第 14 回数値流体力学シンポジウム
E03-1

非定常圧縮性粘性流に対する解適合移動格子有限体積法

Solution-Adaptively Moving-Grid Finite-Volume Method for Unsteady Compressible Viscous Flow

○ 佐藤 泰啓, 京工繊大 大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: sato@fe.mech.kit.ac.jp
松野 謙一, 京工繊大 工芸学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: matsuno@ipc.kit.ac.jp
里深 信行, 京工繊大 工芸学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: satofuka@ipc.kit.ac.jp
Yasuhiro SATO, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
Kenichi MATSUNO, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

A solution-adaptively moving-grid finite-volume method for unsteady viscous shocked flows is presented in this paper. A finite-volume method formulated on space-time control volume for unsteady compressible flows and an elliptic system for the generation of solution-adaptive grids are combined through an inner iteration process and solved stimultaneously at every time step. This method is applied to axisymmetric shock tube problem.

1. 序論

自然界における多くの流れ場は非定常流であり，特に非定常性のある衝撃波をともなうような流れ場は大変興味深い．数値流体力学においてはこのような衝撃波を高分解能で（シャープに）捉えることが研究課題のひとつであるが，やみくもに格子点数を増やして捉えようとすると計算メモリが大幅に増大し，効率のよい計算が行えない．そこで導入されるのが解適合格子法である．最近では，デカルト格子上で格子を分割あるいは結合させ，流れの急変するところに格子を集中させる格子細分化法[1]に基づく解適合格子法が多いが，この方法はデータ構造が非構造格子的になり，さらに細分化した格子の流れ保存量の分配など，解決しなければならない課題もある．

そこで著者らは別のアプローチとして，格子の位置を移動させ，流れの急変するところに格子を集中させる方法をとり上げた．この方法ではデータ構造が構造格子型を保つのでデータのやり取りが容易であり，さらに一般のデカルト格子に比べて少ない格子点数によって，衝撃波を高分解能で捉えることができる高効率な方法でもある．ただし非定常流の場合，衝撃波などをシャープに捉えるためには常に格子を移動させ続けなければならない．その方法として本論文では，空間ー時間にまたがるコントロールボリュームを用いた有限体積法によって，幾何保存則を満たすように離散化を行い，擬似時間内部反復法で流れを解く際，楕円型方程式を用いた解適合格子形成をこの内部反復過程に組み込むことによって同時反復を行い，流れ場と解適合格子が同時に収束する解適合移動格子有限体積法[2]を構築した．

本論文では，2 次元ナビエ・ストークス方程式を基礎方程式として用い，非定常圧縮性粘性流に対する解適合移動格子有限体積法の詳細について述べる．そして，幾何保存則の検証を行いスキームの信頼性を示した後，応用例として粘性流による 2 次元衝撃波管問題に適用させ，本スキームの有効性を検証する．

2. 軸対称ナビエ・ストークス方程式

2 次元圧縮性粘性流に対する無次元化されたナビエ・ストークス方程式は，軸対称問題の場合，保存則表示で以下のように表すことができる．

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial r}+Z=\frac{1}{Re_N}\left(\frac{\partial E_V}{\partial x}+\frac{\partial F_V}{\partial r}+Z_V\right) \qquad (1)$$

ここで，Re_N はレイノルズ数である．また，q は保存量ベクトル，E，F はそれぞれ x，r 方向の非粘性流束ベクトル，Z は遠心力ベクトル，E_V，F_V，Z_V は粘性流束ベクトルである．

3. 解適合移動格子有限体積法

本章では，有限体積法を用いて移動格子を前提に幾何保存則[3]を満たす離散化と，楕円型方程式を用いた解適合格子形成について示す．そして両者を完全に同期させるアルゴリズムについて示し，非定常流に対する解適合移動格子有限体積法の構築を行う．

3.1 基本概念

本論文で提案する解適合移動格子有限体積法は，非定常流に対して時々刻々と解適合格子が移動し，幾何保存則を完全に満たしながら流れを高分解能で，なおかつ動的に捉えることができるスキームである．また，一般的なデカルト格子に比べ，少ない格子点数によって高分解能で捉えることができるので，高精度の解を求めるために格子点数を増やす必要がなく，それによる計算メモリの増大を抑えることができる高効率スキームでもある．

解適合移動格子有限体積法についての最も大きな特徴は，時間ステップごとにある規範のもとで，流れの解と解適合格子の位置が同時に求められるということである．

3.2 流れの解法

3.2.1 幾何保存則を満たす離散化 式 (1) を，Fig.1 に示すような空間ー時間にわたるコントロールボリュームに対し，有限体積法[4]を適用する．このとき，流束ベクトルの評価は，次のように行う．

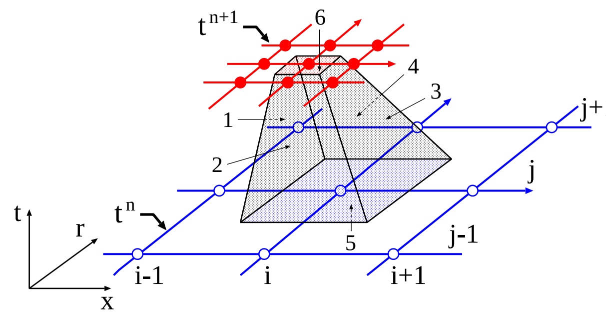


Fig. 1: Control volume in space-time system

$$\int_V (\tilde{\nabla}\tilde{F}+Z')\,dV=\oint_S \tilde{F}\cdot\mathbf{n}\,dS+\int_{\mathbf{V}}\mathbf{Z}'\,dV$$
$$=\sum_{\ell=1}^{6}(E'n_x+F'n_r+qn_t)_\ell+\int_V Z'\,dV=0 \qquad (2)$$

非粘性流束ベクトルは近似リーマン解法のひとつである Roe の Flux Difference Splitting 法[5] により評価し，さらに空間高次精度となるように minimod limiter を併用した MUSCL 法[5] を用いる．また，粘性流束ベクトルについては，中心差分的に離散化する．

3.2.2　擬似時間内部反復法　結果として得られる非線形離散式は陰的スキームであり，線形化を行って解かなければならない．本論文では文献[4] に従い，擬似時間内部反復法を用いる．このとき，反復方程式として次式を得ることができる．

$$\frac{dq^{n+1\langle\nu\rangle}}{d\tau} = -L\left(q^{n+1\langle\nu\rangle}\right) \tag{3}$$

ここで，ν は反復のインデックスであり，τ は擬似時間に相当する．式 (3) の右辺 L は非線形離散式である．式 (3) に有理ルンゲ・クッタ法[4] を適用し，次の時間ステップの解を求めるために内部反復を行う．

$$q^{n+1\langle\nu\rangle} \rightarrow q^{n+1\langle\nu+1\rangle} \quad (\nu = 1,\, 2, \cdots,\, \nu_{fin(q)}) \tag{4}$$

$$q^{n+1} = q^{n+1\left\langle\nu_{fin(q)}\right\rangle} \tag{5}$$

ここで，解が収束し ($\nu = \nu_{fin(q)}$)，つまり式 (3) において，(左辺)$=0$ となるとき (右辺)$=0$ となり，次の時間ステップの解 q^{n+1} を得ることができるのである．

3.3　解適合格子形成のクライテリオン

解適合格子の形成には楕円型解適合格子法[6] を用いる．この場合，格子制御関数に物理量の変化の情報を含む重み関数 w, w' を対応付ける．ここでは次の関数を満足するように格子間隔を自動的に調節する．

$$\begin{aligned} w^n s_\xi^n &= const. \\ {w'}^n {s'}_\eta^n &= const. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで s_ξ^n, ${s'}_\eta^n$ は，それぞれの格子線方向の格子間隔を表す．式 (6) は，物理量の変化が大きければ格子間隔は小さく，また物理量の変化が小さければ格子間隔は大きくするという考えに基づくものである．なお，本論文では非定常流を対象としているので，重み関数 w^n，${w'}^n$ および格子間隔 s_ξ^n, ${s'}_\eta^n$ は時間の関数である．よって，時間ステップごとに式 (6) を満足するように楕円型方程式を用いて解適合格子を形成する．

3.4　内部反復内での同期アルゴリズム

解適合格子はすでに配置されている格子上で流れを解き，得られた物理量分布からこれに適合するように移動して形成されるものである．この場合，新しく得られた解適合格子上で再度流れを解き直す必要がある．よって，次の時間ステップの解を得るためには，内部反復内で流れ場と解適合格子の位置が同時に収束しなければならない．そこで，解適合格子形成のために楕円型方程式を解く方法として，流れソルバーの内部反復 ν と関連付けた同時反復を行う．ただし，流れソルバーの内部反復において，反復ごとに更新される途中の解の変化に対応して格子は移動し続けるので収束性が低下してしまう．よって，本スキームでは格子がある程度収束したところで格子形成の反復を終了し，後はその得られた解適合格子上で流れ場が収束するまで流れソルバーのみ内部反復を行う．

次に，この方法を具体的に示す．各時間ステップにおける内部反復に対応した楕円型方程式は，時間ステップ n と，内部反復のインデックス ν を用いると次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\mathbf{r}_{\xi\xi}^{n+1\langle\nu+1\rangle} + \phi\,\mathbf{r}_{\xi}^{n+1\langle\nu+1\rangle}\right) - 2\beta\,\mathbf{r}_{\xi\eta}^{n+1\langle\nu+1\rangle} \\ &\qquad + \gamma\left(\mathbf{r}_{\eta\eta}^{n+1\langle\nu+1\rangle} + \psi\,\mathbf{r}_{\eta}^{n+1\langle\nu+1\rangle}\right) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

ただし，$\mathbf{r} = (x\,,\,r)$ とし，

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{r}_\eta^{n+1\langle\nu\rangle}\cdot\mathbf{r}_\eta^{n+1\langle\nu\rangle} \\ \beta &= \mathbf{r}_\xi^{n+1\langle\nu\rangle}\cdot\mathbf{r}_\eta^{n+1\langle\nu\rangle} \\ \gamma &= \mathbf{r}_\xi^{n+1\langle\nu\rangle}\cdot\mathbf{r}_\xi^{n+1\langle\nu\rangle} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

である．ここで式 (7) における ϕ, ψ は格子の位置を決める格子制御関数であり，式 (6) における重み関数と次のような関係がある[6]．

$$\phi = \frac{w_\xi^{n+1\langle\nu\rangle}}{w^{n+1\langle\nu\rangle}} \quad , \quad \psi = \frac{{w'}_\eta^{n+1\langle\nu\rangle}}{{w'}^{n+1\langle\nu\rangle}} \tag{9}$$

式 (7) を，緩和法のひとつである線ヤコビ法によって解く．いま，Ω を緩和係数とし，$\delta\mathbf{r}^{n+1\langle\nu\rangle}$ を線ヤコビ法による修正量とすると，以下のように $\nu = \nu_{fin(\mathbf{r})}$ まで内部反復に対応しながら修正される．

$$\mathbf{r}^{n+1\langle\nu+1\rangle} = \mathbf{r}^{n+1\langle\nu\rangle} + \Omega\delta\mathbf{r}^{n+1\langle\nu\rangle} \tag{10}$$
$$(\nu = 1,\, 2, \cdots,\, \nu_{fin(\mathbf{r})})$$

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^{n+1\left\langle\nu_{fin(\mathbf{r})}\right\rangle} \tag{11}$$

ここで，$\nu_{fin(\mathbf{r})} < \nu_{fin(q)}$ である．このように，内部反復によって $\nu \rightarrow \nu+1$ の間に物理量が更新され ($q^{n+1\langle\nu\rangle} \rightarrow q^{n+1\langle\nu+1\rangle}$)，それに適合するように解適合格子も更新される ($\mathbf{r}^{n+1\langle\nu\rangle} \rightarrow \mathbf{r}^{n+1\langle\nu+1\rangle}$)．そして $\nu = \nu_{fin(\mathbf{r})}$ で解適合格子が形成され，流れの解が収束した時点 ($\nu = \nu_{fin(q)}$) で次の時間ステップへ進む．

Fig.2 に本スキームの内部反復過における計算流れを示す．

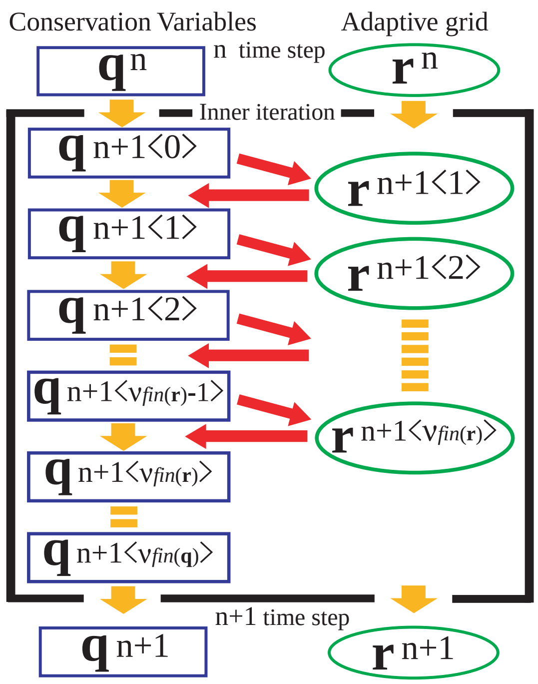


Fig. 2: Inner iteration process

以上の解説は簡単のために流れソルバーの内部反復 1 回につき，解適合格子形成の反復を 1 回行うものを示したが，複数回行うことも可能である．

4. 幾何保存則の検証

時々刻々と移動する格子を用いて流れを解く場合に満たさなければならない保存則が幾何保存則であるが，この保存則は「格子が移動する場合でも流れ場の一様状態を正しく捕捉できる」ということを定義とするものである[3]．そこで本章では，ある関数に従って移動する格子上で一様流の計算を行い，幾何保存則を満たしているかどうかを調べることによって，本スキームの信頼性を検証する．

4.1 移動格子による一様流の捕捉

いま，一辺の長さが 2.0 である正方形の計算領域を考え，次式に従って移動する格子を用いて一様流を正しく捕捉できるかどうかを調べる．

$$
\begin{aligned}
&x_{i,j} = \bar{x}_{i,j} + 0.3\Delta x \cos\theta \\
&r_{i,j} = \bar{r}_{i,j} + 0.3\Delta r \sin\theta \\
&(i = 2, \cdots, i_{max}-1\ ,\ j = 2, \cdots, j_{max}-1) \\
&\bar{x}_{i,j} = \tfrac{2\cdot(i-1)}{i_{max}-1}\ ,\ \bar{r}_{i,j} = \tfrac{2\cdot(j-1)}{j_{max}-1} \\
&\theta = \frac{\pi}{2}\left(\bar{x}_{i,j} + \bar{r}_{i,j}\right)\frac{3}{40}n
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ここで，n は時間ステップで Δx，Δr は格子幅を表す．初期状態として，軸方向の一様流 $\rho_\infty = 1.0$，$p_\infty = 1.0/\gamma$ ($\gamma = 1.4$)，$u_\infty = 1.0$，$v_\infty = 0.0$ を与え，$t = 50.0$ (時間刻み幅 0.01 で 5000 時間ステップ) まで計算する．なお，基準レイノルズ数 $Re_N = 1000$，プラントル数 $Pr = 0.72$ とする．

4.2 初期値との誤差の定義および計算結果

どの程度幾何保存則を満たしているかを調べるため，初期値 ρ_∞ との誤差を次式のように定義する．

$$
L2-ERROR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i_{max}}\sum_{j=1}^{j_{max}}\left(\rho - \rho_\infty\right)^2_{i,j}}{i_{max}\cdot j_{max}}}
\tag{13}
$$

式 (13) に従って調べた誤差を Fig.3 に示す．Fig.3 より，初期値との誤差は 10^{-14} 程度であった．この図は密度についての誤差を示しているが，圧力や速度など，他の物理量においても誤差は同程度であった．よって，本スキームは十分に幾何保存則を満たしているといえる．

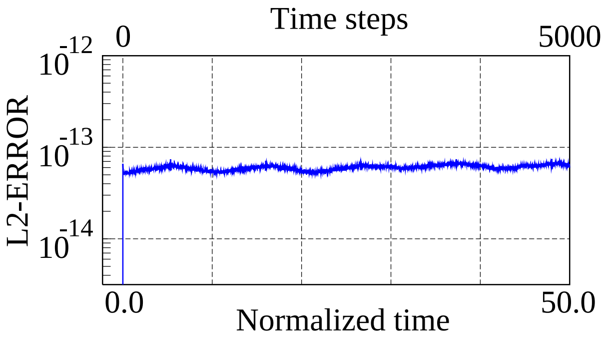


Fig. 3: History of L2-ERROR of density from initial condition

5. 2 次元衝撃波管問題への適用

本章では，解適合移動格子有限体積法を，2 次元衝撃波管問題[7] に適用させる．特に衝撃波をシャープに捉えることに重点をおき解適合格子を形成させる．

5.1 計算条件

本論文では，Fig.4 に示すような計算領域のもとで，時刻 $t = 0.0$ に破膜した，以後の状態の数値シミュレーションを行う．流れ場は軸対称なので対称軸上半分を計算領域としている．取り扱う流体は比熱比 $\gamma = 1.4$ である理想気体と仮定し，初期状態として圧力比 10.0，密度比 10.0，温度比 1.0 を与える．なお，基準レイノルズ数 $Re_N = 5000$，プラントル数 $Pr = 0.72$ とする．また，解適合格子の形成において緩和係数 $\Omega = 0.5$ とし，重み関数には圧力の一階微分を用いる．さらにより効果的な解適合格子を形成させるために物理量にスムージングを施した補正分布により評価する[6]．式 (3) における擬似時間ステップ $\Delta\tau$ は $\Delta\tau = \Delta t$ とする．格子点数を 241×41 とし，$t = 2.0$ (時間刻み幅 0.00025 で 8000 時間ステップ) まで計算を行う．

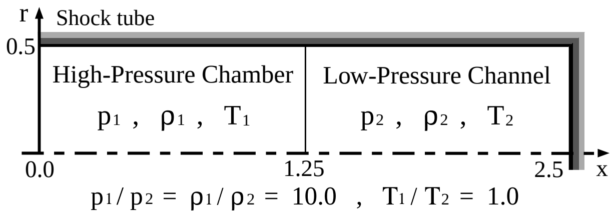


Fig. 4: Shock tube problem

5.1.1 収束判定基準 内部反復が終了するまで解適合格子を形成させ続けると，微小ではあるが格子が移動し続けるので収束性が低下してしまう．そこで本計算では，内部反復 1 回につき格子形成の反復を 3 回行った場合，内部反復数回で解適合格子が形成されるという経験に基づき，内部反復 3 回で格子形成を終了し，後は得られた解適合格子上で流れ場の残差が 10^{-5} のオーダーを満たすまで内部反復を繰り返すものとする．

5.1.2 計算結果 まず初めに，本流れ場においては対称軸付近でほぼ非粘性であるとみなすことができるので，十分な格子点数（1001 点）の等間隔格子を用い，従来の方法によって計算した 1 次元軸対称オイラー方程式の解を参考解と定義する．そして本スキームによる 2 次元の計算によって形成された衝撃波の位置の時間的変化を参考解と比較し，Fig.5 に示す．この図より．衝撃波の位置はすべての時刻においてほぼ一致しており，よって本計算コードは信頼できるものであることを示しているといえる．

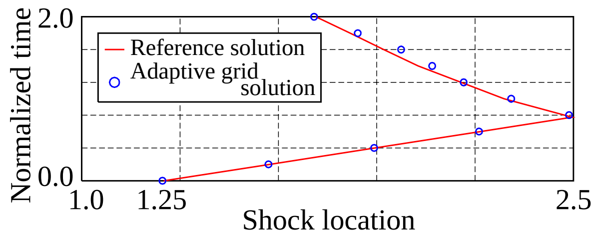
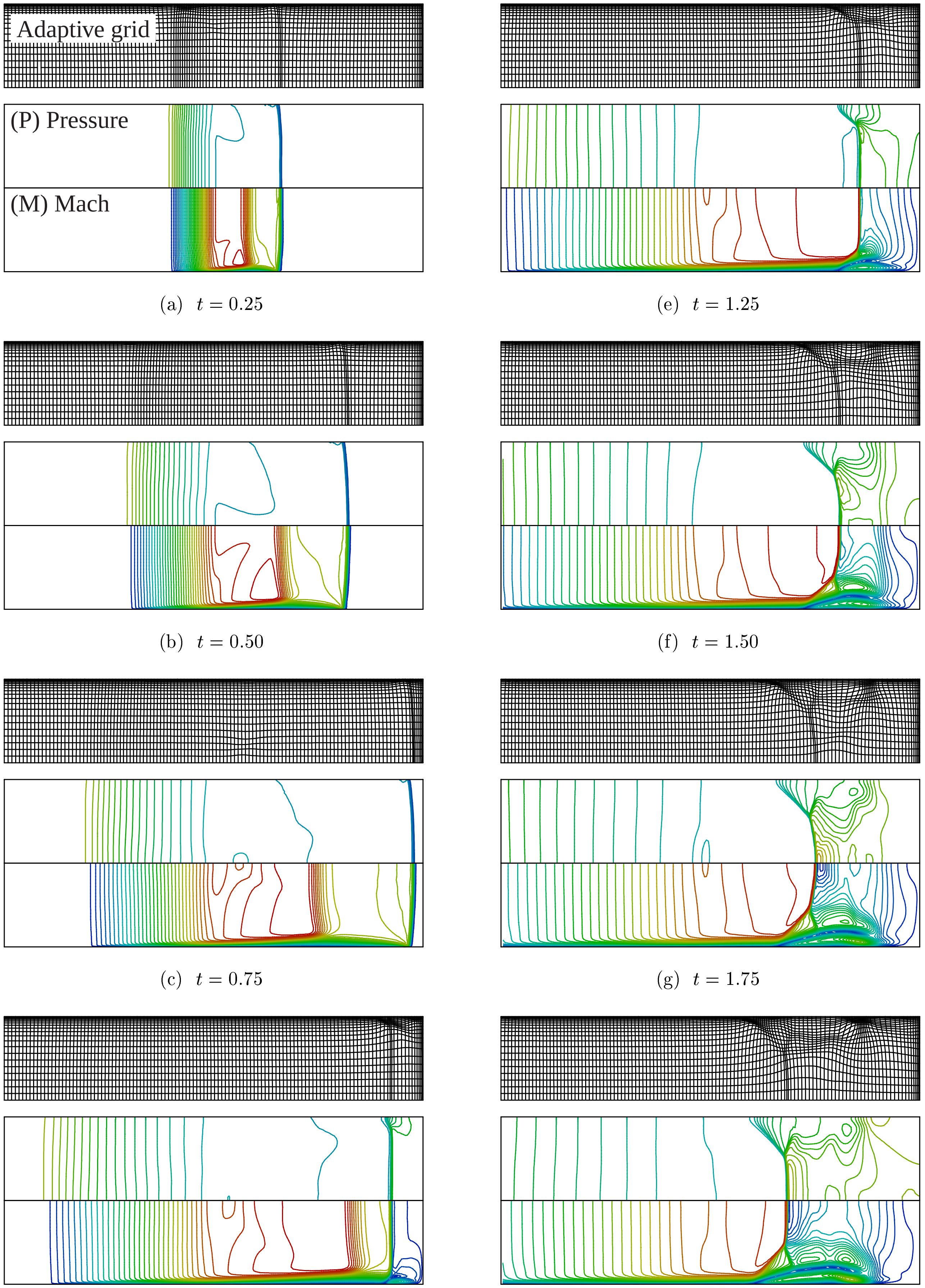


Fig. 5: Comparison of moving shock location

Fig.6 に，破膜後に衝撃波が形成され，さらに壁面に衝突して反射するまでの様子と，衝撃波の位置に形成された解適合格子の時間的変化を示す．Fig.6 の上段は解適合格子を示し，見やすさのため格子 1 点おきに表記している．また，下段の (P) は等圧力線図，(M) は等マッハ線図を示している．なお，初期格子はあらかじめ境界層が現れる壁面付近に集中させたものを用いた．この場合，解適合格子形成の効果により，あえて壁面付近に用意しておいた格子まで移動させてしまうことのないように，初期格子の分布から逆に格子制御関数を求め，格子制御関数に初期格子の情報を取り入れた[8]．Fig.6 より，解適合格子が時々刻々と移動し，流れ現象を動的に捉えている様子がわかる．また，Fig.7 は，同格子点数の静止した格子を用いた場合と比較したものである．Fig.7 において，上段の (A) が本スキームによる解適合格子による等圧力線図，下段の (U) が静止格子による等圧力線図である．この図から，解適合格子の効果により衝撃波をよりシャープに捉え，分解能が向上しているのがわかる．



(a) $t = 0.25$ (e) $t = 1.25$

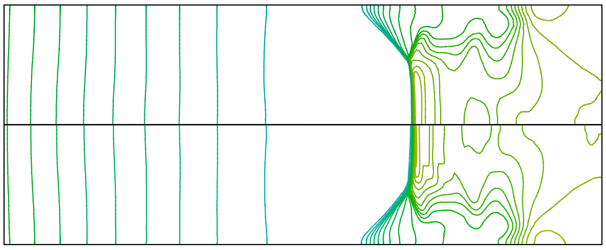
(b) $t = 0.50$ (f) $t = 1.50$

(c) $t = 0.75$ (g) $t = 1.75$

(d) $t = 1.00$ (h) $t = 2.00$

Fig. 6: Movement of solutions and solution-adaptived mesh

(A) Adaptive grid solution



(U) Uniform grid solution

Fig. 7: Comparison of density contours

本計算では，衝撃波の位置において最も格子幅が密となったが，その幅は同格子点数の静止格子幅の 1/4 程度であった．よって，静止格子により同分解能で衝撃波を捉えようとすると，格子点数を約 4×4 倍にして計算する必要がある．本スキームによる計算時間は，同格子点数の静止格子を用いた場合の約 1.15 倍であったことから，同分解能で衝撃波を捉えるために，本スキームでは静止格子を用いた場合の約 7 %の計算時間で済み，計算時間の面においても有効であることがわかる．

6. 結論

本論文では，衝撃波をともなう非定常圧縮性粘性流に対する解適合移動格子有限体積法を提案した．そして幾何保存則の検証を行った後，応用例として衝撃波管問題の数値シミュレーションを行った．その結果，以下のような結論が得られた．

1. 本スキームは，2 次元軸対称領域における粘性流に対して一様流を捉えることができ，幾何保存則を満たしていることが確認できた．
2. 時々刻々と解適合格子が移動し，同格子点数の静止格子 (241×41) と比べて，衝撃波やラムダ・ショックを高分解能で，なおかつ動的に捉えることができた．
3. この場合，本スキームは静止格子によって同分解能で衝撃波を捉える場合と比較して，約 7 %の計算時間で得ることができた．

参考文献

1) Powell,K.G.,CFD Review98,World Sci.,(1998),65-92.

2) 佐藤泰啓・ほか 2 名, 機論, 印刷中.

3) 松野謙一, 数値流体力学会誌,**3**-2(1995),103-114.

4) 三原清孝・ほか 2 名, 機論,**65**-637,B(1999),2945-2953.

5) 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法,(1995),119-153, 東京大学出版会.

6) 山川勝史・ほか 2 名, 機論,**62**-599,B(1996),2640-2645.

7) 生井武文・松尾一泰, 衝撃波の力学,(1993),149-153, コロナ社.

8) Matsuno,K.,CFD Review98,World Sci.,(1998),127-139.