非線形コンパクトスキームの改良と圧縮性 DNS への応用

Improvement of Compact Nonlinear Schemes and Its Application to Compressible DNS

山下 建志，電通大院，〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1，E-mail: yamasita@maekawa.mce.uec.ac.jp
前川 博，　電通大，　〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1，E-mail: maekawa@mce.uec.ac.jp
Kenshi YAMASHITA, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585
Hiroshi MAEKAWA, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585

We improved our compact nonlinear shock capturing schemes by using convex combinations of compact stencils in order to avoid ENO's oscillatory behavior near convergence. We applied these schemes to direct numerical simulations of the supersonic boundary layer receptivity to small amplitude acoustic disturbances. The results at Mach number 4.5 show that these schemes are key not only to capturing strong discontinuities but also to resolving very weak perturbation fields. The first- and second-mode instability waves are obtained in the boundary layer.

１．緒言

格子境界における物理量を近隣の最も滑らかなステンシルを選んで補間し、数値流束を評価することにより、不連続においても高次精度で（Gibbs 現象を起こさないという意味で）本質的に振動しない（ENO）スキームを作ることができる。オリジナルの ENO スキーム[1]は多項式を用いて実現されているが、近年は解析空間全体で高次精度を保って不連続捕獲ができる ENO の性質に着目して、スペクトル法やコンパクト差分[2]等の高解像度でグローバルなスキームにそのアイデアを応用する試みが多く行われている[3-7]。非線形コンパクトスキーム[6,7]もそのような試みの一つであり、コンパクト差分に ENO 法に基づく非線形補間を組み込んだものである。

しかしながら、これらのスキームに共通する課題として、補間ステンシルの選択アルゴリズムが複雑で多くの論理演算を必要としていること、定常計算における収束性が悪いことなどが挙げられる。補間の候補となる複数のステンシルについて滑らかさを比較し、補間ステンシルを論理的に切り替えることから、切り替えのボーダーとなる格子点において、滑らかさを表す値が丸め誤差程度変化したとしても、補間ステンシルの切り替えが起こりうる。補間ステンシルが異なればその値は Taylor 級数の打切り誤差程度の変動を生じることになる。この現象は定常状態に近いほど同じ点で繰り返され、ENO スキームによる定常計算がある段階で収束しづらくなる原因となる[8]。

我々は先に非線形コンパクトスキームを用いて超音速境界層の空間発展 DNS [10]を行ったが、その際に以上のことが大きな問題となった。超音速境界層に微小な音波で撹乱を与え、撹乱から誘起される不安定波を捉えるためには、打ち切り誤差レベルとはいえ、このような振動は無視できない存在となる。したがってこの問題を解決するために補間スキームの改良を行った。

２．非線形コンパクトスキーム

まず Deng & Maekawa による非線形コンパクトスキームについて概要を示す。その改良については次節で述べる。
１次元の双曲型保存方程式について考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad ①$$

流束 f の空間微分については３重対角の高解像度 cell-centered compact scheme [2]を用いる。

$$\tfrac{1}{22}f'_{i-1}+f'_i+\tfrac{1}{22}f'_{i+1}=\tfrac{12}{11h}\left(\hat{f}_{i+1/2}-\hat{f}_{i-1/2}\right)+O\left(h^4\right) \qquad ②$$

このとき格子境界での数値流束 $\hat{f}$ は、境界における左右の物理量 u_L, u_R を用いて Riemann Solver により $\hat{f}=\hat{f}\left(u_L,u_R\right)$ として定める。u_L，u_R はそれぞれ左、あるいは右にバイアスした補間スキームにより求める。基本となるのは次の５次精度の３重対角型コンパクト補間スキームである。

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}u_{L\,j-1/2}+u_{L\,j+1/2}+\tfrac{1}{10}u_{L\,j+3/2}&=\tfrac{1}{10}u_{j-1}+u_j+\tfrac{1}{2}u_{j+1}+O\left(h^5\right)\\ \tfrac{1}{10}u_{R\,j-1/2}+u_{R\,j+1/2}+\tfrac{1}{2}u_{R\,j+3/2}&=\tfrac{1}{2}u_j+u_{j+1}+\tfrac{1}{10}u_{j+2}+O\left(h^5\right)\end{aligned} \qquad ③$$

しかしこれは片側差分式ではないので不連続をまたぐと振動してしまう。したがって Gibbs 現象を避けるためには次に示すように３種類の補間スキームを組み合わせて不連続をまたがないように区分的なコンパクト補間スキームを構成する必要がある。以下では補間ステンシルの選択アルゴリズムについて述べるが、簡単のため、左にバイアスした補間についてのみ議論する。

非線形コンパクトスキームでは補間の候補となるステンシルの滑らかさを近隣の１階微分と２階微分の値を用いて評価し、補間スキームを論理的に次のように切り替えている。

$$\begin{aligned}D_{1j}&=u_{j+1}-u_j,\\ D_{2j}&=u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}.\end{aligned} \qquad ④$$

$$K_L=\begin{cases}1, & \text{if } \left|D_{1\,j-1}\right|\le b\left|D_{1j}\right|,\quad \left|D_{2\,j-1}\right|<b\left|D_{2j}\right| \\ & \qquad \left(\text{if a discontinuity is contained in } \left[x_j,\,x_{j+1}\right]\right);\\ 2, & \text{if } \left|D_{1j}\right|<b\left|D_{1\,j-1}\right|,\quad \left|D_{2\,j+1}\right|<b\left|D_{2j}\right| \\ & \qquad \left(\text{if a discontinuity is contained in } \left[x_{j-1},\,x_j\right]\right);\\ 3, & \text{otherwise.}\end{cases} \qquad ⑤$$

$$\begin{cases}a_1u_{L\,j-1/2}+u_{L\,j+1/2}=a_1u_{j-2}+b_1u_{j-1}+c_1u_j, & \text{if } K_L=1;\\ u_{L\,j+1/2}+a_2u_{L\,j+1/2}=a_2u_j+b_2u_{j+1}+c_2u_{j+2}, & \text{if } K_L=2;\\ \tfrac{1}{2}u_{L\,j-1/2}+u_{L\,j+1/2}+\tfrac{1}{10}u_{L\,j-1/2}=\tfrac{1}{10}u_{j-1}+u_j+\tfrac{1}{2}u_{j+1}, & \text{if } K_L=3.\end{cases} \qquad ⑥$$

ここでβは切り替えの感度を決めるパラメータであり、0≦β≦1 の範囲で設定する。β＝0 ではスイッチ関数 K_L は常に 3 となり、全てにおいて③式が選択される。

３．Compact Convex Combination Schemes

我々は本研究において上記の論理的な手法とは異なるアプローチで、よりスムーズな非線形補間を行うことを試みた。

Copyright © 2000 by JSCFD

補間の候補となる全てのスキームに重みをつけて線形結合し、ステンシルごとの重み係数をその滑らかさの関数とすることにより、ENO 補間を模擬できないかと考えた。候補となる全ての補間スキームにそれぞれ重み w_1, w_2, w_3 をつけて線形結合すると⑥は次のようにまとめることができる。

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(w_1 a_1 + \tfrac{1}{2} w_3\right) u_{L\,j-1/2} + u_{L\,j+1/2} + \left(w_2 a_2 + \tfrac{1}{10} w_3\right) u_{L\,j-1/2} \\ &= w_1 a_1 u_{j-2} + \left(w_1 b_1 + \tfrac{1}{10} w_3\right) u_{j-1} + \left(w_1 c_1 + w_2 a_2 + w_3\right) u_j \\ &+ \left(w_2 b_2 + \tfrac{1}{2} w_3\right) u_{j+1} + w_2 c_2 u_{j+2}, \\ &\quad w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ &\quad w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0,\ w_3 \ge 0.\end{aligned}} \qquad ⑦$$

この凸結合のアイデアはオリジナルの ENO スキームの改良に用いられており WENO（Weighted ENO）スキーム[8]として発表されている。このようなアプローチでは補間の非線形性はステンシルの選択ではなく、重み係数の値の変化によって与えられる。ステンシルの滑らかさを表す値が丸め誤差程度変化した場合に、それによって計算された重み係数および補間値も丸め誤差程度変化するのみである。したがって緒言で述べたような ENO 特有の微小変動が無くなり、収束性の改善が期待できる[8]。また、補間スキームの切り替えが無くなるのでベクトル型スーパーコンピュータとの相性が良いことも報告されている[9]。

重みの計算アルゴリズムは非線形コンパクトスキームで用いた論理演算式⑤を利用して作成した。スイッチ関数 K_L の変化は $K_L=1$ から直接 $K_L=2$ あるいはその逆に変化することは無く、必ず $K_L=3$ を介して変化すると仮定する。これにより「$K_L=1$ と 3 の関係」と「$K_L=2$ と 3 の関係」を独立に評価して重み配分を考えることにする。ここで

$$p_1 = b\left|D_{1j}\right| - \left|D_{1\,j-1}\right|, \qquad p_2 = b\left|D_{2j}\right| - \left|D_{2\,j-1}\right|. \qquad ⑧$$

とおくと、$K_L=1$ が選択されるのは⑤より

$$p_1 > 0 \quad \cap \quad p_2 > 0 \qquad ⑨$$

が成り立つ場合である。これは

$$P = p_1 + p_2 - \left|p_1 - p_2\right| > 0 \qquad ⑩$$

と等価である。同様に

$$q_1 = b\left|D_{1\,j-1}\right| - \left|D_{1j}\right|, \qquad q_2 = b\left|D_{2j}\right| - \left|D_{2\,j+1}\right|. \qquad ⑪$$

とおくと $K_L=2$ が選択されるのは

$$Q = q_1 + q_2 - \left|q_1 - q_2\right| > 0 \qquad ⑫$$

の場合である。ε を小さな正の数として重み関数を

$$\mathrm{wf}(x,e) = \frac{x}{e + |x|}, \qquad (-1 < \mathrm{wf} < 1). \qquad ⑬$$

で与える。ε は重みが遷移するときの傾きを決める値で、ε→0 ではステップ関数に対応する。

$$\begin{aligned} w_p &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{wf}(P,e) - \mathrm{wf}(Q,e)\right), \\ w_q &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{wf}(Q,e) - \mathrm{wf}(P,e)\right) = -w_p. \end{aligned} \qquad ⑭$$

とすると補間スキームの重みはそれぞれ

$$\begin{cases} w_1 = \tfrac{1}{2}\left(w_p + \left|w_p\right|\right) \\ w_2 = \tfrac{1}{2}\left(w_q + \left|w_q\right|\right) \\ w_3 = 1 - w_1 - w_2 \end{cases} \qquad ⑮$$

として与えることができる。

また、重み関数については WENO の文献[8,9]に Total Variation を用いた詳細な議論があるが、そのような関数の適用については今後検討したいと考えている。

４．圧縮性 DNS への応用

改良したスキーム用いて超音速境界層の空間発展 DNS を行い、超音速境界層の音響撹乱に対する受容性について調べた。このようなシミュレーションの工学的、物理的な背景については前の論文[10]で述べているのでここではシミュレーション結果を中心に示す。

シミュレーションの設定は以下のとおりである。

対流項：4th-order compact convex combination schemes
（$\beta=0.5$, $\varepsilon=0.1$）.
粘性項：6th-order central compact scheme
(4th-order at Boundaries).
時間発展：4th-order Runge-Kutta scheme

Riemann Solver：	HLLE
流入境界：	Fixed
流出境界：	Extrapolation
壁面境界：	Adiabatic wall
計算格子数：	$N_\xi \times N_\eta (\times N_z) = 150 \times 40 (\times 8)$
主流マッハ数：	$M_\infty = 4.5$
主流レイノルズ数：	$Re_\infty = 4.5 \times 10^4$
主流温度：	$T^*_\infty = 61.15K$
比熱比：	$\gamma = 1.4$
プラントル数：	$Pr = 0.7$
撹乱の振幅：	$p'/p_\infty = 1.0 \times 10^{-3}$
撹乱の無次元周波数：	$F = \omega^* \nu^* / u^{*2}_\infty = 2.2 \times 10^{-3}$

[定常場]

図１に計算格子、図２に定常場の様子を示す。図３は平板前縁付近を拡大して表示したものである。これらの図から我々のスキームは $M_\infty=4.5$ の強い先頭衝撃波（圧力比 24）を適切に捕獲できていることがわかる。先頭衝撃波に対しては Roe の Riemann Solver ではカーバンクル現象を引き起こしてしまい正しい解が得られないことが一般に知られている[11]。我々も同様の経験をしたので、Riemann Solver には HLLE スキーム[12]を用いることにした。HLLE は強い衝撃波に対して Roe スキームより安定であるが数値的な拡散が強い[11]。しかしながら、その欠点は高次精度の補間と組み合わせるようなスキームでは解決されるものと思われる。また、以前は定常場に近づくと微小な変動が目立つようになりそれが消えることが無かったので、時間平均を取って定常場としていたが、補間スキームの改良により収束性が改善されたのでそのような現象は起こらなくなった。

[2 次元撹乱に対する受容性]

先に計算した定常解に対して平面音波を用いて音響撹乱（主流圧力の 0.1%）を与え、境界層の受容性についてシミュレーションを行った。図４に変動場の様子を示す。音響撹乱により境界層内に不安定波が形成されている様子が捉えられている。前縁からのレイノルズ数が $Re_x=1.7\times10^4$ 付近で不安定波の性質が急激に変化しているが、この前後で不安定モードが first-mode（粘性による不安定モード）から second-mode（非粘性の不安定モード）へ変化していることを示している。second-mode はおおよそマッハ数３以上の境界層で現れ、増幅率も大きいので高マッハ数での遷移に重要な役割を果たしていると考えられている[13]。また、変動場と図１の計算格子との対応を見るとわかるが、音響撹乱の一波長に対する格子数は極めて少ない。現在スキームの開発を主

Copyright © 2000 by JSCFD

にシミュレーションを行っているので疎な格子を用いているが、それにもかかわらず音波の伝播と不安定波の受容、増幅が捉えられているのは、高解像度のコンパクト差分を基にして、非線形補間により解析空間全体で高次精度を保っていることによるものであると考えている。

[3 次元撹乱に対する受容性]

最後に 3 次元波動に対する受容性のシミュレーション結果を示す。前述の 2 次元の定常解を用いて、スパン方向に周期境界を与えてシミュレーションを行った。スパン方向の分割数は現時点では 8 であるが単一モードの受容性を見るだけなので撹乱を 3 次元にした効果は確認できると思われる。主流に対し波数ベクトルがスパン方向に 60°傾いた音波により 3 次元撹乱を与えた結果と、2 次元撹乱の結果を合わせて図 5 に示す。撹乱周波数と振幅は 2 次元シミュレーションと同一である。線形安定論[14]によれば $M_\infty = 4.5$ における second-mode は 2 次元のモードが最も不安定であるが、最も不安定な first-mode は 60°傾いたモードである。図 5 を見ると前述の first-mode から second-mode へ急に変化する位置付近で明らかに斜めのモードが急激に減衰していることがわかる。このことは線形安定論において傾きが 60°の second-mode が安定であることと対応していると思われる。

5．結論

非線形コンパクトスキームの補間アルゴリズムを改良し、$M_\infty = 4.5$ の超音速境界層の空間発展 DNS に用いた。微小な音響撹乱（主流圧力の 0.1%）を与えてその受容性について調べた結果、改良されたスキームは強い先頭衝撃波（圧力比 24）を捕らえると同時に極めて微小な音波の伝播と境界層の不安定波（first-mode, second-mode）の増幅を解像できることを示した。補間スキームの改良により収束性が改善され、鮮明な摂動場が得られた。

参考文献

(1) A. Harten et al., J. Comput. Phys. 71, 231 (1987).
(2) S. K. Lele, J. Comput. Phys. 103, 16 (1992).
(3) W. Cai, C.-W. Shu, J. Comput. Phys. 104, 427 (1993).
(4) B. Cockburn et al., SIAM J. Numer. Anal. 31-3, 607 (1994).
(5) N. A. Adams, K. Shariff, J. Comput. Phys. 127, 27, (1996).
(6) X. Deng, H. Maekawa, AIAA 96-1974 (1996).
(7) X. Deng, H. Maekawa, J. Comput. Phys. 130, 77 (1997).
(8) X.-D. Liu et al., J. Comput. Phys. 115, 200 (1994).
(9) G.-S. Jiang, C.-W. Shu, J. Comput. Phys. 126, 202 (1997).
(10) K. Yamashita, H. Maekawa, Proc. JSME-FED 2000, 10 (2000).
(11) J. J. Quirk, A Contribution to The Great Riemann Solver Debate (1992), in *Upwind and High-Resolution Schemes*, M.Y. Hussaini, B van Leer, J. Van Rosendale (Eds.), Springer 550.
(12) B. Einfeldt, SIAM J. Numer Anal., 25, 294 (1988).
(13) N. A. Adams, L. Kleiser, J. Fluid Mech. Vol. 317, (1996).
(14) L. M. Mack, AGARD Report 709 pp. 3-1-3-8, (1984).

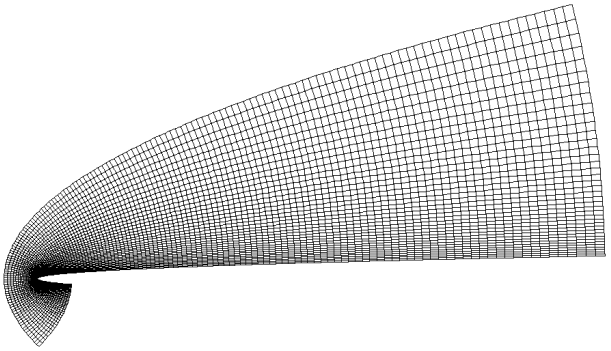

Fig.1 Computational Mesh (150x40)

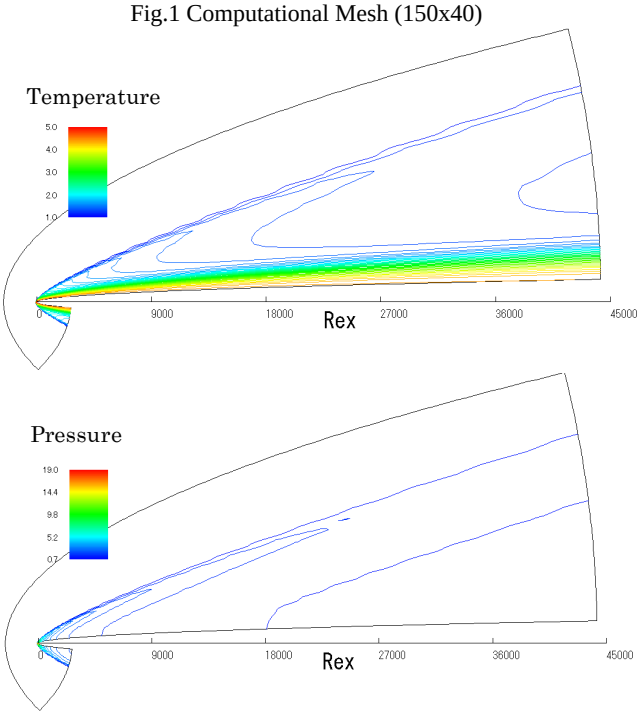

Fig.2 Baseflow solutions.

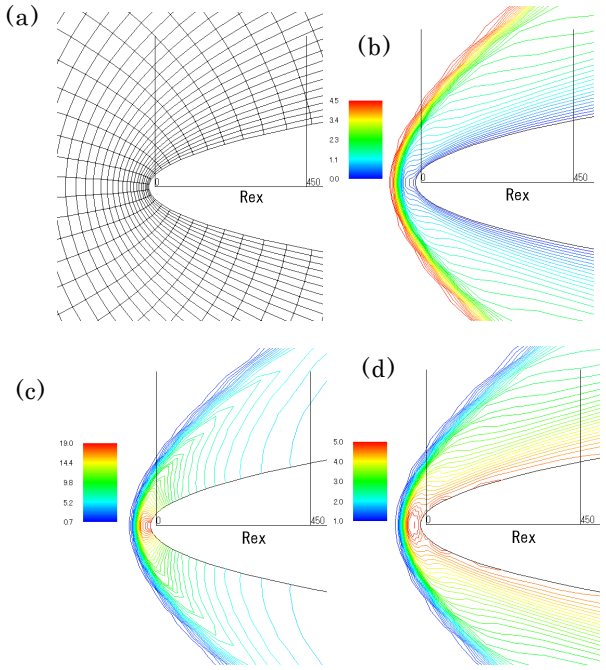

Fig.3 Close-up view of the leading-edge.
(a) Computational mesh, (b) Mach number,
(c) Pressure, (d) Temperature.

Copyright © 2000 by JSCFD

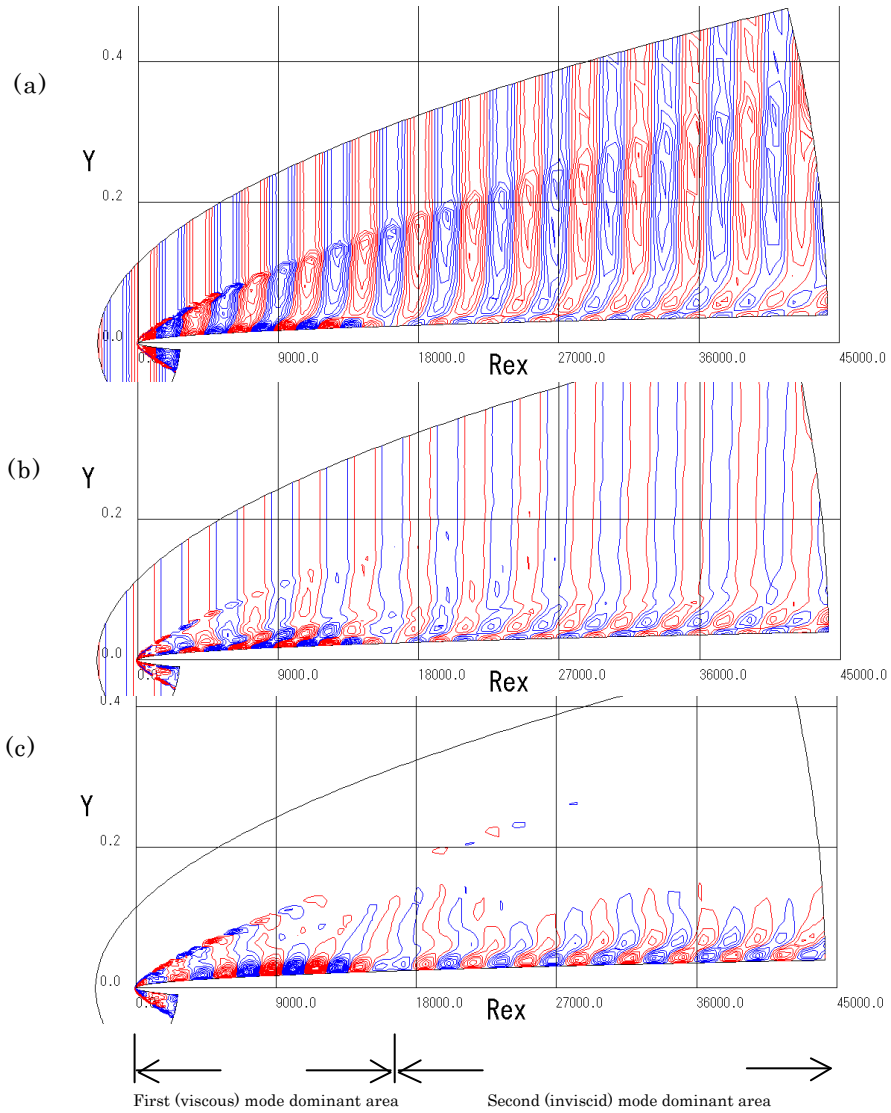

Fig. 4 Instantaneous perturbation contours.
(a) Pressure (The contour increments are ± 2.0×10^{-4}).
(b) Temperature (The contour increments are ± 2.0×10^{-4}).
(c) Vertical velocity (The contour increments are ± 1.3×10^{-4}).

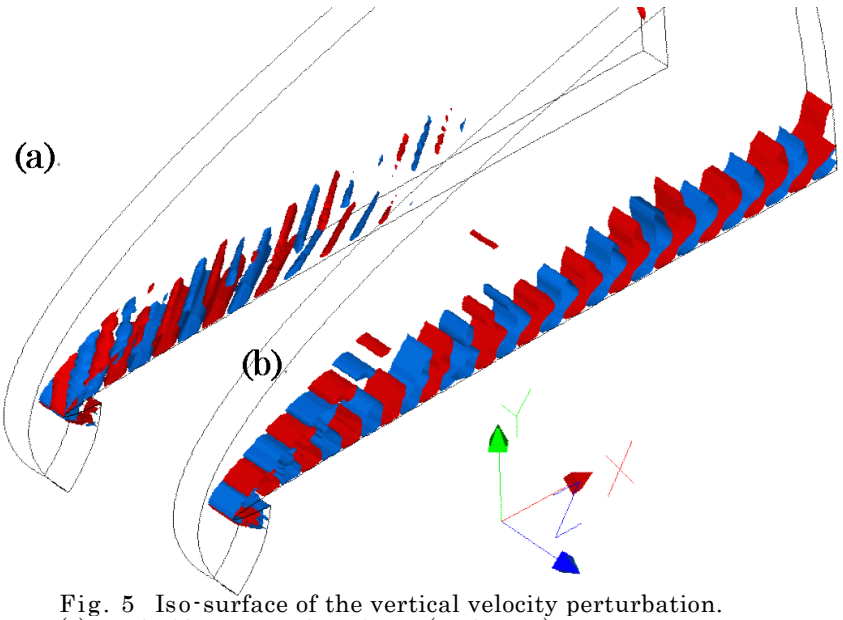

Fig. 5 Iso-surface of the vertical velocity perturbation.
(a) with oblique wave disturbance (60 degrees).
(b) with 2D wave disturbance.
(red $+10^{-4}$, blue -10^{-4})

Copyright © 2000 by JSCFD