非定常二次元粘性流れのＣＩＰ型有限要素法解析
（高レイノルズ数における最適タイム・ステップ等の検討）

CIP-Finite Element Analysis for Unsteady Two-Dimensional Viscous Fluid Flows
(Investigation of a time step size in case of high Reynolds numbers)

山田喜士，信大院，〒380-8553　長野市若里 4-17-1, E-mail:cslab18@gipwc.shinshu-u.ac.jp
松田安弘，信大工，〒380-8553　長野市若里 4-17-1, E-mail:matusda@gipwc.shinshu-u.ac.jp
邵　長城，信大工，〒380-8553　長野市若里 4-17-1, E-mail:cslab01@gipwc.shinshu-u.ac.jp
吉野正人，信大工，〒380-8553　長野市若里 4-17-1, E-mail:masato@gipwc.shinshu-u.ac.jp
Yoshihito Yamada, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan
Yasuhiro Matsuda, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan
Changcheng Shao, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan
Masato Yoshino, Shinshu University, Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan

In this study, the CIP-finite element method (CIP-FEM) is proposed for the analysis of viscous fluid flows. This method is a combination of the SIMPLER formulation and the CIP (Cubic Interpolated Propagation) method. The SIMPLER formulation is used to solve a coupled problem of velocity and pressure, and the CIP method is used to deal with convection terms. The two-dimensional driven cavity flow problems are solved up to the Reynolds number of 10,000 with non-uniform meshes. The results agree well with those of Ghia et al.

1. 緒言

高レイノルズ数域における粘性流れの解析においては移流項が支配的となるため，高精度で安定性の良い数値解法が望まれる．本研究では流速と圧力の連成については SIMPLER 法を取り入れた有限要素法(MSR 解法)[1]により，流速の予測値計算については CIP 法[2]を取り入れた CIP 型有限要素法[3]を開発し，この技法を用いて非定常二次元粘性流れ解析を行った．計算例としてキャビティ内粘性流れを取り上げ，不等長の長方形メッシュを用いてレイノルズ数 10,000 までの解析を行った．そして他の研究例との比較・検討により，本技法の有効性と計算条件の最適化について検討した．

2. 基礎式

基礎式として連続の式，Navier-Stokes 方程式の無次元形を用いる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$：速度ベクトル，p：(圧力／密度)，Re：レイノルズ数，t：時間である．

CIP 法での三次補間関数を求める際には速度の空間一階微分値が必要であるが，それらは式(2)の両辺をそれぞれ x, y 方向で微分することにより得られる次式に支配される．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_x}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_x = -(\boldsymbol{u}_x \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla p_x + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{u}_x \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_y}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_y = -(\boldsymbol{u}_y \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla p_y + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{u}_y \tag{4}$$

ただし，$\boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_y$：$x, y$ 方向への速度微分値，p_x, p_y：x, y 方向への（圧力／密度）の微分値である．

3. CIP 型有限要素法による定式化

3.1 擬似速度 $\bar{\boldsymbol{u}}$ と圧力の予測値 p^*

式(1)と式(2)を SIMPLER 法と同様の考え方で解く．すなわち式(2)の非定常項を $(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n)/\Delta t$ で離散化すると次式を得る．

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^n + \left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{u}^n - (\boldsymbol{u}^n \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^n\right]\Delta t \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \bar{\boldsymbol{u}} - \Delta t \cdot \nabla p^* \tag{6}$$

式(5)にガレルキン法を適用し擬似速度 $\bar{\boldsymbol{u}}$ を求める．また式(6)の両辺について発散をとり，式(1)を考慮して得られるポアソン方程式(式(7))にガレルキン法を適用し圧力の予測値 p^* を求める．

$$\nabla^2 p^* = (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{u}})/\Delta t \tag{7}$$

3.2 移流フェイズと非移流フェイズ

なお式(2)，(3)，(4)を移流フェイズと非移流フェイズに分割すると次式が得られる．

移流フェイズ：

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{u}^n \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}_x - \boldsymbol{u}_x^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_x^n = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}_y - \boldsymbol{u}_y^n}{\Delta t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_y^n = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

非移流フェイズ：

$$\frac{\boldsymbol{u}^* - \tilde{\boldsymbol{u}}}{\Delta t} = -\nabla p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \boldsymbol{u}^n \tag{11}$$

Copyright © 2000 by JSCFD

$$\frac{\boldsymbol{u}_x^{n+1}-\tilde{\boldsymbol{u}}_x}{\Delta t}=-\left(\boldsymbol{u}_x^n\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}^n-\nabla p_x^{n+1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\boldsymbol{u}_x^n \tag{12}$$

$$\frac{\boldsymbol{u}_y^{n+1}-\tilde{\boldsymbol{u}}_y}{\Delta t}=-\left(\boldsymbol{u}_y^n\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}^n-\nabla p_y^{n+1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\boldsymbol{u}_y^n \tag{13}$$

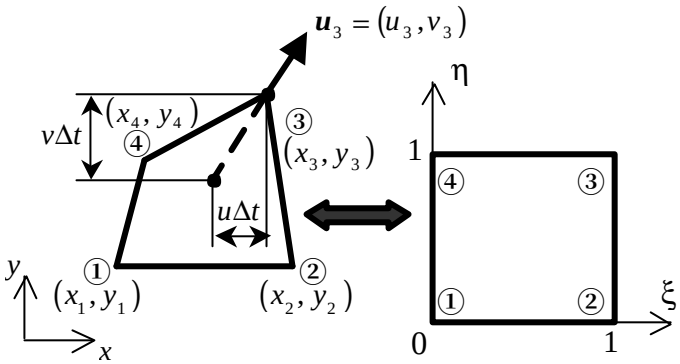
3.3 速度および速度微分値の移流フェイズ

式(8)，(9)，(10)に CIP 法を適用する．この際，対象となる節点(例えば図 1 の節点 3)の上流側要素を $x-y$ 座標系から図 1 の正規直交系の $0\le\xi\le1,\ 0\le\eta\le1$ に写像する．また速度と速度微分値は式(14)，(15)，(16)を用いて，ξ,η により表す．

$$\boldsymbol{u}^n\left(\xi_i,\eta_i\right)=\boldsymbol{u}^n\left(x_i,y_i\right) \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_{\xi_i,\eta_i}^n=\frac{\partial x}{\partial\xi}\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\right|_{x_i,y_i}^n+\frac{\partial y}{\partial\xi}\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\right|_{x_i,y_i}^n \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_{\xi_i,\eta_i}^n=\frac{\partial x}{\partial\eta}\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\right|_{x_i,y_i}^n+\frac{\partial y}{\partial\eta}\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\right|_{x_i,y_i}^n \tag{16}$$



(a) Arbitrary-shaped mesh (b) Regular mesh
Fig. 1 Coordinate transformation

式(17)に示す三次補間関数で上流側要素での速度分布を近似する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^n(\xi,\eta)=&A_{30}(\xi-1)^3+A_{20}(\xi-1)^2+A_{10}(\xi-1)\\&+A_{03}(\eta-1)^3+A_{02}(\eta-1)^2+A_{01}(\eta-1)+A_{00}\\&+A_{31}(\xi-1)^3(\eta-1)+A_{21}(\xi-1)^2(\eta-1)\\&+A_{13}(\xi-1)(\eta-1)^3+A_{12}(\xi-1)(\eta-1)^2\\&+A_{11}(\xi-1)(\eta-1)\end{aligned} \tag{17}$$

ここで，

$$A_{00}=\boldsymbol{u}_3^n,\quad A_{10}=\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_3^n,\quad A_{01}=\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_3^n$$

$$A_{20}=3\left(\boldsymbol{u}_4^n-\boldsymbol{u}_3^n\right)+\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_4^n+2\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_3^n\right)$$

$$A_{02}=3\left(\boldsymbol{u}_2^n-\boldsymbol{u}_3^n\right)+\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_2^n+2\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_3^n\right)$$

$$A_{30}=2\left(\boldsymbol{u}_4^n-\boldsymbol{u}_3^n\right)+\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_4^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_3^n\right)$$

$$A_{03}=2\left(\boldsymbol{u}_2^n-\boldsymbol{u}_3^n\right)+\left(\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_2^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_3^n\right)$$

$$\begin{aligned}A_{11}=&-\left(\boldsymbol{u}_1^n-\boldsymbol{u}_2^n+\boldsymbol{u}_3^n-\boldsymbol{u}_4^n\right)\\&+\left(-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_2^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_3^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_3^n-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_4^n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{21}=&-3\left(\boldsymbol{u}_1^n-\boldsymbol{u}_2^n+\boldsymbol{u}_3^n-\boldsymbol{u}_4^n\right)\\&+\left(-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_1^n-2\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_2^n+2\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_3^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_4^n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{12}=&-3\left(\boldsymbol{u}_1^n-\boldsymbol{u}_2^n+\boldsymbol{u}_3^n-\boldsymbol{u}_4^n\right)\\&+\left(-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_1^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_2^n+2\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_3^n-2\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_4^n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{31}=&-2\left(\boldsymbol{u}_1^n-\boldsymbol{u}_2^n+\boldsymbol{u}_3^n-\boldsymbol{u}_4^n\right)\\&+\left(-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_1^n-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_2^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_3^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi}\right|_4^n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{13}=&-2\left(\boldsymbol{u}_1^n-\boldsymbol{u}_2^n+\boldsymbol{u}_3^n-\boldsymbol{u}_4^n\right)\\&+\left(-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_1^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_2^n+\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_3^n-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\eta}\right|_4^n\right)\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{u}_i^n$：上流側要素節点 i での速度，$\partial\boldsymbol{u}/\partial\xi|_i^n,\ \partial\boldsymbol{u}/\partial\eta|_i^n$：上流側要素節点 i での速度の微分値である．

式(17)を用いて式(18)，(19)，(20)より速度の中間値 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ とその微分値 $\partial\tilde{\boldsymbol{u}}/\partial\xi,\partial\tilde{\boldsymbol{u}}/\partial\eta$ を求める．

$$\tilde{\boldsymbol{u}}\left(\xi_3,\eta_3\right)=\boldsymbol{u}^n\left(\xi_s,\eta_s\right) \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial\xi}\right|_3=\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}^n}{\partial\xi}\right|_{\xi_s,\eta_s} \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial\eta}\right|_3=\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}^n}{\partial\eta}\right|_{\xi_s,\eta_s} \tag{20}$$

ただし ξ_s,η_s は $x_s=x_3-u_3\Delta t,\ y_s=y_3-v_3\Delta t$ を $x-y$ 座標系から正規直交系に写像した値である．

正規直交系で求めた中間値 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ とその微分値 $\partial\tilde{\boldsymbol{u}}/\partial\xi,\partial\tilde{\boldsymbol{u}}/\partial\eta$ を式(21)，(22)，(23)を用いて $x-y$ 座標系に写像する．

$$\tilde{\boldsymbol{u}}\left(x_3,y_3\right)=\tilde{\boldsymbol{u}}\left(\xi_3,\eta_3\right) \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial x}\right|_{x_3,y_3}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial\xi}\right|_{x_3,y_3}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial\eta}\right|_{x_3,y_3} \tag{22}$$

Copyright © 2000 by JSCFD

$$\left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial x}\right|_{x_3,y_3} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial \xi}\right|_{x_3,y_3} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\left.\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial \eta}\right|_{x_3,y_3} \tag{23}$$

3.4 速度の非移流フェイズ

また速度の非移流フェイズ(式(11))にはガレルキン法を適用し速度の予測値 $\boldsymbol{u}^*$ を求める．

$$\frac{[P]}{\Delta t}\{u\}^* = \left(\frac{[P]}{\Delta t} - [D]_1\right)\{\tilde{u}\} - \{F\}_1 \tag{25}$$

ここで，

$$[P] = \sum_1^M \int_{V^e} N_i N_j dxdy$$

$$[D]_1 = \sum_1^M \int_{V^e} \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\{F\}_1 = \sum_1^M \int_{V^e} N_i\left(\nabla p^*\right)dxdy$$

Δt：タイム・ステップ，V^e：一要素の領域，M：総節点数，N_i：形状関数である．

圧力の修正量 $\delta p\left(= p^{n+1} - p^*\right)$ は式(26)にガレルキン法を適用することにより求める．

$$\nabla^2(\delta p) = \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}^*\right)/\Delta t \tag{26}$$

最後に，式(27)，(28)から次の時刻での速度 $\boldsymbol{u}^{n+1}$，圧力 p^{n+1} が得られる．

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^* - \Delta t \cdot [\nabla(\delta p)] \tag{27}$$

$$p^{n+1} = p^* + \delta p \tag{28}$$

3.5 速度微分値の非移流フェイズ

なお，速度微分値を求めるには，式(11)の $\boldsymbol{u}^*$，p^* を $\boldsymbol{u}^{n+1}$，p^{n+1} に置き換え，式(12)，(13)に代入して次式を得る．

$$\frac{\boldsymbol{u}_x^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}_x}{\Delta t} = -\left(\boldsymbol{u}_x^n \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}^n + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}}{\Delta t}\right) \tag{29}$$

$$\frac{\boldsymbol{u}_y^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}_y}{\Delta t} = -\left(\boldsymbol{u}_y^n \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}^n + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}}{\Delta t}\right) \tag{30}$$

式(29)，(30)にガレルキン法を適用し既知値である $\boldsymbol{u}^{n+1}$，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ を右辺に代入すると，次の時刻における速度の微分値を求めることができる．

$$\frac{[P]}{\Delta t}\{\boldsymbol{u}_x\}^{n+1} = \frac{[P]}{\Delta t}\{\tilde{\boldsymbol{u}}_x\} - \{F\}_2 \tag{31}$$

$$\frac{[P]}{\Delta t}\{\boldsymbol{u}_y\}^{n+1} = \frac{[P]}{\Delta t}\{\tilde{\boldsymbol{u}}_y\} - \{F\}_3 \tag{32}$$

ここで，

$$\{F\}_2 = \sum_1^M \int_{V^e} N_i\left\{-\left\langle \boldsymbol{u}_x^n\right\rangle_e \cdot \nabla \boldsymbol{u}^n + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}}{\Delta t}\right)\right\}$$

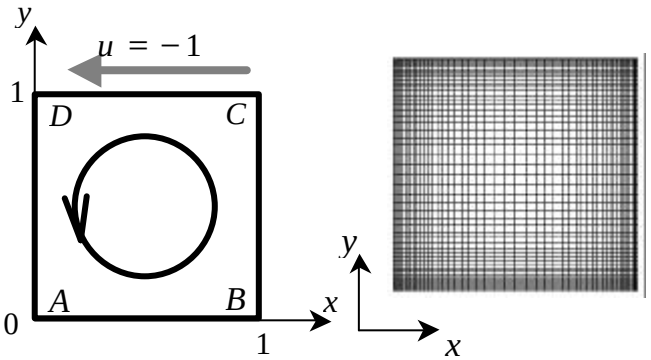
$$\{F\}_3 = \sum_1^M \int_{V^e} N_i\left\{-\left\langle \boldsymbol{u}_y^n\right\rangle_e \cdot \nabla \boldsymbol{u}^n + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}}{\Delta t}\right)\right\}$$

$\left\langle \boldsymbol{u}_x^n\right\rangle_e, \left\langle \boldsymbol{u}_y^n\right\rangle_e$ は速度の微分値の要素平均である．

4. 数値計算例

図 2 に正方形キャビティ内の粘性流れ問題の計算領域を示す．計算領域は不等長の長方形要素で分割する．なお，計算条件は次の通りである．

＜初期条件＞
キャビティ内で
①速度：$u = 0, v = 0$
②速度の微分値：$u_x = u_y = 0,\ v_x = v_y = 0$
③圧力：$p = 1$
＜境界条件＞
①速度：
辺 DC で $u = -1, v = 0$
その他の辺で $u = 0, v = 0$
②速度の微分値：
境界近傍の速度を用いて差分近似
③圧力：
全ての辺で $\partial p/\partial n = 0$ ($\partial/\partial n$ は法線方向の微分)



(a) Computational domain (b)50×50 non-uniform meshes
Fig.2 Computational domain and non-uniform meshes

数値計算は次式を満足するまで計算を繰り返した．

$\left|\boldsymbol{u}_i^n\right| \geq Max.\left|\boldsymbol{u}_i^n\right| \times 0.01$ に対して

$$\delta = Max.\left|\frac{\boldsymbol{u}_i^n - \boldsymbol{u}_i^{n-1}}{\boldsymbol{u}_i^n}\right| \times 100 \leq 0.01\,(\%) \tag{33}$$

5. 計算結果

表 1 にレイノルズ数 Re=1,000 での計算条件および計算結果を，図 3 にそれぞれの計算で得られたキャビティ中心軸上での速度分布図を示す．キャビティ中心軸上での速度分布図についてメッシュ数 30×30 で得られた結果では Ghia らの結果との差が大きいが，メッシュ数が 40×40，50×50 で得られた結果はよく一致している．

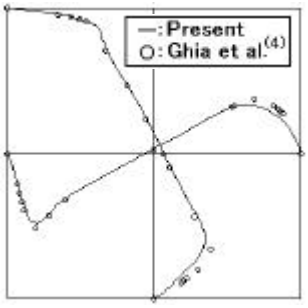
境界層厚さ $\left(1/\sqrt{\mathrm{Re}} = 1/\sqrt{1000} = 3.162\times10^{-3}\right)$ 内の節点の個数はメッシュ数 30×30 では 3 個，40×40 では 5 個，50×50 では 6 個である(境界上を除く)．本解法では境界層厚さ内の節点の個数は 5 個以上が適当であると思われる．

図 4 に相対速度変化率の推移を示す．相対速度変化率の推移より，数値計算中の速度変動の収束状況を確認できる．

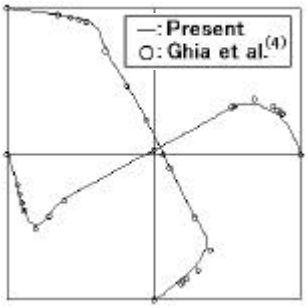
Copyright © 2000 by JSCFD

Table 1 Computational parameters and results
(Re=1,000)

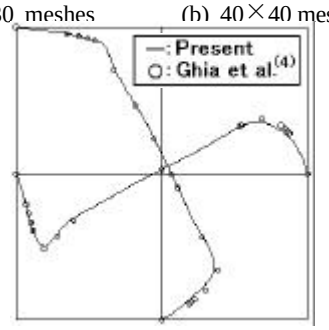
Meshes	30×30	40×40	50×50
h_{min}	5.8×10^{-3}	4.2×10^{-3}	3.3×10^{-3}
Δt	5.0×10^{-3}	4.0×10^{-3}	3.0×10^{-3}
b_{xmax}	0.862	0.943	0.898
Loop	6,220	7,410	9,258
p_{max}	1.939	2.096	2.249
p_{min}	0.743	0.663	0.574



(a) 30×30 meshes



(b) 40×40 meshes



(c)50×50 meshes

Fig. 3 Velocity distributions (Re=1,000)

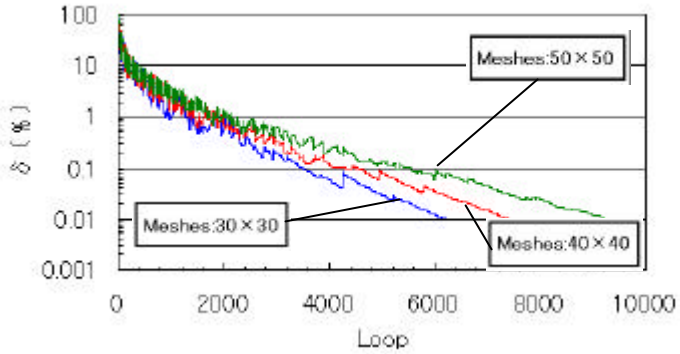


Fig. 4 Convergence histories of "δ" (Re=1,000)

レイノルズ数 Re=1,000，メッシュ数 50×50 においてタイム・ステップの影響について検討した．表 2 に計算条件および計算結果を示す．同表での*印は式(33)の収束判定を無視して計算を続けたことを示すが，これらの計算結果は収束判定時のものによく一致している．これより本研究で採用している収束判定の妥当性を確認できる．

図 5 はタイム・ステップ 1.0×10^{-3}，Loop 数 50,000 における速度ベクトル図，圧力分布図，キャビティ中心軸上の速度分布図である．速度ベクトル図，キャビティ中心軸上の速度分布図についてはタイム・ステップによる影響はほとんど見られなかったが，表 2 に示すように圧力の最大値・最小値についてはその影響が存在する．これよりタイム・ステップについてはより詳細な検討が必要と思われる．

表 3 にレイノルズ数 Re=3,200, 5,000, 10,000 での計算条件および計算結果を示す．図 6，7，8 は各レイノルズ数における速度ベクトル図，圧力分布図，キャビティ中心軸上の速度分布図である．これより速度ベクトル図より大きな主渦と二次渦が発生している様子を確認できる．キャビティ中心軸上の速度分布図については，Re=3,200, 5,000 では全体的に Ghia らの結果と一致しているが，境界付近では差がある．これは境界層厚さ内の節点の個数が不十分であるためと考えられる．Re=10,000 では Ghia らの結果との差がかなり大きいが，計算の繰り返し回数が不十分なためである．図 9 に各レイノルズ数での相対速度変化率の推移を示す．Re=3,200, 5,000 では相対速度変化率 δ が 0.01%以下となり，流れは定常となった．Re=10,000 は $\delta\approx0.3\,(\%)$ であり，計算繰り返し回数が不十分である．

6. 結論

SIMPLER 法と CIP 法を組み合わせた CIP 型有限要素法を開発し，二次元粘性流れ問題を Re=10,000 まで行った．他の研究例との比較・検討の結果，本解析技法の基本的な有効性を確認した．

Re=1,000 の場合を例としてタイム・ステップやメッシュ数の影響について検討した．速度場を精度良くとらえるためにはメッシュ数について境界層内に境界の節点を除く 5 個以上の節点を含むことが必要であることが分かった．圧力についてはメッシュやタイム・ステップによる影響の大きいことが分かった．

Table 2 Computational parameters and results
(Re=1,000, meshes:50×50 ($h_{min}=3.3\times10^{-3}$))

Δt	1.0×10^{-3}		2.0×10^{-3}	
b_{xmax}	0.3		0.6	
Loop	22,214	*50,000	12,900	*25,000
t	22.214	*50.000	25.800	*50.000
p_{max}	2.396	*2.402	2.305	*2.309
p_{min}	0.460	*0.461	0.542	*0.543

Δt	3.0×10^{-3}	
b_{xmax}	0.9	
Loop	9,258	*16,667
t	27.774	*50.001
p_{max}	2.249	*2.252
p_{min}	0.574	*0.574

$(t = Loop\times\Delta t)$

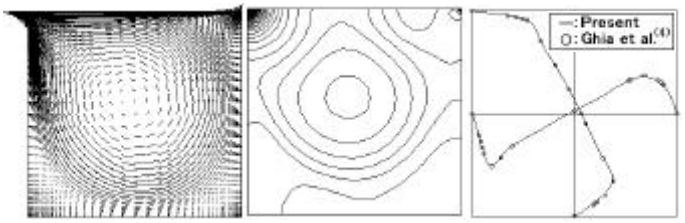


Fig. 5 Velocity vector field, pressure field, and velocity distribution
(Re=1,000, meshes:50×50, $\Delta t=1.0\times10^{-3}$, Loop=50,000)

Copyright © 2000 by JSCFD

Table 3 Computational parameters and results

Re	3,200	5,000	10,000**
Meshes	50×50	50×50	80×80
h_{min}	3.3×10^{-3}	3.3×10^{-3}	2.0×10^{-3}
Δt	3.0×10^{-3}	3.0×10^{-3}	8.0×10^{-4}
b_{xmax}	0.898	0.898	0.392
Loop	22,081	32,941	182,500
p_{max}	1.939	2.096	1.801
p_{min}	0.743	0.663	0.911

**計算途中

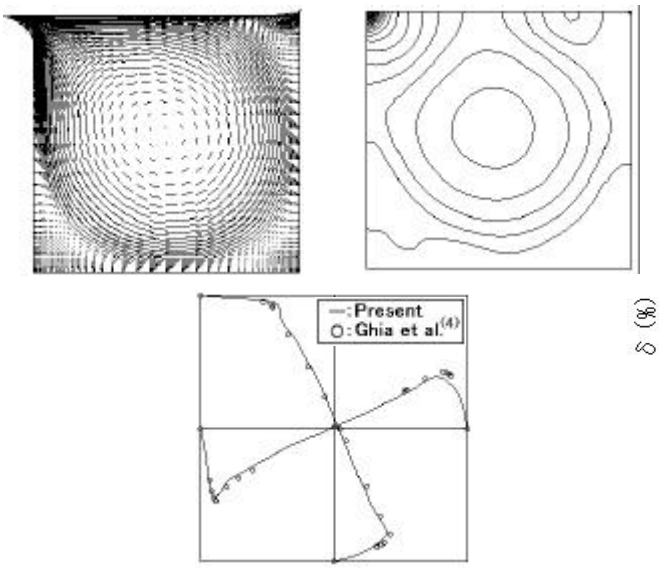


Fig. 6 Velocity vector field, pressure field and velocity distribution (Re=3,200)

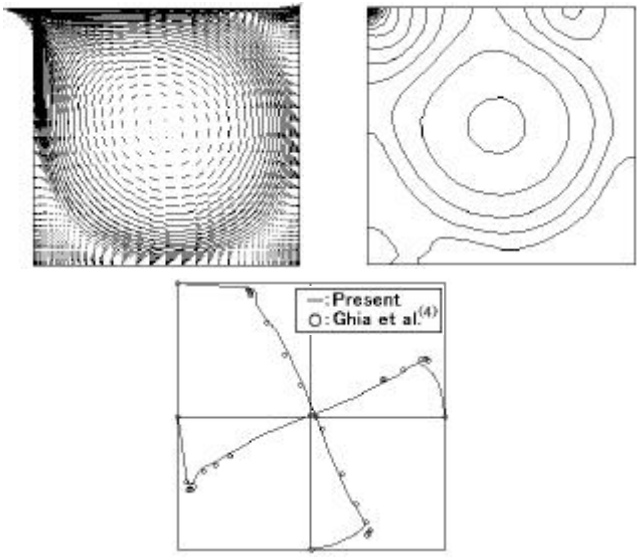


Fig. 7 Velocity vector field, pressure field and velocity distribution (Re=5,000)

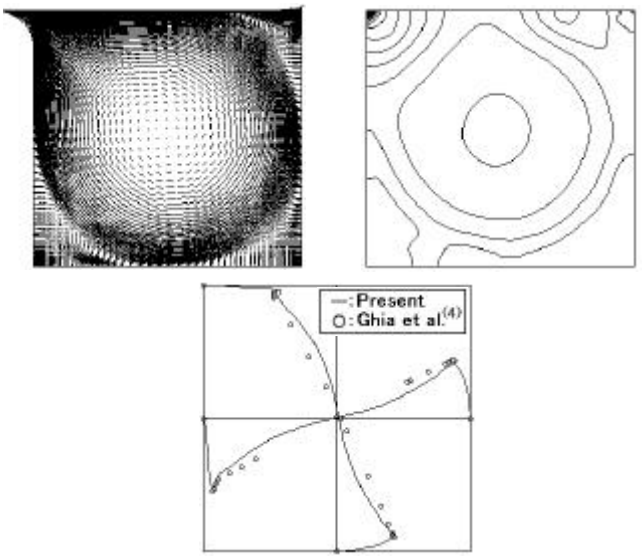


Fig. 8 Velocity vector field, pressure field and velocity distribution (Re=10,000)

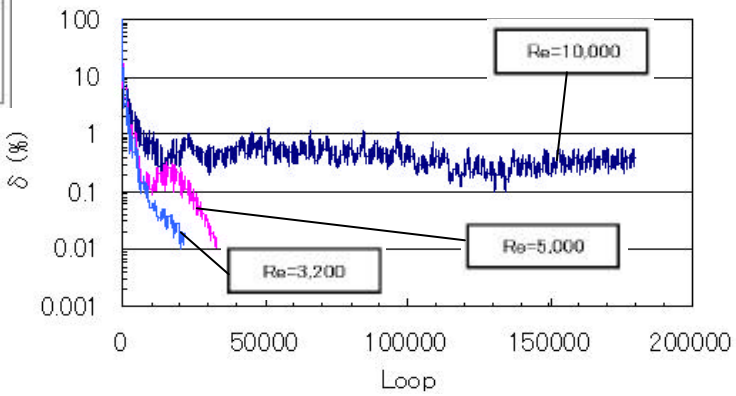


Fig. 9 Convergence histories of “ δ ”

参考文献

(1)松田・他 4 名,日本機械学会論文集(B 編), 66-641 (2000), 17.
(2) Yabe, T. and Aoki, T.， Comp. Phys. Comm., 66 (1991), 219.
(3)山田・他 3 名,第 13 回計算力学講演会講演論文集(2000),115.
(4) Ghia, U. 他 2 名, J. Comp. Phys.,48 (1982), 387.

Copyright © 2000 by JSCFD