CCUP-MOCCT 法による MHD 計算と 3 次元電磁流体コードの改善

MHD Simulation with CCUP-MOCCT Method and The Improvement of Three DImensional MHD Code

尾形陽一, 東工大工, 〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: yogata@mech.titech.ac.jp
矢部　孝, 東工大工,　〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: yabe@mech.titech.ac.jp
白岩　崇, 東工大院, 〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: stakashistu.@mech.titech.ac.jp
Yoichi Ogata ,Dept of Mechanical Sciences and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, Ookayama, Meguro-ku,152-8552,Japan
Takashi Yabe ,Dept of Mechanical Sciences and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, Ookayama, Meguro-ku, 152-8552, Japan
Takashi Shiraiwa,Dept of Mechanical Sciences and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, Ookayama, Meguro-ku, 152-8552, Japan

<Abstract> All kinds of MHD simulations have been performed with several numerical methods. However, it is quite important factor for schemes to guarantee divergence-free condition of magnetic field. CIP-MOCCT method was proposed so that this requirement could be satisfied by MOCCT method and hydrodynamic part could be calculated accurately by CIP method. We expanded CIP to CCUP method for stability. Furthermore, conventional MOCCT method itself can be improved when we solve the Alfven characteristics with not Van-Leer scheme but CIP method. In order to confirm the validity of this method, we applied it to three dimensional problems.

１．緒言

電磁流体方程式を解く方法としてこれまで数々の手法が提唱されてきたが、近年誘導方程式を解く際に Maxwell 方程式の divB=0 を満たす方法として MOCCT 法が提案された (Hawley,Stone[(1)(2)(3)])。この手法と流体方程式を高精度に解く事ができる CIP 法[(4)] を組み合わせた CIP‐MOCCT 法が国立天文台の Kudoh らによって開発され宇宙ジェット等に適用されている[(5)]。本論では CCUP 法[(6)]に拡張した CCUP－MOCCT 法を用いて電磁気流体の計算を行なう。また、MOCCT 法は Alfven 特性曲線に基づく手法であるが、従来は補間関数を直線で補間する Van-Leer 法で解く事が主流である。

しかし、MOCCT 法に CIP 法を適用する事で更に精度良く計算が可能になる事が解った。本論では、この手法を用いた三次元電磁流体コードを作成し、磁気流体計算を行なう。

２．基礎方程式

天文分野における MHD 計算では、磁力線は流体に凍りついているとしてよい場合が多い。例えば星間物質の電気伝導率は $s \approx 10^7 T^{3/2}$ であり、分子雲コアでの典型スケールの磁気拡散時間は非常に長い $(\approx 10^{19}\,yr)$ ものとなる。よって本計算で用いる基礎方程式は、次の磁気流体方程式を扱う。

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\boldsymbol{r}}\nabla p + \frac{1}{\boldsymbol{r}}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \mathbf{g}$$

$$= -\frac{1}{r}\nabla p + \frac{1}{r}\left\{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \nabla\left(\frac{1}{2}B^2\right)\right\} + \mathbf{g} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}\left\{\frac{\partial U}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)U\right\} = -p\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{3}$$

$$p = (g-1)\boldsymbol{r}U \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0 \tag{5}$$

U は内部エネルギー、圧力は理想気体である。

３．計算手法：MOCCT 法の CIP 法による改善

簡単のため一次元（X 方向）の場合を考える。多次元化は Directional splitting にする事で、一次元の手法が応用できる。一次元では、磁場の Y 成分の誘導方程式を差分化した式は次式で書く事が出来る。

$$e^*_{i+1/2} = u_{i+1/2}B^*_y - v^* B_{xi+1/2} \tag{6}$$

$$\frac{B_{y_i}^{n+1} - B_{y_i}^{n}}{\Delta t} + \frac{(e)^*_{i+1/2} - (e)^*_{i-1/2}}{\Delta x} = 0 \tag{7}$$

※　*：時刻 n+1/2

MOCCT 法では、(6)式の電場を求めるために次の Alfven 特性曲線を用いる。

$$\frac{Dv_y}{Dt} \mp \frac{1}{\sqrt{4pr}}\frac{DB_y}{Dt} = 0 \text{、} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(v_x \pm \frac{B_x}{\sqrt{4pr}}\right)\frac{\partial}{\partial x} \tag{8}$$

$C^{\pm} = v_x \pm \dfrac{B_x}{\sqrt{4pr}}$ ：特性速度

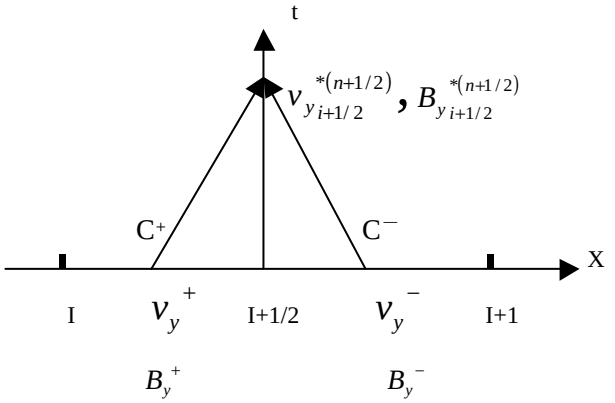


Fig.1 Alfven Characteristics

(8)式で特性速度による移流計算があるが、従来の MOC 法ではこの移流計算は Van-Leer 法[(6)]で解かれている。この部分には PPM 等の手法も適用可能であるが、本計算では CIP

Copyright © 2000 by JSCFD

法を適用する事で精度の向上を図る。

$f(=B_y, v)^{\pm}$ は特性速度 $C^{\pm}$ で $C^{\pm}\Delta t/2$ だけ移流する時の移流原点であるので、CIP 法の場合 I 点と I+1 点を 3 次関数で補間して

$$F(X) = aX^3 + bX^2 + f_i^{'}X + f_i, \quad X = x - x_i \qquad (9)$$

$$f(=B_y, v)^{\pm} = F\left(\frac{\Delta x}{2} - C^{\pm}\frac{\Delta t}{2}\right) \qquad (10)$$

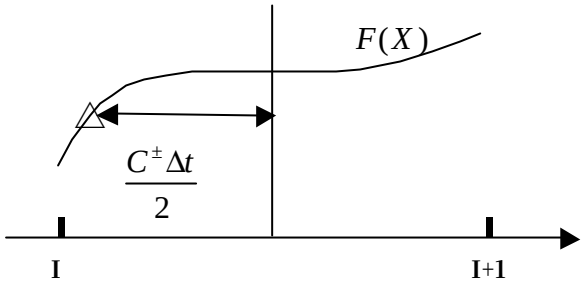


Fig.2 CIP applied to Characteristics

から求める事が出来る。

CIP 法を用いる為には磁場に関する微分値も必要となる。微分値を求める方法としては様々な選択があり、今後も研究の余地がある所だが、本論では(8)式を空間微分して得られる微分値に関する特性曲線を用いた。その際、

$$f^{'}\left(=\frac{\partial B_y}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x}F\left(\frac{\Delta x}{2} - C^{\pm}\frac{\Delta t}{2}\right) \qquad (11)$$

を用いる。

4. Application

4.1 1-Dimensional Problem

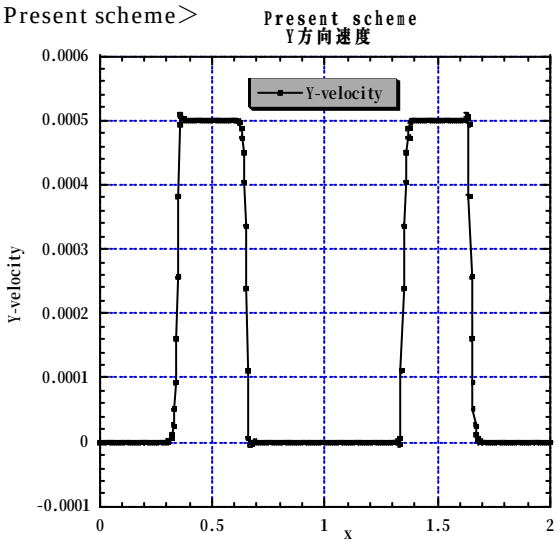
始めに 1 次元の線形 Alfven 波伝播問題を前節の手法で解き、精度の確認を行う。

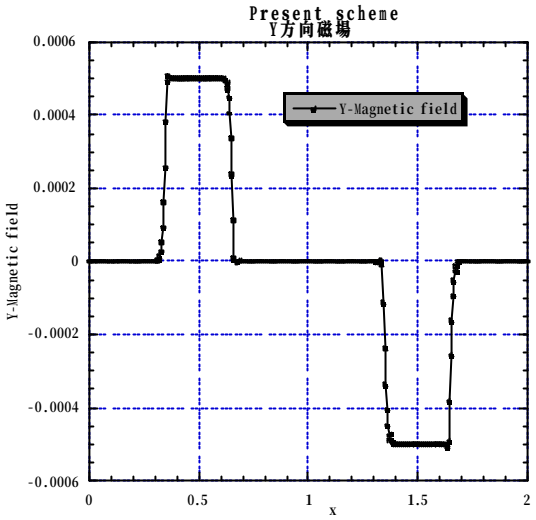
初期条件として、Y 方向速度に微小擾乱（矩形波）を与える。磁場・速度の Y 成分以外の物理量が不変の場合、Y 方向速度・磁場に対する波動方程式が得られ、波の速度は Alfven 速度である。この様な Alfven 波の伝播は天文では Magnetic Braking や星間分子雲などで重要な factor である。

$V_y = 1.0\times10^{-3}\ (170 \le I \le 230), V_y = 0.0\ (\text{otherwise}),\ NX = 400$

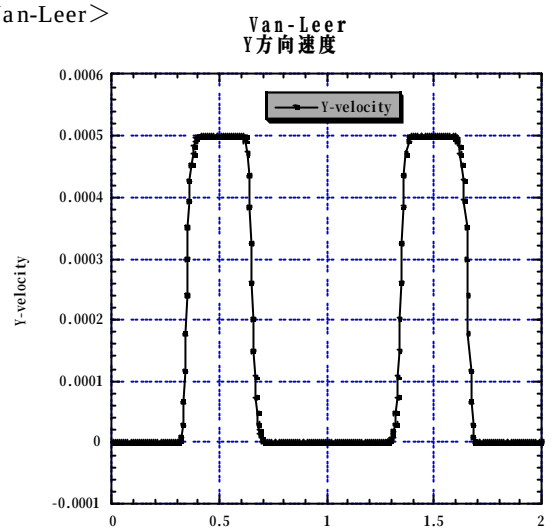
$B_y = 0.0\ , g = 5/3\ , r \equiv 1.0\ \ p \equiv 3.0/5.0$ である。

＜Present scheme＞





＜Van-Leer＞



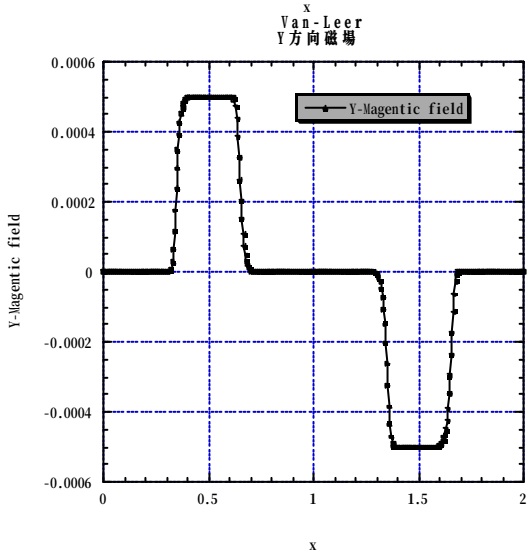


Fig.3 Compare present scheme with Van-Leer

Van-Leer と比較すると、Y 方向速度・磁場共に矩形波(トロイダル磁場の時間発展)が正確にかつ sharp に捉えられている事が判る。

次節では 3 次元問題に適用を行う。

Copyright © 2000 by JSCFD

4.2 Application to 3-dimension

三次元計算の適用例として、Parker Instability の計算（Shibata, Matsumoto[7][8]）を行う。これは太陽表面上での黒点や、降着円盤・星間分子雲内の星形成に関わる現象である。格子数は 100×25×45 の等間隔格子を用いた。
初期条件に速度擾乱を磁力線内に次式で入れている。

$$V_z \propto A\sin\left[\frac{2p\left(x - X_{\max}/2\right)}{l_x}\right]\cos\left(\frac{2py}{l_y}\right) \qquad (12)$$

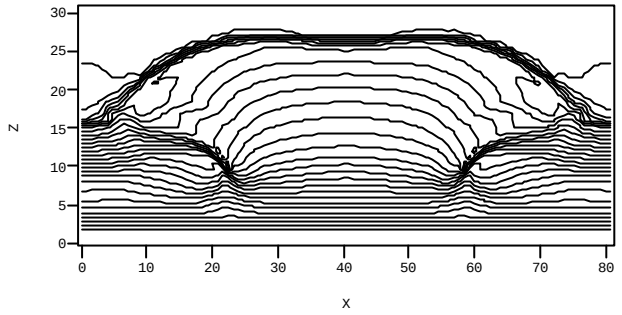


Fig.4　Density profile at Y=0 (t=40.0)

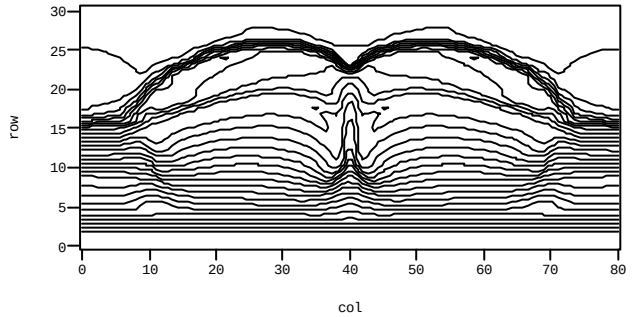


Fig.5　Density profile at Y=Ymax/2 (t=40.0)

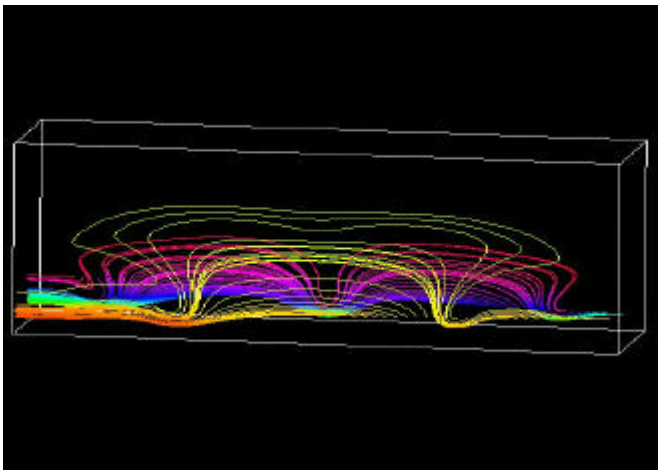
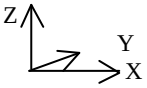
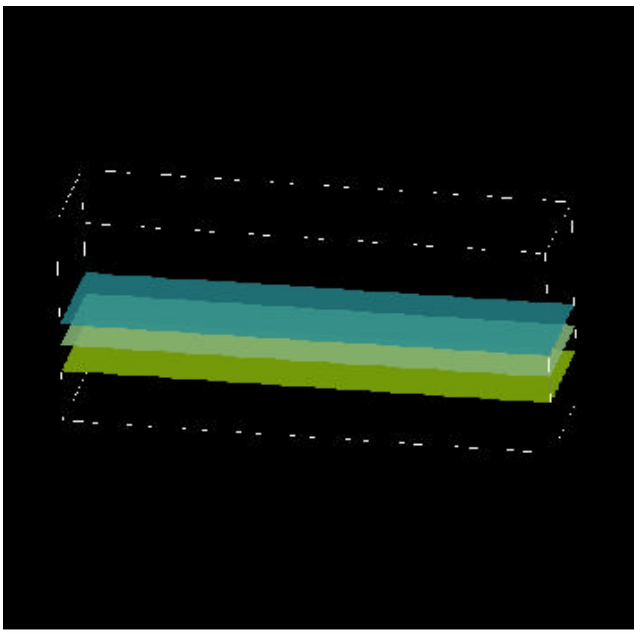


Fig.6　Magnetic Field Line at t=40.0

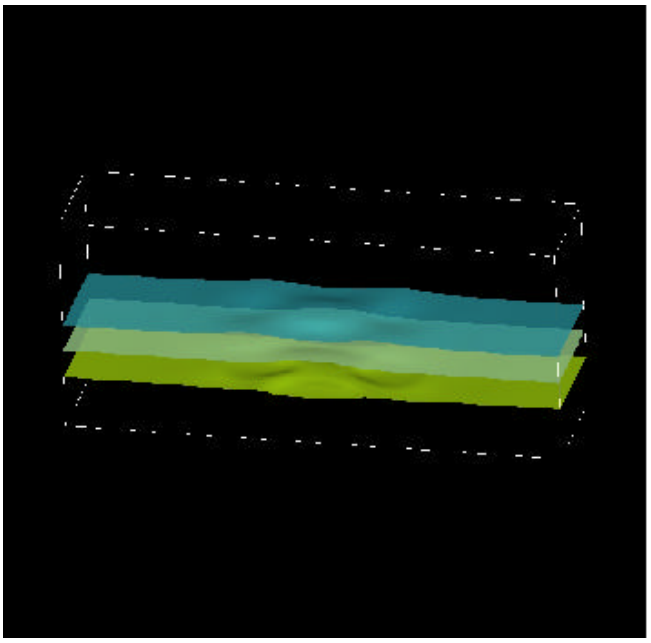


Figs.4,5 はそれぞれ t=40.0 における Y=0、Y=Ymax/2 の密度等高線である。また、Fig.6 は同時刻における磁力線を表している。（黄色：Y=0, 赤：Y=Ymax/2）

磁力線(Fig.6)に沿った Loop 面や Fig.4 内部の衝撃波面が sharp に捉えられており、Y=Ymax/2 での X=Xmax/2 における、流体が磁力線に沿って落下して生じる衝撃波も鮮明に捉えられている事が確認できる。最後に密度の時間発展を載せる。

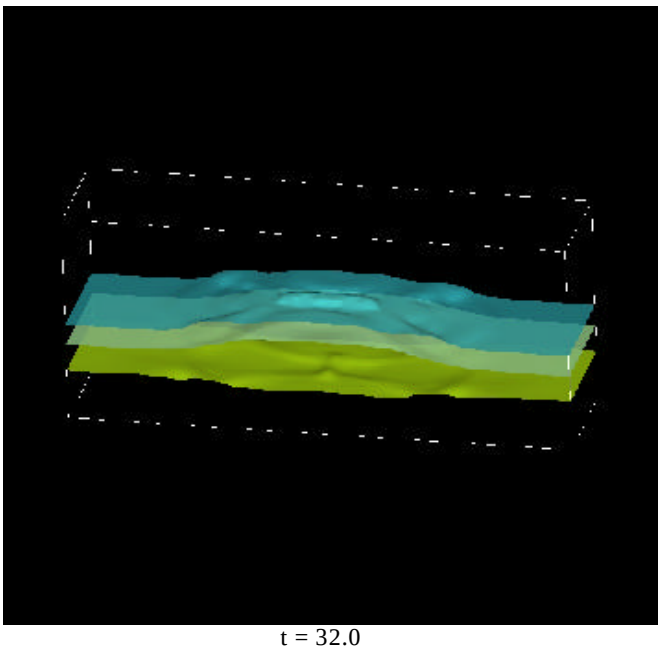


t = 0.0

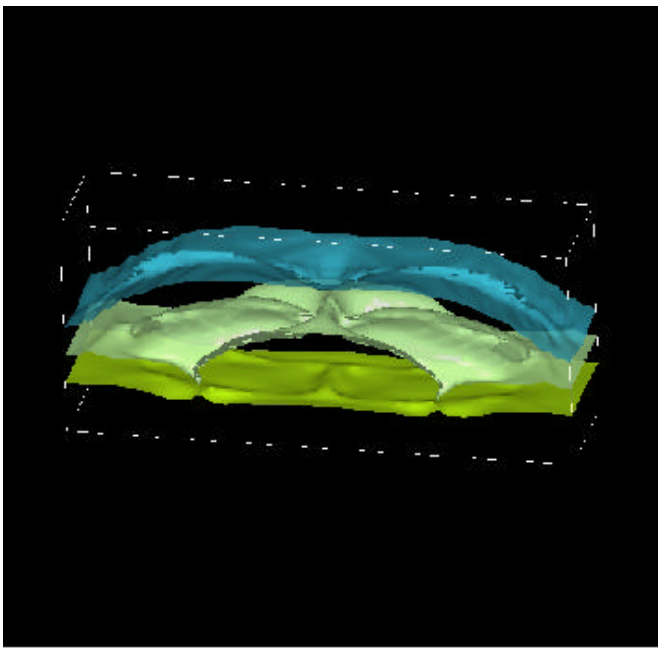


t = 24.0

Copyright © 2000 by JSCFD



t = 32.0



t = 40.0

Fig.7 Time evolution of Density

5　結論・課題

本手法による 3 次元の計算と、CIP 法による手法の改善を示し、良好な結果を得る事が出来た。3 次元計算は CCUP 法にする事により、非圧縮性流体の現象に適用する事が急務である。また、本改善手法も 3 次元に拡張し、回転場・磁気不安定性等の計算に適用、また磁場の微分値の時間発展も更なる工夫が必要である。

References

(1)C.R.Evans,J.F.Hawley, *ApJ*.**332**(1988).659

(2)J.M.Stone,M.L.Norman, *ApJ.Supp.Series*.**80**(1992) .791

(3)J.F.Hawley,J.M.Stone, *Comput.Phys.Commun*.**89** (1995).127

(4)T.Yabe,T.Aoki,*Comput.Phys.Commun*.**66**(1991).219.

(5)T.Kudoh,K.Shibata,*ApJ*,**476**(1997).632

(6)T.Yabe,T.Ishikawa,P.Y.Wang,T.Aoki,Y.Kadota, F.Ikeda,*Comput.Phys.Commun*.**66** (1991).233.

(7)K.Shibata,T.Tajima,R.Matsumoto,T.Horiuchi,T.Hanawa *Ap.J*,**338**(1989).471.

(8) R.Matsumoto,T.Tajima,K.Shibata,M.Kaisig, *ApJ*,**414** (1993).357

Copyright © 2000 by JSCFD