GSMAC-CIP 法の格子依存性

Study on the grid dependency of GSMAC-CIP Method

○ 三好市朗, 慶應義塾大学大学院, 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail：miyoshi@tana.mech.keio.ac.jp
槙原孝文, 慶應義塾大学, 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail：makihara@tana.mech.keio.ac.jp
棚橋隆彦, 慶應義塾大学, E-mail：taka@mech.keio.ac.jp
Ichiro MIYOSHI, Faculty of Science and Technology,KEIO University, 3-14-1,Hiyoshi,Kohoku-ku ,Yokohama,223-8522,Japan
Takafumi MAKIHARA,
Takahiko TANAHASHI

In the numerical fluid analysis using FEM(Finite Element Methods), linear interpolation is ordinary used. In this case, we can't obtain adequate accuracy for high Reynolds number flow. Recently many various upwind methods are proposed and shown the effectiveness through benchmark problem. We also use CIP(Cubic Interpolated Pseudeo-Particle)-FEM in solving an advection phase of the Navier-Stokes equation. In this work, we concretely show the characteristic of CIP-FEM at high Reynolds number flow (Ra=10000) by comparing with other scheme.

1. 緒論

有限要素法は，複雑な境界を容易に取り扱えるという点で実用的に優れているものの，高精度化については多くの問題点がある。双一次要素の Galerkin 法で定式化される有限要素法では，二次精度中心差分に一致するため，速い流れの解析が困難となる。近年，その問題解決の一つとして，差分法の分野で提案され移流方程式を高精度かつ安定に解析可能な CIP 法 (1) を有限要素法に導入する研究がなされている。本論文では，非圧縮性流体の解析手法である GSMAC-CIP 法に注目する。この手法は Navier-Stokes 方程式を移流フェーズ，非移流フェーズに分離し，移流フェーズに CIP 有限要素法，非移流フェーズに Galerkin 法，圧力の Poisson 方程式に GSMAC 法 (2) の流速と圧力の同時緩和法を用いる解析手法であり，二次元正方形，三角形，台形キャビティ内強制対流問題の解析などにより有効性が確かめられている (3)。著者らは，更に，この手法の性質を明らかにするため，二次元正方形キャビティ内強制対流問題を通して，$Re = 1000$, $Re = 5000$ の場合について解の格子依存性，物理量の保存性について詳細に検討をしてきた (4)(5)。本論文では，$Re = 10000$ 場合について解の格子依存性・物理量の保存性について，対流項に双二次要素を用い，上流化手法として BTD 法 (6) を採用した GSMAC 有限要素法との比較を行いながら検証を行い，これまでの一連の研究の総括を行う。

2. 支配方程式および GSMAC-CIP 法による離散化

適切に無次元化された連続の式，Navier-Stokes 方程式，はそれぞれ以下のように書かれる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{2}$$

ただし，$\boldsymbol{u}$，p，はそれぞれ速度ベクトル，圧力，Re は Reynolds 数である。移流フェーズの解法に CIP 有限要素法を用いる際，3 次補間関数中に含まれる微分係数を時間進行させなければならない。そのため式 (2) の方向微分式も必要になる。方向微分式は以下のように書かれる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_x}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_x = -(\boldsymbol{u}_x \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla p_x + \frac{1}{Ra}\nabla^2 \boldsymbol{u}_x \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_y}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_y = -(\boldsymbol{u}_y \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla p_y + \frac{1}{Ra}\nabla^2 \boldsymbol{u}_y \tag{4}$$

ただし，下添え字 x，y は各方向への微分を表す。離散化は運動方程式 (2) が移流フェーズと非移流フェーズに分離され移流フェーズには CIP-FEM，非移流フェーズには双一次要素を用いた Galerkin 法，Possion 方程式の解法には GSMAC 法を用いる。非移流フェーズにおける時間進行では，CIP-FEM は時間に関して 4 次精度であるため時間精度を損なわないように，また，安定に解析を行うようにクランクニコルソン法を陽解法の予測子・修正子法で定式化したものを用いる。また，方向微分式 (3), (4) も同様に移流フェーズと非移流フェーズに分離して離散化される。

3. 双二次要素 GSMAC-FEM

一般に物理空間 (x,y) 系の二次の項 (x^2,xy,y^2) は計算空間 (ξ,η) 系 $(1,\xi,\eta,\xi^2,\xi\eta,\eta^2,\xi^2\eta,\xi\eta^2,\xi^2\eta^2)$ の一次結合で表される。九節点二次要素はこれらの双二次項を全て再現可能となるため物理空間 (x,y) での完全二次多項式は常に再現可能となっている。双二次要素 GSMAC-FEM では非線形性が強い対流項の離散化にこの双二次要素を用いることにより高精度化をはかる手法である。補間関数は次式で与えられる

$$N_\alpha = \left\{ \frac{1}{2}\left(1+\xi\xi_\alpha\right)\xi\xi_\alpha + \left(1-\xi_\alpha^2\right)\left(1-\xi^2\right) \right\} \tag{5}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2}\left(1+\eta\xi_\alpha\right)\eta\eta_\alpha + \left(1-\eta_\alpha^2\right)\left(1-\eta^2\right) \right\} \tag{6}$$

式中に用いられている ξ_α，η_α の値は表 1 に示す通りである。ここで α は要素内節点番号である。

双二次要素を対流項の離散化に用いる際，双一次要素を用いた場合と質量集中行列が異なるため，移流フェーズと非移流フェーズに分解される。

$$\frac{\check{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t} = -(\boldsymbol{u}^n \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} \tag{7}$$

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{u}} - \check{\boldsymbol{u}}}{\Delta t} = -\nabla p^n + \frac{1}{Re}\nabla^2 \boldsymbol{u}^n \tag{8}$$

Possion 方程式の解法は前出の CIP 法を用いる場合と同様，GSMAC 法を用いるため予測子ステップについてのみ示す。上流化手法として BTD 法 (8) を用いる。この手

Copyright © 2000 by JSCFD

法は非定常線形移流方程式を用いることによって時間微分項を評価し，時間の 2 階微分項を空間微分項で置き換えた BTD 項を付加する方法である。BTD 項は時間精度の向上のみならず流れの方向のみ粘性を加え，解析の安定化にも効果があるため数多く用いられている。

Table 1 Orthogonality

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ξ_α	-1	1	1	-1	0	1	0	-1	0
η_α	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	0

Table 2 Numerical conditions(Re=10000)

Mesh size	ΔL_{min}	Δt	ε
128×128	7.81×10^{-3}	5.00×10^{-4}	1.0×10^{-3}
256×256	3.91×10^{-3}	2.00×10^{-4}	1.0×10^{-3}

4. 解析条件

解析モデルは正方形キャビティであり，Re=10000，初期条件についてはキャビティ上面では $\boldsymbol{u} = 1$，その他は $\boldsymbol{u} = 0$ からのインパルシブスタート，境界条件として壁面上で滑りなしとした。解析格子は等分割格子を用いる。参照データとして GSMAC-CIP 法を用い一辺を 256 分割した格子を用いて解析した結果を採用し，このデータをもとに誤差の評価，物理量の保存性の議論を行う。詳細な解析条件を表 2 に示す。

5. 解析結果

5.1 Re=1000，Re=5000 の解析結果

まずはじめにこれまでの一連の研究について述べる。GSMAC-CIP 法では移流フェーズに CIP 有限要素法を用いるが，その有効性の検証として，対流項の離散化に双二次要素を用いた場合，また時間進行法については BTD 法，Adams-Bashforth 法を用いた場合の解析結果との比較を行った。非移流フェーズの検証は時間進行法の比較のみを行い，Euler 法を用いた場合と Crank-Nicolson 法を用いた場合を比較した。GSMAC-CIP 法と比較する手法で採用した対流項の空間の離散化手法，並びに，移流・非移流フェーズで用いた時間進行法を表 3 に示す。GSMAC-CIP 法は計算格子が少ない場合において高い収束性を示すことが分ったが，上流化を用いていない Q-AB，Q-CN の方が解析誤差が少ないという結果が得られており GSMAC-CIP 法の有効性が明確には示されていない [4]。しかし，$Re = 5000$ の場合は Q-N，CIP 以外は計算が不安定になり収束性を示すことができなくなった。そこで Q-N，CIP の比較を行い解析誤差の面で CIP の有効性を示す。解析誤差，収束性，保存性を議論するための参照データとして一辺を 512 分割し L-N で解析した結果を採用した。Fig.2 は中心軸上の速度について参照データからの誤差の分布を示したものである。全ての場合において CIP の方が解析誤差が小さいことがわかる。一辺の分割数が増加するにつれてその差は減少するが，これは次の収束性の議論により説明できる。

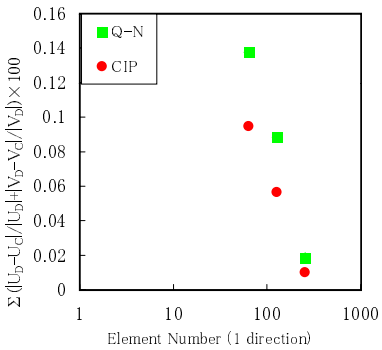


Fig.1 Convergency(Re=5000)

$$y = -0.0611ln(x) + 0.35 \tag{9}$$

$$y = -0.0856ln(x) + 0.497 \tag{10}$$

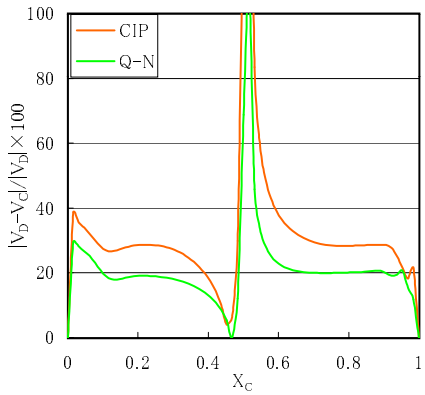
CIP 法は空間について 3 次精度，双二次要素は 4 次精度であるため Q-N の方が高い収束性を示す。そのことは Fig.1 により確認される。Fig.1 は，中心軸上の速度成分の誤差の総和を縦軸，一辺の分割数を横軸に設定したものである。式 (9)，(10) は CIP，Q-N のデータをもとに対数直線近似で求めた式である。Q-N の方が CIP より直線の勾配の絶対値が大きいことが分り，Q-N の方が高い収束性を示していることが示されている。しかし，解析を行った範囲では Q-N の高い収束性の効果により Q-N の方が解析誤差が小さくなることはなかった。以上のことより，これまでに行った格子分割数の範囲では Reynolds 数が大きくなるにつれて CIP-FEM の有効性が明らかになったと言える。

5.2 Re=10000 の解析結果

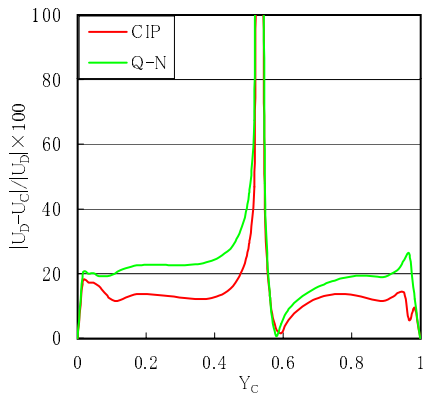
次に，これまでの研究を踏まえて更に条件を厳しくした $Re = 10000$ の場合についての解析を行い GSMAC-CIP 法の特徴を明らかにする。Fig.3 は本研究で用いた参照データである。一辺を 256 分割し，GSMAC-CIP 法を用いて計算した結果である。この条件における解析結果をもとに誤差の評価，保存性の議論を行う。Fig.4 は一辺を 128 分割し CIP，Q-N で解析した結果の中心軸上の速度分布である。両スキームともこの図を見る限りでは同程度の解析結果を示しているものと思われる。更に詳細な議論をするため Fig.5 に中心軸上の速度データ (U_c, V_c) について参照データ (U_D, V_D) からの相対誤差を表したものを示す。Fig.6 では最大約 15%，Fig.7 では最大約 20% の差で Q-N の方が解析誤差が小さいことが示されている。つまり，Re=10000 においては Q-N の方が解析誤差の面で良い結果を示し，Fig.2 の Re=5000 における解析結果と比較してその差は Re=5000 の場合よりも大きくなっていることが分る。

次に物理量の保存性について議論する。Fig.6 は Re=5000 Re=10000 において一辺を 128 分割した場合の全運動エネルギー (K) の経時変化を示したものである。(Re=5000 では参照データとして一辺を 512 分割した場合の解析結果を採用。また Re=5000 における他の格子分割数における解析結果ついては同様の結果を示しているので 128 分割した場合のみ示す。)Re=5000 では CIP の方が保存性が良いことが分る Re=10000 では Q-N の方が保存性が良い。Fig.7 は Re=5000 Re=10000 において参照データに対する全運動エネルギー (K) の割合を示したものであるが Re=10000 では Q-N(128 分割) は参照データとして採用した CIP(256 分割) と同等の保存性を示している。つまり今回示した Re=10000 における t=200 結果では CIP より Q-N の方が解析精度，保存性の面で Q-N の方が優れていることが分る。

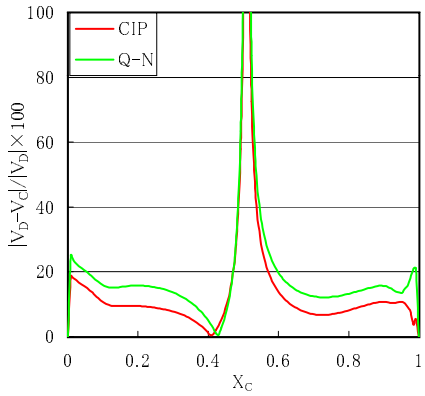
Copyright © 2000 by JSCFD



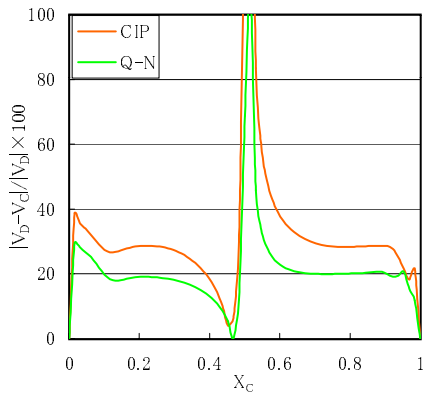
(a) x-direction (64×64)



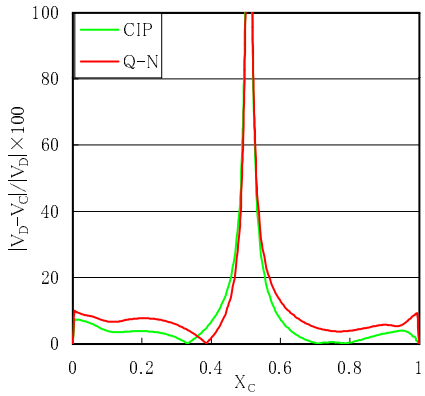
(b) y-direction (64×64)



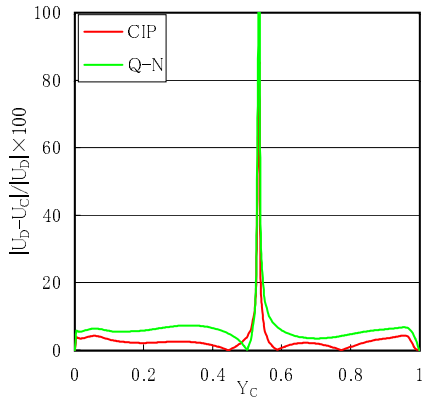
(c) x-direction (128×128)



(d) y-direction (128×128)



(e) x-direction (256×256)



(f) y-direction (256×256)

Fig.2 Relative error distributions of velocity on the center axes (Re=5000)

Copyright © 2000 by JSCFD

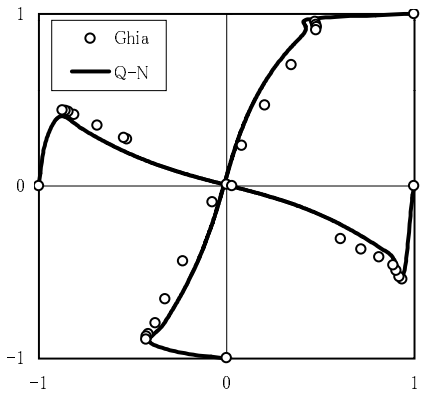


Fig.3 Reference Data (Re=10000)

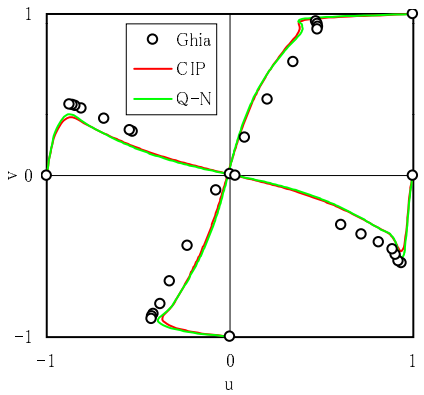
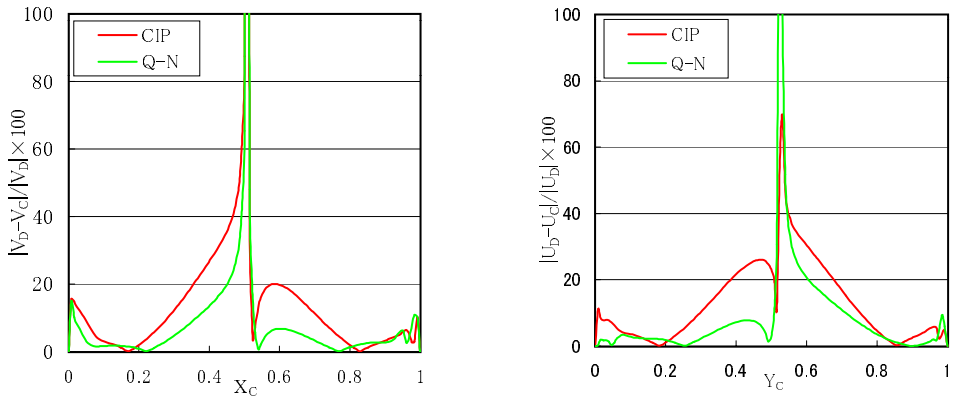


Fig.4 Velociy profiles(128×128)



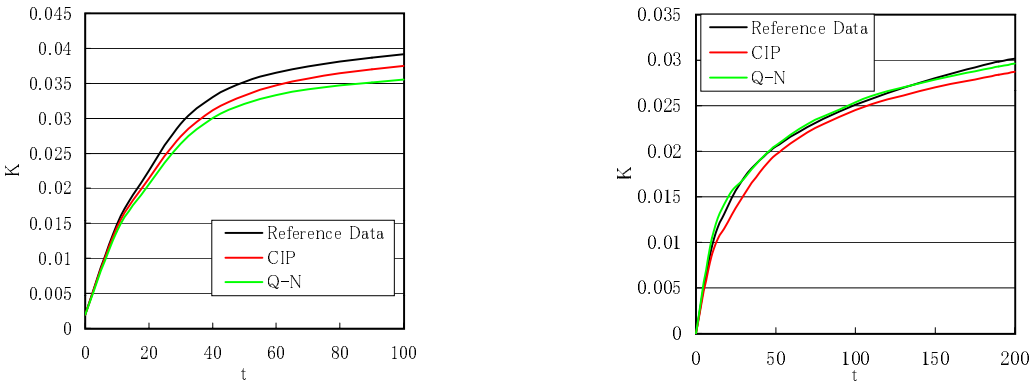
(a)x-direction (128×128) **(b)y-direction (128×128)**

Fig.5 Relative error distributions of velocity (Re=10000)

Table 3 Numerical Methods compared with GSMAC-CIP

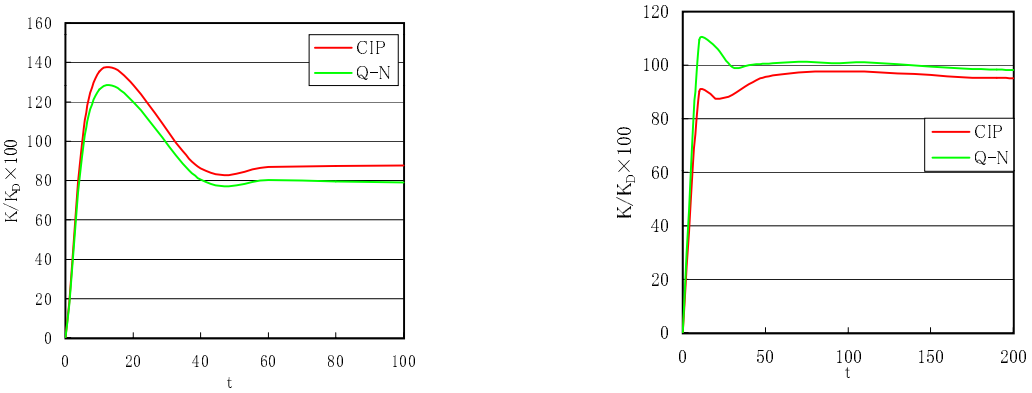
Numerical Methods	Discretization of convection term	Time merching methods				
		Advection phase			Non-advection phase	
		BTD	A-B	CIP	Euler	C-N
L-N	Linear	●	—	—	●	—
L-N	Linear	—	●	—	●	—
L-N	Linear	—	●	—	—	●
Q-N	Quadrilateral	●	—	—	●	—
Q-N	Quadrilateral	—	●	—	●	—
Q-N	Quadrilateral	—	●	—	—	●
CIP	CIP	—	—	●	—	●

Copyright © 2000 by JSCFD



(a) Re=5000　　(b) Re=10000

Fig.6 History of total kinetic energy



(a) Re=5000　　(b) Re=10000

Fig.7 Comparison of total kinetic energy

6．結言

本論文では正方形キャビティ内強制対流問題を通してGSMAC-CIP 法の格子依存性について，他の手法との比較とあわせて議論をした結果以下の結言を得た。GSMAC-CIP 法は Re=5000 の解析においては解析誤差，収束性，保存性の面で他の手法より優れていることが示されたが，Re=10000 の解析において無次元時刻 t=200 のデータをもとに解析誤差，保存性について議論した結果，いずれも，対流項の離散化に双二次要素を用い上流化手法として BTD 法を採用した手法 (Q-N) より劣っていることが分った。一般的に Re=10000 の流れは定常解が存在しないことが知られており，運動エネルギーの経時変化を見ても t=200 はまだ十分に流れが発達していないと思われる。また本論文では 128 分割した結果の比較しかしていない。したがって十分発達した時間での比較を行い，今回用いた参照データよりさらに分割数を増やした解析結果をもと解析誤差，収束性，保存性の議論をした段階でGSMAC-CIP 法の特徴は明らかになるといえる。

参考文献

1. T.Yabe and T.Aoki, *Comput. Phys. Commun.*, **66**, (1991), 21.
2. 棚橋, 流れの有限要素法解析, 朝倉書店.
3. 槇原, 慶應義塾大学博士論文, (1999).
4. 三好・槇原・棚橋, 計算工学講演会論文集, (2000), 141.
5. 三好・槇原・棚橋, 流体部門講演会講演概要集, (2000), 257.
6. Dukowicz,J. and Ramshow J., *J. Comput Phys.*, **32**, (1979), 71.

Copyright © 2000 by JSCFD