非構造解適合格子を用いた圧縮性・非圧縮性流体の統一解法

The Unified Numerical Method of Compressible and Incompressible Flow Using Unstructured Adaptive Mesh Refinement

髙橋　克明，慶応義塾大学大学院，〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail:takahasi@tana.mech.keio.ac.jp
棚橋　隆彦，慶應義塾大学，〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail:taka@mech.keio.ac.jp
Katsuaki Takahashi, Keio University, Hiyoshi3-14-1 Kohoku-ku Yokohama-shi
Takahiko Tanahashi, Keio University, Hiyoshi3-14-1 Kohoku-ku Yokohama-shi

On this paper, the unified scheme of compressible and incompressible flow using unstructured adaptive mesh refinement is proposed. To confirm the effectiveness of this scheme, bench mark problems are performed. The results show that this scheme is effective in compressible and incompressible flow both.

１．緒言

現在，固体・液体・気体を統一して扱える手法として CIP（Cubic-Interpolated Propagation）法[(1)(2)(3)]が注目を集めており，様々な複雑現象の解析に利用されている。CIP 法は有限差分法や四角形・六面体を用いた有限体積法，有限要素法などと共に使われる手法であり，複雑形状への適用を考えるとかなり限度がある。そこで CIP 法を三角形及び四面体へ適用した CIVA（Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates）法[(4)]を用いることで形状適合性に優れた汎用性の高い統一解析手法を構築することを目指す。この時，三角形及び四面体格子と相性の良い解適合格子法（Adaptive Mesh Refinement, AMR）を併用することで計算メモリの有効利用も考慮した手法とする。今回はまず，圧縮性流体と非圧縮性流体のベンチマーク問題をそれぞれ解析し，圧縮性・非圧縮性流体への手法の有効性を検証する。

２．計算手法

本手法では移流計算に粒子法を用いるため，支配方程式は移流項を除いた連続の式，運動方程式，圧力変動方程式及び速度の定義式である。CIVA 法では微分量も時間進行させる必要があるので式(1)を空間微分した式(2)も支配方程式に加える。

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} = \boldsymbol{g} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_x}{\partial t} = -(\boldsymbol{f}_x \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}_x \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} r \\ \boldsymbol{u} \\ p \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -r\nabla\cdot\boldsymbol{u} \\ -\dfrac{\nabla p}{r} + Q_{\boldsymbol{u}} \\ -r c_s^2 \nabla\cdot\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{u} \tag{4}$$

ρは密度，$\boldsymbol{u}$ は速度，p は圧力である。また c_sは音速を表し圧縮性流体では $c_s = \sqrt{(\gamma p/\rho)}$で，非圧縮性流体の場合は $c_s = 1.0\times10^{10}$ のような大きな一定値に設定する。また，運動方程式中の Q_u には粘性項，重力項，表面張力項などを含むことができる。γは比熱比で理想気体を仮定し $\gamma=1.4$ とする。

移流の解法には CIVA -Particle 法を，非移流項の解法には移動最小自乗法（Moving Least Square Method, MLSM ）を用いた分離解法とする[(5)]。非移流項の時間進行は陰的に行いその時に現れる圧力の Poisson 方程式は SOR 法によって解く。

非保存形の式を用いて衝撃波の解析を行う場合正しく解析を行うためには人工粘性の付加が必要となる。そこで以下のような N-R 型の人工粘性 q を圧縮場（ $\nabla\cdot u<0.0$）において圧力項に加える。

$$q = a\,r\left[\sqrt{\frac{gp}{r}}\left|\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right|L + \frac{g+1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2 L^2\right] \tag{5}$$

ここで αは定数，L は作用格子幅で MLSM における参照範囲半径を用いた。また，衝撃波のように物理量が急激に変化する部分において CIVA 法の三次関数補間を行うと数値振動を起こしてしまう。そこでそのような変化の激しい部分においては CIVA の補間関数を 1 次に落とすことで数値振動を抑制する。

３．解適合格子法（Adaptive Mesh Refinement, AMR）

圧縮性流体の非定常解析を行う場合，非定常に変化する衝撃波，接触面のような不連続を取り扱うこととなり，解析領域全体で高精度な結果を得るためには，どこに現れるかわからない不連続部を常に高精度に捉えるために領域全体に細かい格子を配置する必要がある。しかし，不要な部分にまで細かい格子を配置することで格子数が異常に増加しそれによって計算速度の低下，計算メモリの大量消費を招くことは望ましくない。そこで粗い初期格子を作成しておき計算に従って変化の激しい部分を検出しその部分にのみ細かい解析格子を集中させ，不要な部分の格子は初期の粗い格子に戻すことで最小限の格子数で高精度な解析を行うことができる AMR（h 法：格子の分割・削除を行う AMR）を用いる。実際，圧縮性流体の非定常解析において AMR の計算メモリの有効利用に果たす役割が非常に大きいことをこれまでに確認している[(6)]。

一般に，格子を細分化する場合細分化された格子と細分化されていない格子を繋ぐために分割方法が特異で且つ歪んだ格子となりやすい遷移格子が必要となる。これが AMR のプログラムを複雑にする要因の一つとして挙げられる。しかし三角形・四面体を解析格子として用いる場合，格子の最長辺で格子を二分割する Bisection 法（図 1）[(7)(8)]を用いることで遷移格子も含め全て格子二分割の操作で細分化が行えるため，特異な分割方法を要し形状が歪みやすい遷移格子の存在を避けることができ AMR のプログラムの簡単化及び格子形状の品質保持につながる。但し，格子形状に関しては初期格子に依存する面が大きいため高品質な初期格子とする必要がある。

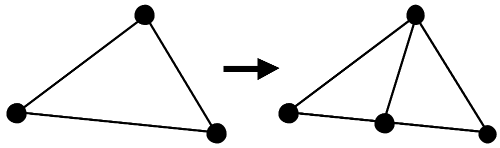


Fig.1 Bisection method

また，格子を細分化した際に生じる新しい節点の持つ値を精度良く求める必要があるが，細分化する格子内で CIVA 法の三次補間を行うことで物理量，微分量共に高精度に求めることができる。

格子の細分化及び不要な部分の初期格子への還元を判断する指針値として，圧縮性流体解析においては最も変化が複雑で圧縮性流体の現象を良くあらわす密度を用い，Löhner[9,10]の考案した式によって汎用性のある指針とする。一方，非圧縮性流体解析においては粘性流れの様子を良くあらわす消散関数を用いる。今回は消散関数を解析領域全体で計算し，最大値の何パーセントか以上の値を持つものを細分化格子の対象としたため汎用性のあるものではない。今後は非圧縮性流体の AMR においても Löhner の指針値のような汎用性のあるものを検討する必要がある。

４．解析結果

(1) まず本手法の圧縮性流体への有効性をみるためにベンチマーク問題として衝撃波管問題を行った。この解析では粘性項は考えないため運動方程式中の Q_u はゼロとした。

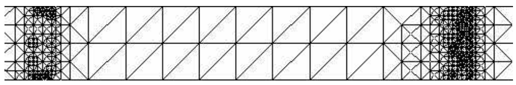


Fig.2 A Part of Analysis mesh

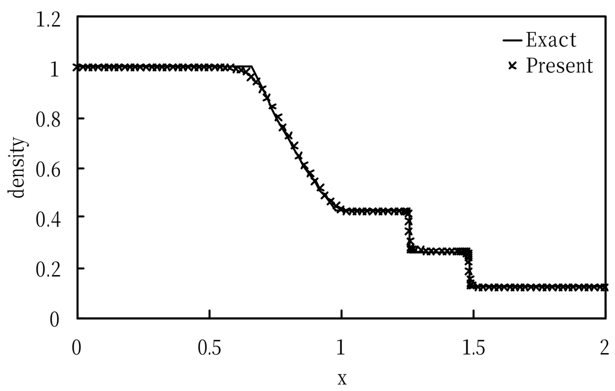
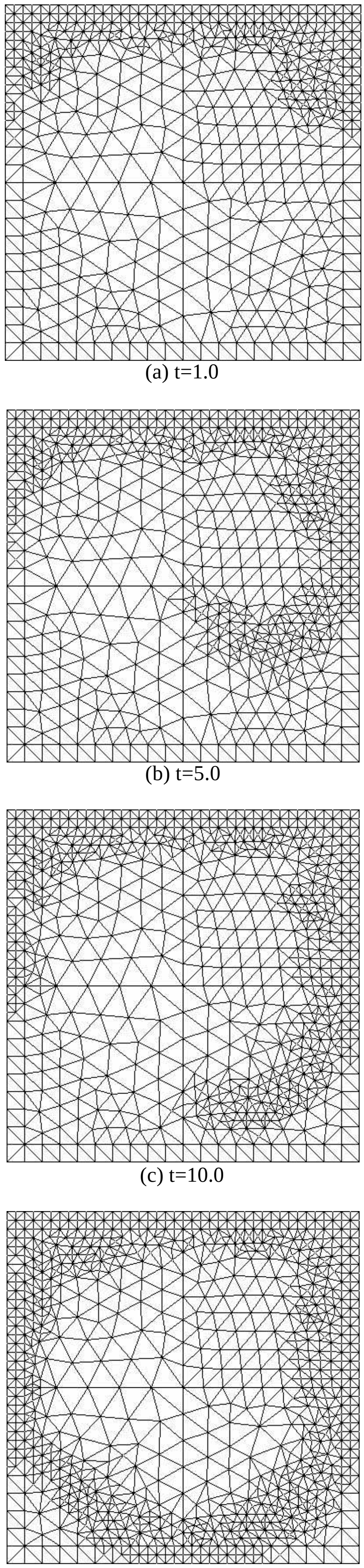


Fig.3 Density distribution

図 2 に解析格子の一部を示す。左側のメッシュ集中部が接触面，右側のメッシュ集中部が衝撃波に相当しており AMR が良好に作用していることがわかる。図 3 に示す密度分布を見ると厳密解と比較して良好な解析結果を得ていることが分かる。

(2) 次に非圧縮性流体への本手法の有効性をみるためにベンチマーク問題として正方 Cavity 内強制対流問題を Re=1,000 で行った。この解析では，運動方程式中の Q_u に粘性項を導入した。



(a) t=1.0

(b) t=5.0

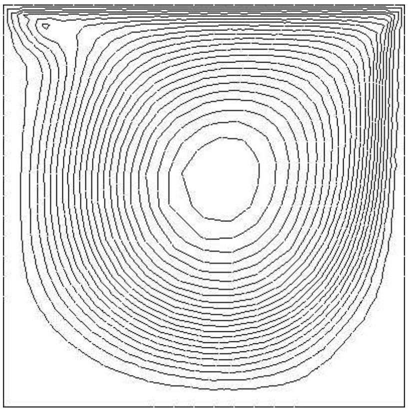
(c) t=10.0

(d) t=30.0

cell number:1,819 node number:979

Fig.4 Transition of analysis mesh

図4に示す解析格子の変遷を見ると主渦の移動に従いメッシュが変化しており AMR が良好に作用していることがわかる。流線図（図 5）を見ると主渦の部分は 129×129 の直行メッシュで行った Ghia ら[11]の結果と良好に一致していることがわかる。また，中心線上の速度分布（図 6）についても Ghia らの解析結果と良好に一致している。



(a) Present

(b) Ghia et al.

Fig.5 Stream lines

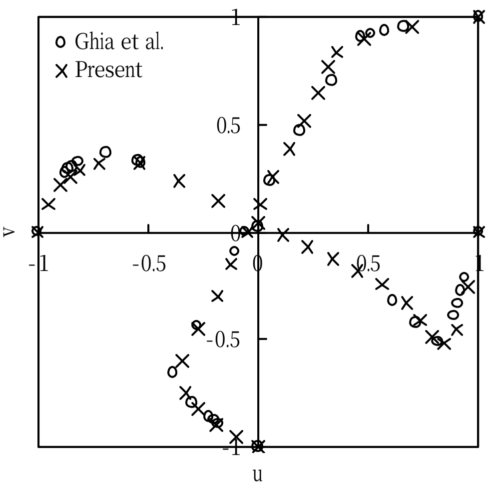


Fig.6 Velocity distribution on center axis

５．結言

三角形解適合格子を用いた圧縮性・非圧縮性流体の統一解析手法を構築し，圧縮性流体及び非圧縮性流体への手法の有効性をベンチマーク問題により検証した。

- 衝撃波管問題により圧縮性流体解析を行い良好な解析を行えることが分かった。
- 正方 Cavity 内強制対流問題（Re=1,000）により非圧縮性流体解析を行い良好な解析を行えた。
- AMR を消散関数を指針値として非圧縮性流体にも適用し良好に作用することがわかった。

参考文献

(1) T. Yabe and T. Aoki, “A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation Ⅰ. One-dimensional solver Ⅱ. Two and three-dimensional solvers,” Computer Physics Communications, **66**(1991), pp. 219-242.

(2) 矢部･肖, “固体・液体・気体の統一解法と CIP 法(1),” 日本数値流体力学会誌, **7-2**(1999), pp. 70-81.

(3) S. Y. Yoon and T. Yabe, “The unified simulation for incompressible and compressible flow by the predictor-corrector scheme based on the CIP method,” Computer Physics Communications, **119**(1999), pp. 149-158.

(4) N. Tanaka, “The CIVA method for mesh-free approaches: improvement of the CIP method for n-simplex,” Computational Fluid Dynamics Journal, **8-1**(1999), pp. 121-127.

(5) 松尾, “非構造格子型 CIP 法を用いた高速気流の数値解析（解適合格子法による複雑形状周りの解析スキームの開発）,” 慶應義塾大学修士論文, (1998 年度)

(6) 髙橋, “四面体解適合格子を用いた非定常衝撃波の数値解析” 計算工学講演会論文集, **5-1**(2000), pp. 161-164.

(7) D. Sharov and K. Fujii, “Three-dimensional adaptive bisection of unstructured grids for transient compressible flow computations,” AIAA-95-1708-CP

(8) K. Miyaji and K. Fujii, “Simulation of unsteady shock wave reflections using adaptive unstructured grids,” 15th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, (1996), pp. 334-339.

(9) R. Löhner, “An adaptive finite element scheme for transient problems in CFD,” Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, North-Holland, **61**(1987), pp. 323-338.

(10)R. Löhner, “Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems,” International Journal for Numerical Methods, **14**(1992), pp. 1407-1419.

(11)U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, “High-re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method,” Journal of Computational Physics, **48**(1982), pp. 387-411.