fig. 2).
- iii. 選び出した候補節点を用いて, 要素を発生させる (Fig. 3). 本研究では局所領域分割に, Delaunay 三角分割法を用いる.
- iv. 生成された要素群の中から, 中心節点に隣接するものを, その中心節点の局所要素として, また, その局所要素に含まれる節点を衛生節点として取り出す (Fig. 4).
- v. 得られた局所要素から有限要素法と同じ方法で剛性行列を作成し, 中心節点の剛性評価を行う.
- vi. 以上の手順をすべての節点において行う.
- vii. すべての節点における剛性方程式を全体系の剛性方程式に重ね合わせる.
- viii. 全体系の剛性方程式を解いて解を得る.

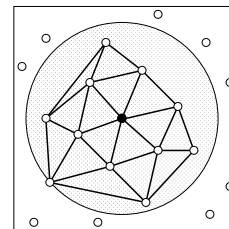


Fig.3. (step3)

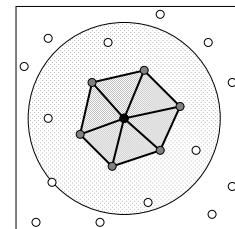


Fig.4. (Step4)

3. デローニー三角分割法

デローニー三角分割法 (1) は, 任意に設定された節点群を対象として, 解析領域を三角形に分割する手法である. これにより発生された三角形はそれぞれ個別な外接円を有しており, その外接円内部には他の三角形の節点を含まないという特徴をもつ. しかし, 例外的に複数の三角形がひとつの外接円を共有する場合があり, これはデジェネラシー (Degeneracy) と呼ばれる (Fig.5). 格子状節点配置においては, 格子内の斜めの線が右上がりでも右下がりでもどちらでも良いことになる. しかし, 解析結果はこれらの扱いによって解析結果が異なってくる場合がある. そこで, 局所要素生成の際に, 格子内の斜めの線がすべて右下がりになるように要素の形を決めた場合 (Fig.6) と, 斜めの線が中心節点を通るように決めた場合 (Fig.7) の2つ場合についても計算を行う. デローニー三角分割の方法については, 文献 (1) を参照してほしい.

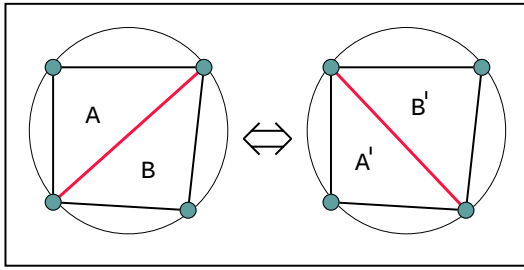


Fig.5. Degeneracy

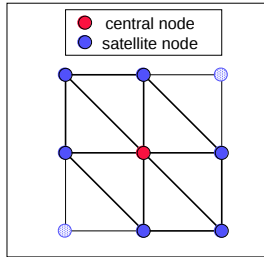


Fig.6. Case(1)

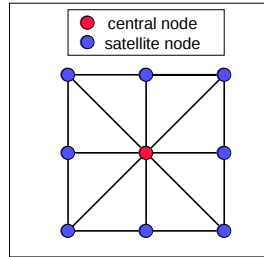


Fig.7. Case(2)

4. 基礎方程式と時間・空間方向の離散化について
非圧縮性粘性流れにおける基礎方程式は、無次元化することによって、以下の運動方程式と連続式によって表される。
運動方程式

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \text{ in } \Omega \quad (1)$$

連続式

$$u_{i,i} = 0 \text{ in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 u_i , p は、流速、圧力、 f_i は外力項、また、 $\nu = 1/Re$ であり、 Re は、レイノルズ数である。時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し、空間方向の離散化については、流速と圧力において気泡関数要素と1次要素を用いた混合型有限要素法を用いる⁽³⁾。

5. 数値解析例

解析例として、移流方程式の rotating cone problem, Navier-Stokes 方程式の Standing Vortex problem, cavity flow 解析を扱い、フリーメッシュ法と有限要素法における解の比較を行う。

5.1 値解析例 1

移流方程式の rotating cone problem は、Fig.6 に示すような cone を初期値として与え、点0を中心として Fig.7 に示すような流れをもつ場により cone を周回させるものである。この問題は以下の式で表される。
移流方程式

$$\dot{\phi} + u_j \phi_{,j} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\phi(x, y; t)$ は、未知量である。 $u_i(x, y)$ は、流速成分をあらわす。時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し、空間方向の離散化については、気泡関数要素を用いる⁽³⁾。輸送方程式は慣性項と移流項よりなっているため、cone はその形を変形させずに1周し、元の状態に戻るようになる。しかしながら、数値計算におけるさまざまな誤差によって、計算された cone はその形を変えることがある。初期の形状をより保存した解が得られる方法が精度が高いといえる。本研究では、フリーメッシュ法と有限要素法とを比較するにあたり有限要素解析には、Fig.10 に示す 20×20 の要素情報を用いる。一方、フリーメッシュ法による解析においては有限要素解析におけるものと同じ節点配置を用いる (Fig.11)。また、デジェネラシーの扱いは、前に示した2通りを考える (Fig.6, Fig.7)。

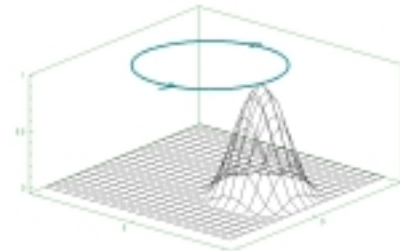


Fig.8. Initial condition of rotating cone problem

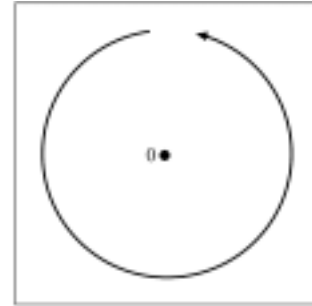


Fig.9. Initial condition of rotating cone problem

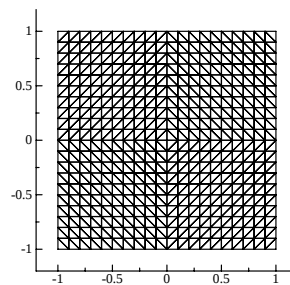


Fig.10. Case(1)

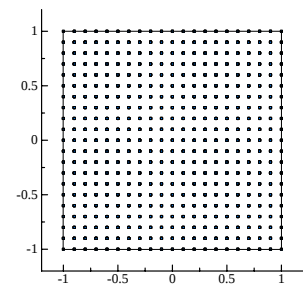
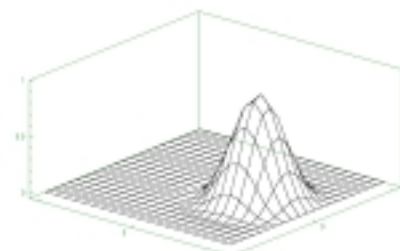


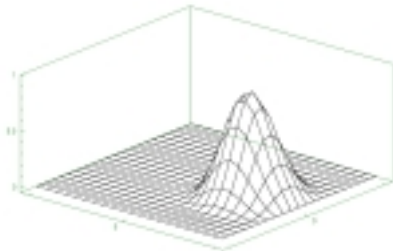
Fig.11. Case(2)

有限要素解析における1周後の cone 形状を Fig.12 に示し、フリーメッシュ法によるものを Fig.13, Fig.14 に示す。フリーメッシュ法による解析の結果は、デジェネラシーを Fig.6 のように扱ったものを Free mesh method(1)(Fig.13), Fig.7 のように扱ったものを Free mesh method(2)(Fig.14) として示す。

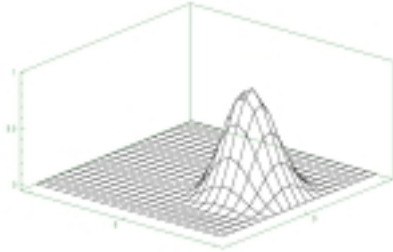
まず、1周後の cone の減衰に注目する。有限要素法を用いた場合 cone height=94.347 % であるのに対しフリーメッシュ法を用いた場合 cone height=91.717 % と cone height= 91.994 % となり減衰が大きい。また、中心節点周りのデジェネラシーの扱い方によっても違いが出たことがわかる。次に cone 形状に注目すると、有限要素法を用いた場合、cone の移流方向後方に波のようなものが発生しているのに対し、フリーメッシュ法の場合はそれが小さい。しかしながら、フリーメッシュ法の結果では、cone の裾の広がっている。このことから cone が拡散されていてその為には波のようなものが小さくなったと考えらる。いずれの場合も節点配置が粗いにもかかわらず cone の高さが初期の 90% 以上であり減衰は小さいといえるで、計算誤差は大きくないといえる。



Cone height = 94.347 %
Fig.12. Finite element method



Cone height = 91.717 %
Fig.13. Free mesh method(1)



Cone height = 91.994 %
Fig.14. Free mesh method(2)

	FEM	FMM(1)	FMM(2)
Cone height	94.347 %	91.717 %	91.994 %

5.2 数値解析例 2

Navier-Stokes 方程式の Standing Vortex problem を扱う。この問題の目的は、計算手法がどの程度の数値的な散逸誤差をもつかを調べる問題である。非粘性流れを仮定し、初期条件として人工的な渦を発生させ計算を進める。厳密解は初期条件そのものであるが、安定な計算なら必ず解は減衰する。初期の渦がどの程度の減衰をしたかを調べることで数値的な散逸誤差を評価するものである。解析領域 (Fig.12) は、 1×1 であり、 20×20 の均等な節点配置を用いる。初期条件は領域の中心からの局座標 $\{r, \theta\}$ による次式によって表されこれを Fig.13 に示す。

$$u_r = 0, u_\theta = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 < r < 0.4 \\ 0 & r > 0.4 \end{cases} \quad (4)$$

時間増分 Δt は、 $\Delta t = 0.05$ と設定した。計算回数は 60 回で、 $t = 3$ まで行っている。有限要素法との比較にあたっては、有限要素に 2 種類の配置のものを用いた (Fig.15)。これは、要素配置により有限要素法の解にも差が出ていることから、フリーメッシュ法と有限要素法との比較をより広く行うことを目的としたものである。

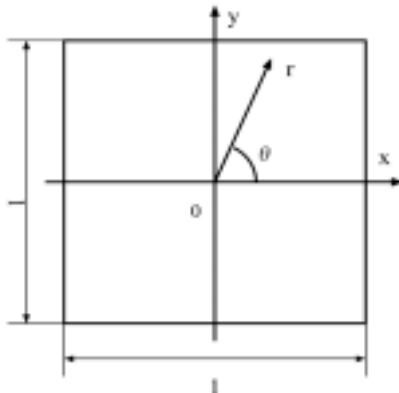


Fig.15. The analytical domain of Standing Vortex problem



Fig.16. Initial condition of Standing Vortex problem

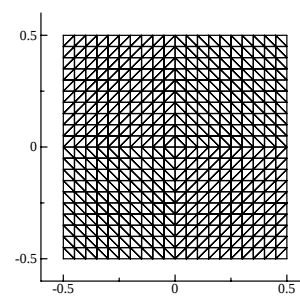


Fig.17. Finite element mesh(1)

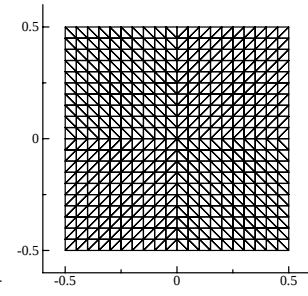


Fig.18. Finite element mesh(2)

有限要素解析における結果は、Fig.15 の mesh (1) を用いたものを FEM(1) とし、mesh(2) を用いたものを FEM(2) として示す。また、フリーメッシュ法による解析の結果は、デジェネラシーを Fig.6 のように扱ったものを FMM(1)、Fig.7 のように扱ったものを FMM(2) として示す。

Fig.24 より有限要素法の mesh(1) の場合と比べ、フリーメッシュ法ではエネルギー減衰が 1.5 倍程度大きくなっている。しかし、有限要素法においてもメッシュ形状の違いで、エネルギー減衰が大きく異なっており、全体で見るとエネルギー減衰は有限要素法とフリーメッシュ法では差がないといえる。しかしながら、Fig.22 のフリーメッシュ法の Case(1) の場合では、中心渦の周りに新しい流れができてしまっていることから、この解析においては、中心節点周りの要素の斜めの線を一方方向に固定するのは好ましくないといえる。Case(2) についてはエネルギー減衰、流れの変化ともに精度に問題はないといえる。

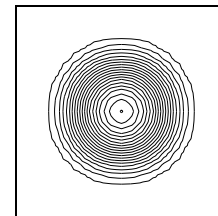


Fig.19. Initial streamline

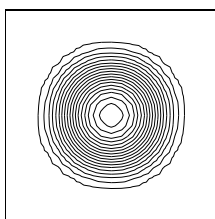


Fig.20. Streamline
<Finite element
method(1)>

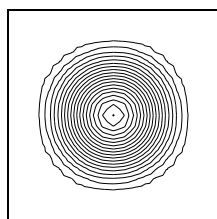


Fig.21. Streamline
<Finite element
method(2)>

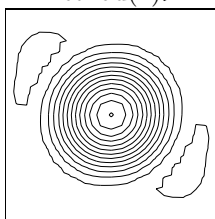


Fig.22. Streamline
<Free mesh method(1)>

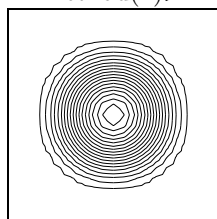


Fig.23. Streamline
<Free mesh method(2)>

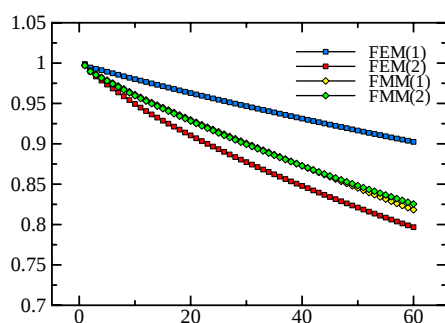


Fig.24. Energy loss

5.3 数値解析例 3

定常解を持つ問題の検証として取り上げられる，Cavity 内の流れの解析を行う．ここでは，有限要素法とフリーメッシュ法の比較のため *Reynolds* 数は一定として解析を行った．解析領域と境界条件を Fig.25 に示す．*Reynolds* を $Re = 400$ とし，Fig.26 に示す 32×32 の不均等メッシュを用いている．時間増分量は $\Delta t = 0.025$ として計算を行っている．計算は $t = 125$ まで行っている．

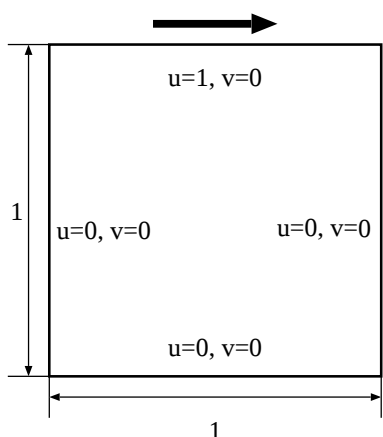


Fig.25. Boundary condition of cavity flow

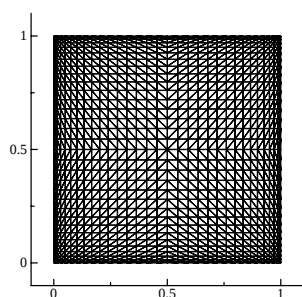


Fig.26. Finite element
mesh

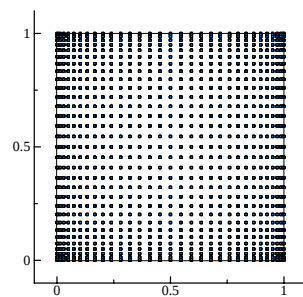


Fig.27. Input nodes and
boundary

表に計算結果と Ghia ら⁽⁶⁾ の (128×128 分割) の比較を示す．ここで表中の $\psi_{min}, \omega_{v.c.}, \{x, y\}$ は，それぞれ，渦中心の流れ関数の最小値とその節点での渦度と座標を示す．有限要素解析における圧力コンター図を Fig.28 に，また，フリーメッシュ法による解析の結果は，デジェネラシーを Fig.6 のように扱ったものを Fig.29，Fig.7 のように扱ったものを Fig.30 に示す．

本研究においては Ghia らの結果とは異なっているが，近い値になっている．その中で，有限要素法とフリーメッシュ法を比べると，流線関数については，ほぼ同じであるが，渦度に注目するとフリーメッシュ法での解析結果のほうが Ghia らの値に近いことがわかる．

	ψ_{min}	$\omega_{v.c.}$	Location	
			x	y
FEM	-0.1095	2.11249	0.546	0.592
FMM(1)	-0.1096	2.29594	0.546	0.592
FMM(2)	-0.1093	2.27734	0.546	0.592
Ghia et al.	-0.1139	2.29469	0.555	0.606

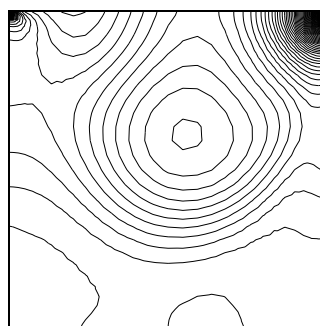


Fig.28. Pressure contour line (FEM)

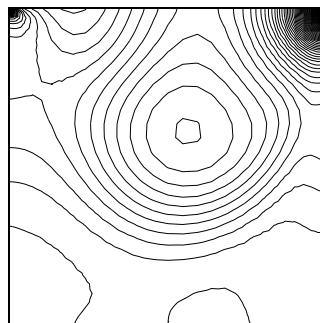


Fig.29. Pressure contour line (FMM 1)

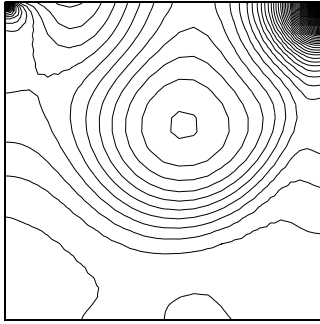


Fig.30. Pressure contour line (FMM 2)

5.4 数値解析例 4

解析領域に下のような円筒を含む、Navier-Stokes 方程式を用いた 2 次元非圧縮流れを、フリーメッシュ法を用いて計算を行う。解析領域には下のような円筒を含むものを用いて、内部境界が存在する領域でも解析が可能であることを確かめる。入力する節点配置および境界は Fig.32 に示す。

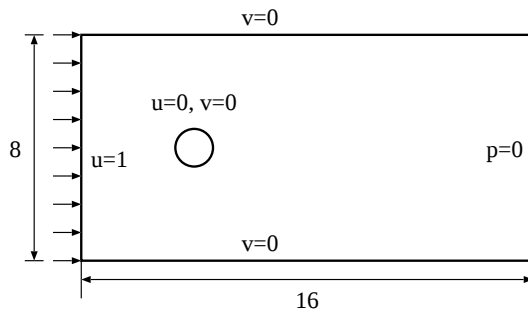


Fig.31. Boundary condition

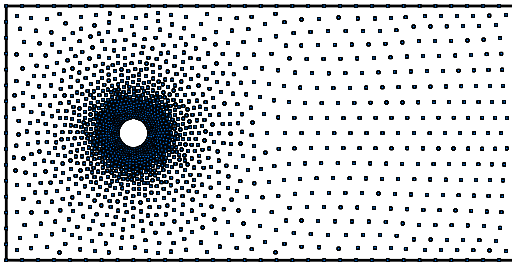


Fig.32. Nodes and boundaries

以下に、 $t=50$ の圧力コンター図と渦度コンター図を示す。2 つの図からこの用な中に物体を含む領域でも解析が可能であることがわかる。

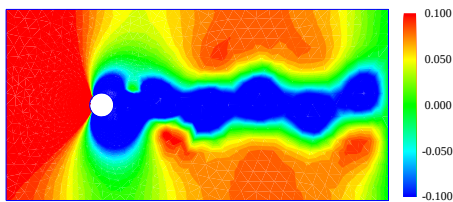


Fig.33. Pressure color contour (FMM)

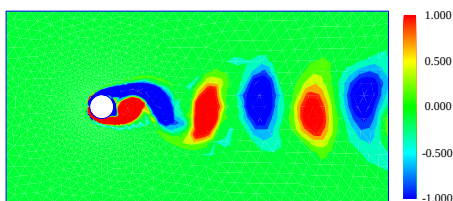


Fig.34. Vorticity color contour (FMM)

6. おわりに

本研究により以下のことが確認できた。

- ・メッシュレス法的一种であるフリーメッシュ法が流体解析に適用できる。
- ・気泡関数、混合補完といった有限要素法の計算手法を適用することができ、その成果を得ることができる。
- ・有限要素法と同等の計算精度を得ることができる。

参考文献

1. 谷口 健男, “FEM のための要素自動分割 (デローニー三角分割の利用),” 森北出版, (1992)
2. 丸岡, 松本, 川原, “四角形要素における正規化気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式の分離型有限要素法,” 構造工学論文集, vol.44A(1998), pp. 383-390.
3. 松本, 梅津, 川原, “線形型気泡関数を用いた非圧縮粘性流体解析と適応型有限要素法,” 応用力学論文集, vol.2(1999), pp. 223-232.
4. 後藤, 矢川, 宮村, “混合法を用いたフリーメッシュ法による高精度弾塑性動解析,” 計算工学講演会論文集”, (2000), pp. 207-210.
5. Yagawa, G. and Yamada, T.: free Mesh Method: a new mesh less finite element method, Comput. Mech., Vol.18, pp383-386,1996
6. U.Ghia,K.N.Ghia,and C.T.Shin, : High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, J.Comput.Phys., 43, pp.347-411,1982