第１４回数値流体力学シンポジウム
E03-3

単調を維持した２次精度 Residual Distribution 法について

2nd order Accurate, Monotone Residual Distribution Scheme

飯塚 宣行, 宇宙研（東大院･航空宇宙）〒229-8510 神奈川県相模原市, E-mail: iizuka@flab.eng.isas.ac.jp
藤井 孝藏, 宇宙研 〒229-8510 神奈川県相模原市, E-mail: fujii@flab.eng.isas.ac.jp
Nobuyuki Iizuka, ISAS(The Univ. of Tokyo), 3-1-1 Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, 229-8510 JAPAN
Kozo Fujii, ISAS, 3-1-1 Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, 229-8510 JAPAN

A 1st-order accurate Residual-Distribution scheme for inviscid compressible flows is extended to 2nd-order accurate scheme. The computed results are compared with the results by the cell-vertex Finite-Volume-Method. The results with the method presented here show lower entropy production, and less density disturbance behind the shock wave than that of the Finite-Volume-Method. Another benefits are that the extension to the 2nd-order spatial accuracy keeps compactness of the stencils and the stability, unlike the Finite-Volume-Method with the MUSCL reconstruction.

１．はじめに

Roe, Deconinck らによって研究、開発された多次元双曲型偏微分方程式のための非構造格子での Residual-Distribution 法[2]（以下 R-D 法と記す）は方程式の多次元性を考慮することにより１次精度においては有限体積法よりも数値拡散が少ないというよい性質を持つ。またこの解法は定常状態に限れば新たなステンシルを追加せずに２次精度化を行えるという有限体積法にはない特長があり、この性質を活かして従来からいくつかの２次精度化の手法が提案されてきた。しかしこれらの手法は計算量の増加や収束性の悪化という問題を抱えていた。ここでは実用的な２次精度スキームの構築を目標として行った計算量、収束性の改善に関する研究と、実用性の観点から、工学的に多く用いられている有限体積法との比較計算の結果を報告する。

２．スカラー移流方程式

２．１．１次精度スキーム

次のスカラー移流方程式を数値的に解きたいとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{a}.\nabla u=0 \tag{1.1}$$

格子点を頂点に持つ三角形要素を考える。三角形の内部を向く辺の大きさを持った垂直ベクトルを $\vec{n}_j$ (j=1,2,3)とし（図１）、物理量 u は三角形要素内で各頂点 u_j の値をとるような線形分布を仮定する。したがって空間全体での物理量分布は連続となる。

R-D 法ではまず三角形要素 T を検査体積として時間変動 $\partial_t u$ の積分 f_T (Residual) を 物理量が線形分布であることを利用して求める。

$$f_T=-\int_T \partial_t u dv=\int \vec{a}.\nabla u dv=-\int_{\partial T} u\vec{a}.d\vec{n}$$
$$=k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3 \qquad \left(k_j=\frac{1}{2}\vec{a}.\vec{n}_j\right) \tag{1.2}$$

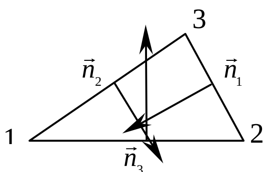


図１ 要素と垂直ベクトル

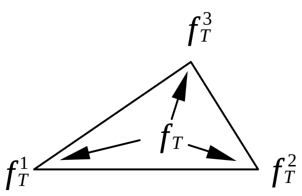


図２ 時間変動の分配

次にこの三角形要素内の時間変化 f_T を各頂点に f_T^j として分配(Distribute)し（図２）、この値を各頂点での時間変化量として頂点の物理量を更新する。

$$S_j\frac{\partial u_j}{\partial t}=-\left(f_T^j+f_{OtherTriangles}^j\right) \tag{1.3}$$

ただし S_j は点 j を頂点として持つ三角形面積の総和の 1/3 である。このとき適合性は以下のように表される。

$$f_T=f_T^1+f_T^2+f_T^3 \tag{1.4}$$

この分配法によって様々なスキームが表される。本研究で基礎とする１次精度の計算法を以下に示す。

$$f_T^j=k_j^+(u_j-u_{in}) \qquad u_{in}=\frac{\sum_i k_i^- u_i}{\sum_i k_i^-}$$
$$k_j^+>0, k_j^-<0, \qquad k_j^++k_j^-=k_j \tag{1.5}$$

この解法は１次精度の解法の中で最大の時間幅を取ることができ、流れの横方向の拡散が最も少ないという性質をもつ。この解法における三角形 T のみでの CFL 条件は式(1.3)にオイラー陽解法を用いた場合の正値性の条件から

$$\max_j\left\{\frac{\Delta t}{S_j}\left(k_j^+-\frac{k_j^-}{\sum_i k_i^-}\right)\right\}<1 \tag{1.6}$$

となる。

２．２．定常状態での２次精度化

次のような係数 b_T^j を考えれば R-D 法は図３のように表現される。

$$b_T^j=\frac{f_T^j}{f_T} \tag{1.7}$$

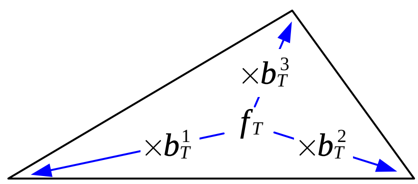


図３ 係数による時間変動分配の表現

式(1.4)より適合条件は以下の式に置き換えられる。

$$b_T^1+b_T^2+b_T^3=1 \tag{1.8}$$

今、三角形内の線形分布が定常な解析解だとする。２次精度の解法であるためにはこの分布を定常状態として維持できなくてはならない。これは三角形内が定常状態のときに

各頂点を更新しないことであるから以下の条件になる。

$$f_T = 0 \rightarrow f_T^j = 0 \tag{1.9}$$

図 3 のような表現を用いるとβが有限であればこの条件は満たされる。しかし１次精度の解法では条件(1.9)が満たされずβが有限であるとは限らない。そこで制限関数を導入しβを有限に制限し、図３にしたがって分配することで非線型ではあるが定常状態における２次精度スキームを構築することができる。しかもこの考え方は新たな周囲の格子点を必要としない。式で表すと

$$\begin{aligned} & b_T^j \rightarrow b_T^{*j} < \infty \qquad (b_T^{*1} + b_T^{*2} + b_T^{*3} = 1) \\ & f_T^j \rightarrow f_T^{*j} = b_T^{*j} f_T \end{aligned} \tag{1.10}$$

ここでもとの計算法の単調性を維持するために三角形内での正値性を保つことを考える。式(1.5)より f_T^j は各頂点とその係数の和で表せる。

$$f_T^j = \sum_{i=1}^{3} c_i^j u_i^n \tag{1.11}$$

２次精度化はこの値を実数倍することであると考えると、この f_T^j の符号を変えなければもとの CFL 条件下でスキームの正値性が保たれる。したがって b_T^j の符号を変えなければ同じ Δt を用いる限り安定性と正値性を壊すことはない。本研究では b_T^j を有限にする際、適合条件の式(1.8)が平面の方程式となっていることに着目し、この平面内で b_T^j の符号が変わらないよう変化させるという考え方を用いた。
例えばβが図４の状態にあるときはβと点Aを結んだ直線

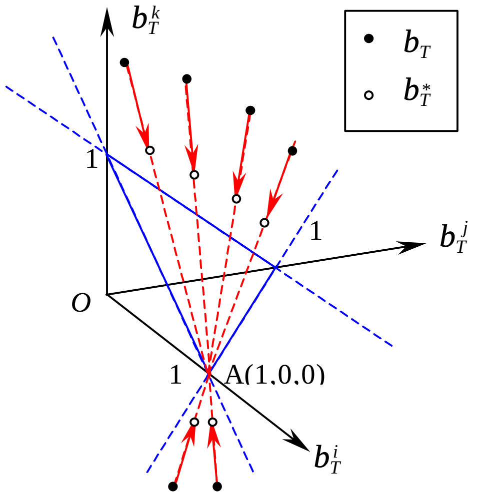


図４　平面内での係数の移動

上で点Aに向かって移動させる。このとき図４の破線を越えなければ符号は変わらない。この過程で収束性を考慮して連続性と一階微分可能条件を付加した。式で表すと

$$\begin{aligned} & b_T^{*i} = \Phi\left(b_T^i\right) \qquad t = \frac{b_T^{*i} - b_T^i}{1 - b_T^i} \\ & b_T^{*j} = b_T^j (1-t) \\ & b_T^{*k} = b_T^k (1-t) \end{aligned} \tag{1.12}$$

ここでΦは式(1.13)で表される図５のような関数である。２次精度のためには有限で、計算法の連続性のためには(1/2,1/2)を中心として点対称でなければならない。p は正の定数で小さいほど制限が強くなる。本研究ではこの値を 0.5 とした。

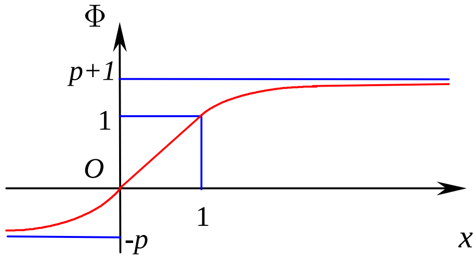


図５　連続かつ１階微分可能な制限関数

$$\Phi(x) = \begin{cases} -px/(x-p) & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ \{x(p+1)-1\}/(x+p-1) & 1 < x \end{cases} \tag{1.13}$$

３．システム方程式

３．１．１次精度スキーム

次の方程式を数値的に解く。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{1.14}$$

ここで U はベクトル、A、B は対角化可能で固有値は実数のみのものを持つ行列とする。式(1.5)をシステム方程式へと拡張すると

$$\begin{aligned} & f_T^j = K_j^+ \left(U_j - U_{in}\right) \\ & U_{in} = \left(\sum_i K_i^-\right)^{-1} \sum_i K_i^- U_i \\ & K_j = \frac{1}{2}\left(n_j^x A + n_j^y B\right) \qquad \vec{n}_j = (n_j^x, n_j^y) \end{aligned} \tag{1.15}$$

式の中で現れる $K_j^\pm$ は行列の固有値が正または負のものである。また行列 A,B の決定には Roe 平均[2]を用いる。

３．２．定常状態での２次精度化

式(1.7)を直接システム方程式に用いることはφがベクトルであるために不可能である。一般に b_T^j はシステム方程式の場合には行列となるが、１次精度の解法ではこの行列を１意的に定めるには新たな条件を付加しなければならない。ここでは述べないが、Deconinck らによる方法[2]は新たな行列演算を必要とするため計算量が多くなる。本研究では式(1.12)を直接ベクトルの各成分に用いることでこの過程の計算量を非常に少なく抑えることができる。

４．Euler 方程式の計算例

実用性という観点から工学的に多く用いられている有限体積法との比較計算を行った。有限体積法には Roe スキームを Venkatakrishnan の制限関数を用いた MUSCL 法で２次精度化したものを使用した。時間積分は両者とも局所時間幅を用いた Euler 陽解法によるものである。

４．１．超音速ダクト内の流れ

偏角 45°の斜面を持つダクト内にマッハ数 2.7 の超音速流が流入する計算を３種類の格子の粗さ（図６）で行った。
エントロピ分布を図７に示す。本手法ではマッハステム直後のエントロピの振動がほとんど見られない。また膨張部分ではエントロピ生成が少ないといった向上がみられる。
密度分布を図８に示す。エントロピ同様、マッハステム直後の振動に違いが見られる。これらの数値的振動は有限体積法では格子を細かくしても改善されることはなかった。

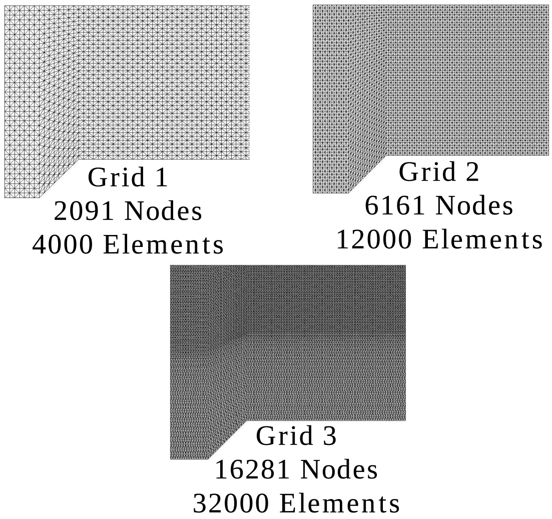


図６　計算格子

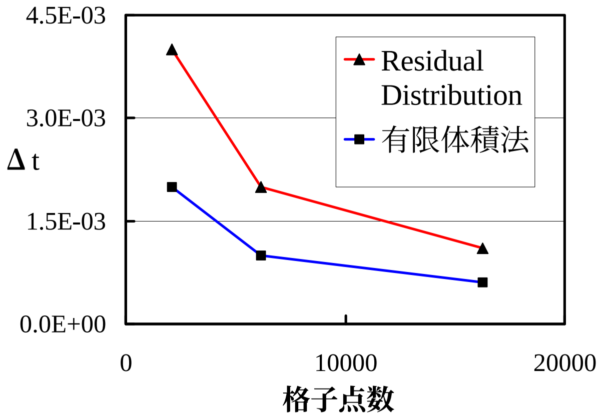


図 9　オイラー陽解法での時間幅

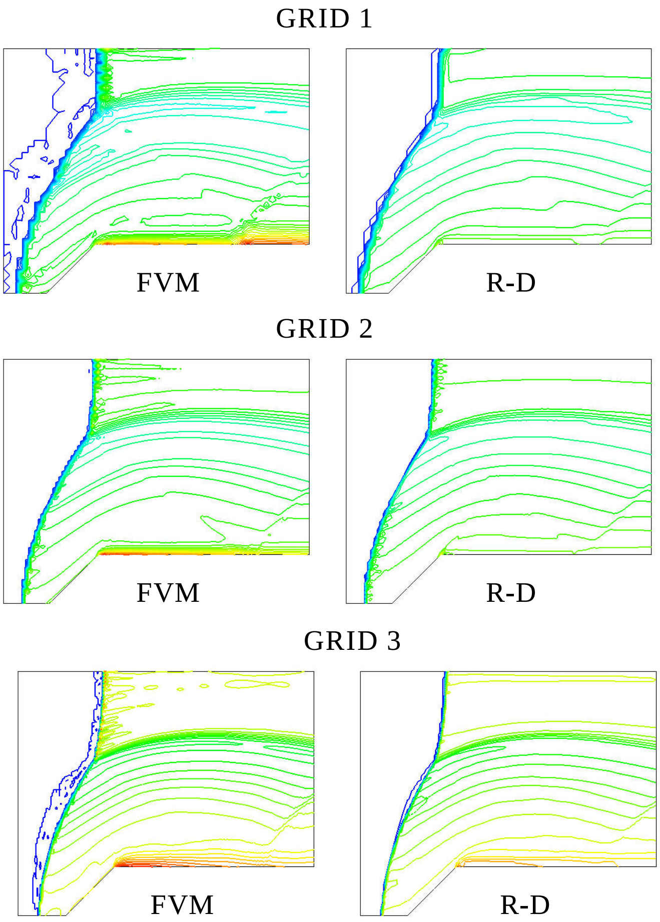


図７　エントロピ分布

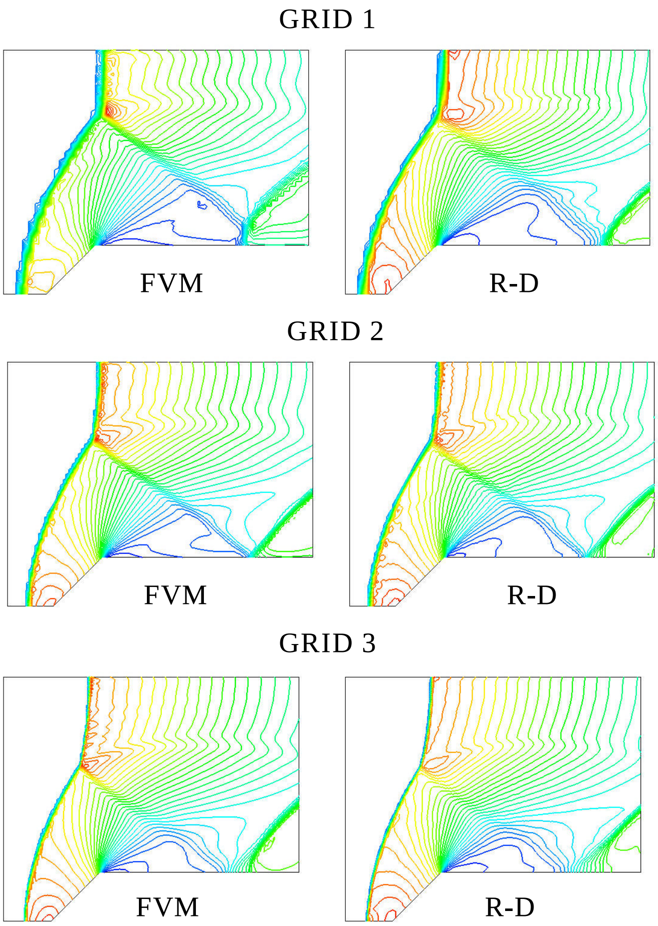


図８　密度分布

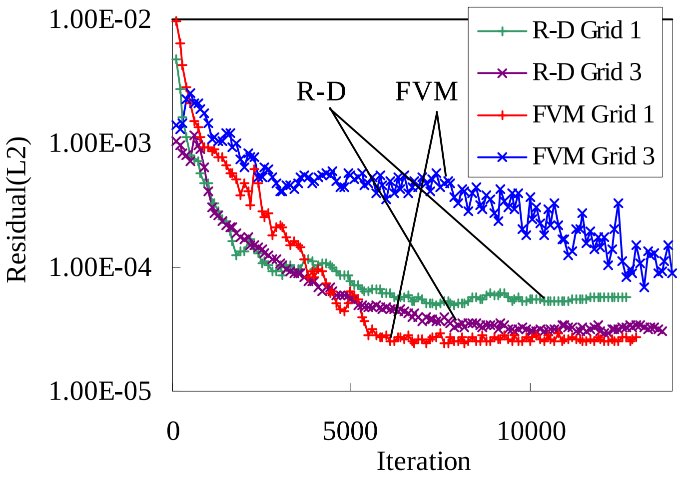


図１０ 残差履歴

空間で一様な時間刻み幅でオイラー陽解法を用いた場合の最大時間幅Δt と格子点数の関係を図９に示す。この値はどの細かさの格子においても有限体積法のほぼ２倍の値をとることができた。図１０には最も粗い格子と最も細かい格子の残差履歴を載せてある。収束性は有限体積法と比べてもさほど悪化は見られない。

計算時間についてはプログラミングや環境による影響を無視できないが、本コードでは有限体積法の約 0.8 倍とほぼ同じ計算時間であった。ただし有限体積法では２次精度化を行うことで計算時間の大きな増加が見られるが、R-D 法では１次精度スキームの部分がほとんどの計算時間を占めている。

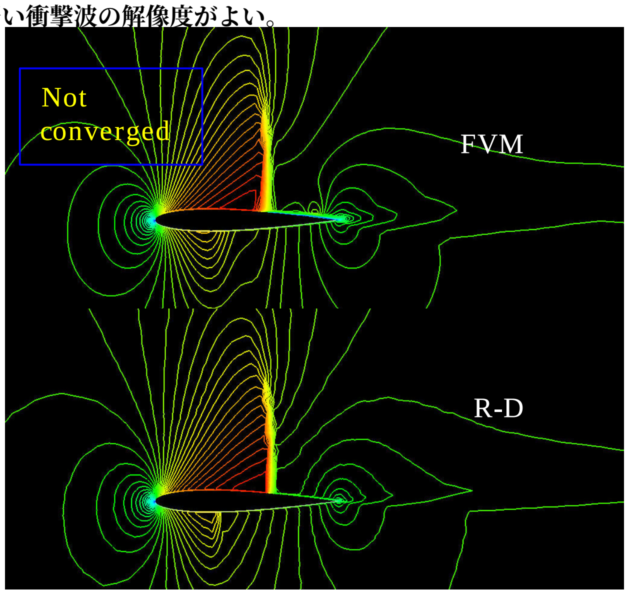
４．２．遷音速翼まわりの流れ

一様流マッハ数 0.8、迎角 1.25 °で NACA0012 翼型まわりの流れを翼表面上の分割数を変化させた３種類の格子で計算を行った。表面上の格子点数は以下のようになっている。

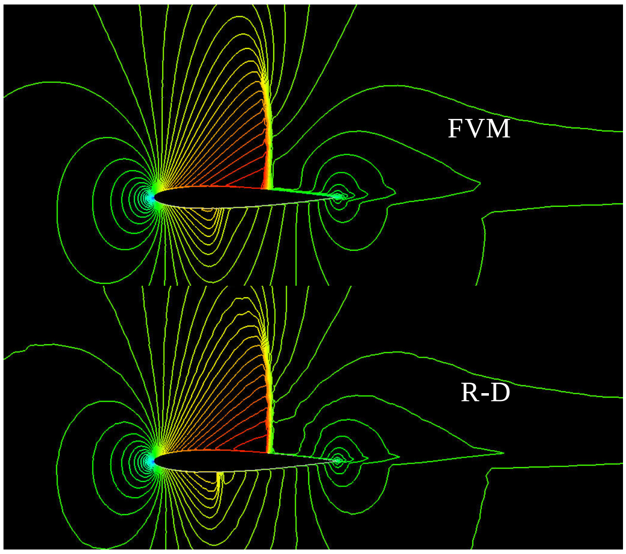
Grid 1	128
Grid 2	198
Grid 3	268

解は翼上下面ともに衝撃波が発生し、翼後流に剪断が生じるという流れ場である。

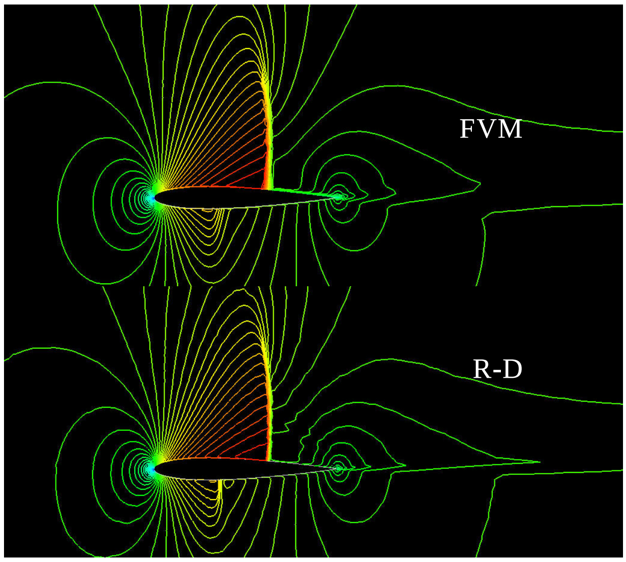
図１１（1）～（3）にマッハ数分布を示す。最も粗い格子では有限体積法では収束解が得られなかった。すべての格子において多少ではあるが後流の剪断の解像度と下面の弱い衝撃波の解像度がよい。



Mach Contours
図 11(1)Grid 1 （翼表面 128 点）



Mach Contours
図 11(2)Grid 2 （翼表面 198 点）



Mach Contours
図 11(3)Grid 3 （翼表面 268 点）

図１２に示す Cp 分布からは衝撃波をより鋭く捉えている様子が分かる。特に下面に生じる弱い衝撃波の解像度の違いが大きい。

５．まとめ

非構造格子のための Residual-Distribution 法（以下 R-D 法と記す）による1次精度の解法をもとに新たな2次精度化の方法の構築を行った。この2次精度化手法は R-D 法のもつ2次精度化の原理を利用し、計算量と収束性を考慮して構築した。他の2次精度化手法と同じく本手法も三角形の頂点以外の点を必要としない。本手法を用いた場合、計算量は2次精度化を行った有限体積法とほぼ同じであり、収束性も大きな差は見られない。

計算例はオイラー方程式を用いて超音速流がダクト内に流入する流れと遷音速の NACA0012 翼型まわりの流れを示した。ダクト内の流れでは衝撃波以外でのエントロピ生成が少ないこと、つまり数値粘性が少ないこと、強い衝撃波直後の垂直方向の数値的振動が弱いこと、さらにオイラー陽解法ではΔt が有限体積法のほぼ2倍で計算が可能であることがわかった。遷音速翼まわ

りの流れでは弱い衝撃波の高い解像度を確認できた。
ここで紹介した計算法には小さなステンシルと高い解像度、少ない数値粘性といった特徴がある。短所は非定常な流れでは1次精度に落ちるということと、基礎とする解法が逆行列の計算を必要とすることである。

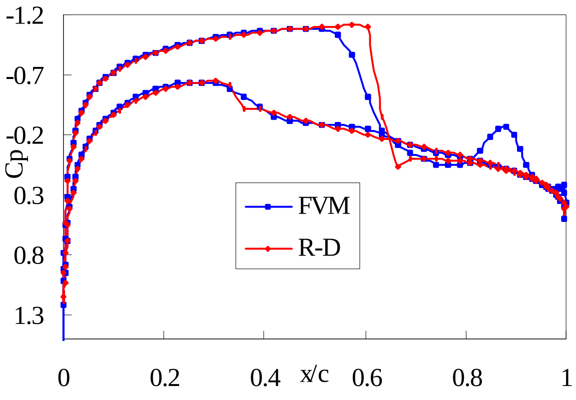


図１２(1) Cp **分布（翼面上** 128 **点）**

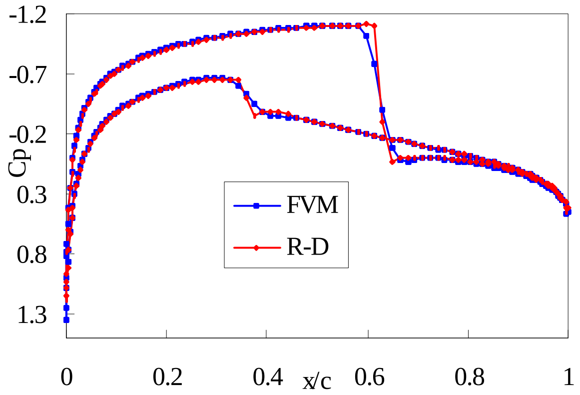
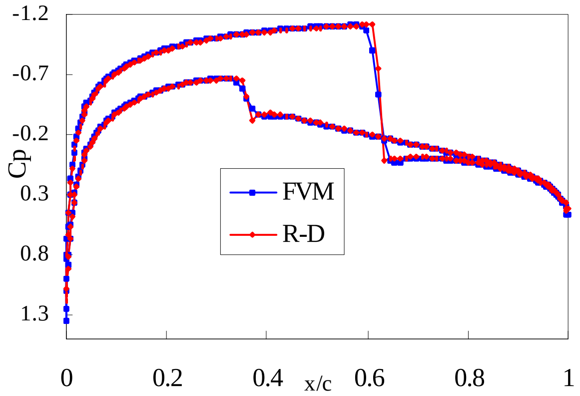


図１２(2)Cp **分布（翼面上** 198 **点）**



Cp 分布 (Grid 3 268点)

参考文献

[1] H. Paillere, H. Deconinck, and E. van der Weide. Upwind Residual Distribution methods for compressible flow: An alternative to Finite Volume and Finite Element Methods. *Part I:schaler schemes.* In *VKI LS 1997-03, Computational Fluid Dynamics*, 1997.

[2] H. Paillere, H. Deconinck, and E. van der Weide. Upwind Residual Distribution methods for compressible flow: An alternative to Finite Volume and Finite Element Methods. *Part II:System Schemes and Applications.* In *VKI LS 1997-03, Computational Fluid Dynamics*, 1997.

[3] D. Sidilkover. Multidimensional upwinding and multigrid. 1995. 12th AIAA CFD Conference, San Diego, Paper 95-1759.

[4] P. L. Roe. Multidimensional upwinding: motivation and concepts. In *VKI LS 1994-05, Computational Fluid Dynamics*, 1994.

[5] H. Deconinck. Analysis of wave propagation properties for the Euler equations in two space dimensions. In *VKI LS 1994-05, Computational Fluid Dynamics*, 1994

[6] H. Paillere, J.-C. Carete, and H. Deconinck. Multidimensional upwind and SUPG methods for the solution of the compressible flow equations on unstructured grids. In *VKI LS 1994-05, Computational Fluid Dynamics*, 1994

[7] T. J. Barth, E. van der Weide, H. Deconinck, and R. Abgrall. Matrix Distribution Schemes and Energy-Stability for Hyperbolic Systems, with Application to Compressible Flows. In *Proc.* 6th *International Conference on Hyperbolic Problems, Hongkong*, 1996