指数関数要素を用いる圧縮性自然対流のエネルギー保存スキーム

Numerical Scheme for Energy Conservation of Compressible Natural Convection Using Exponential Function Element

今村 純也, IMI 計算工学研究室（理研研究嘱託),
〒351-0114 埼玉県和光市本町 31-9-803,E-mail:jimamura@ra2.so-net.ne.jp
棚橋 隆彦, 慶大理工, 〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail:taka@mech.keio.ac.jp

Junya IMAMURA, IMI Computational eng.Labo., Honcho 31-9-803, Wako-shi, 351-0114 JAPAN
Takahiko TANAHASHI, Keio University, Hiyoshi 3-14-1, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8552 JAPAN

In order to solve the natural convection problem, we previously proposed a comparatively exact model based on a low Mach number approximation, in which the factor of compressibility was introduced. The characteristics of the model were to use Helmholtz decomposite element for velocity and to use exponential function element for positive physical values (temperature, density and pressure). In addition, a scheme for energy conservation of explicit values has been applied to the model. In this study, we applied an improved scheme to the model.

１．１．はじめに

高レーリー数・高温度差の熱対流問題には、厳密式に基づいて構築した圧縮性を考慮したモデルを用いる必要がある。このため既報[(1)(2)]で、低マッハ数流れに限定されるが、比較的厳密な近似モデルを提案している。

提案モデルの特徴は「流速を Helmholtz 分解表示」する点と「正の物理量に指数関数要素を適用」する点にある。

流速を Helmholtz 分解表示することによりせん断流とポテンシャル流の物理的特徴が素直に反映できる。例えば、ポテンシャル流の壁面すべり条件が容易に表現できることなどである。

また、正の物理量に指数関数要素を適用することにより状態方程式の対数微分の線形関係が素直に反映される。これにより、例えば密度分布を容易に求め得る。

昨年度には平均流加速度を時間ステップｎ断面での運動量釣り合いから求めた。また、「エネルギー保存手法」についても同様にｎ断面での値を保存する案を示した。

本稿では、別稿（E07-2）で非圧縮流について示したｎ+1 断面での釣り合いから平均流加速度を求める方法を適用する。ただし、ここで適用するｎ+1 断面で解く方法は陰解法とは異なり、反復計算を必要としない。

また、より高レーリー数・高温度差の問題に対応するために、エネルギーについてもｎ+1 断面で保存する手法を示す。

高温度差の問題では、加熱初期において温度分布が急変する。したがって密度も急変する。このためポテンシャル流は無視できず、質量の式を満足させるために壁面すべり条件でポアソン方程式を解く必要がある。しかし、連立方程式右辺は時間軸に関する数値微分を含むので数値誤差を伴い易く、安定した計算を困難とする。

これに対応するためには、数値微分の振動誤差を抑えるような物理的にマクロなモデル化が必要となる。本研究でのエネルギー保存スキームは、弱解としてエネルギーを保存するよう平均流・平均温度分布を補正し、かつ平均化によって安定した計算を図るものである。

２．方　法

昨年度示した近似式の誘導を 2.1～2.4 に再掲（一部修正）する形で示し、2.6 以降に改良したスキームを示す。

２.１ 基礎方程式

質量の式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) = 0 \qquad (1)$$

運動方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j U_i - \tau_{ij}) + \frac{\partial P}{\partial x_i} + f_i = 0 \qquad (2)$$

熱平衡式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_v T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j C_v T - K\frac{\partial T}{\partial x_j}) + \rho P \frac{D}{Dt}(\frac{1}{\rho}) - \Phi_D = 0 \qquad (3)$$

状態方程式：

$$P = \rho R T \qquad (4)$$

ただし、密度 ρ，ｉ方向流速 U_i，粘性応力 τ_{ij}，圧力 P，i 方向物体力 f_i，定容比熱 C_v，温度 T，熱伝導率 K，散逸率 Φ_D，気体常数 R

２.２ 流速の表現

流速は Helmholz 分解してベクトルポテンシャル ψ_i とスカラーポテンシャル ϕ で表示する。

$$U_i \equiv \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x_{i-1}} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad (5)$$

ここに，*(i=1,2,3)(i+1=2,3,1)(i-1=3,1,2)*

また、非圧縮粘性流 α_i と渦なしのポテンシャル流 β_i に分け，$U_i = \alpha_i + \beta_i$ でも表現する。

２.３ 指数関数要素

常に正の値をとる P，ρ，T はべき乗式 q，r，h を指数部とする指数関数で表現し、q，r，h を有限要素モデルで離散化する。

$$P = \exp(q), \qquad \rho = \exp(r), \qquad T = \exp(h) \qquad (6)$$

これにより状態方程式の対数微分（時間または空間）は線形式(7)となる。

$$q' = r' + h' \qquad (7)$$

Copyright © 2000 by JSCFD

2.4 近似式

低マッハ数流れを対象とし「圧力による密度変化はない」と仮定する。したがって圧力の波動成分は無視し、エネルギー式を解くに際して圧力の空間変動は無いと仮定する。圧力の時間変動は系全体の平均値が状態方程式を満足するよう初期値を補正する形で求める。

また、運動方程式に現れる圧力はエネルギーとは別途に、ポアソン方程式を解いて適用する。よって、以下ではエネルギー式に現れる圧力を P_0，運動方程式に現れる圧力を単に P と記して区別する。

仮定より状態方程式の対数微分は $r' = -h'$ となるので、これを(3)式に適用し、かつ非保存形に整理すれば(8)式となる。

$$(\rho C_v T + P_0)\frac{Dh}{Dt} - K\nabla^2 T - \Phi_D = 0 \qquad (8)$$

$P_0 = \rho RT$ であるから，(8)式第１項は $(\rho C_P T)\dfrac{Dh}{Dt}$ または $(\dfrac{C_P P_0}{R})\dfrac{Dh}{Dt}$ となり、定圧比熱を用いた熱平衡式から圧力を省略したものに等しい。

これをさらに整理し，かつ、運動方程式も非保存形に整理すれば、適用する近似式は(9)～(12)式となる。（C_P は定圧比熱，P_0 は圧力初期値。ρ_0 は密度初期値。添え字なしはいずれも平均流を表す。）

後述の便宜上、運動方程式は(9)式で、エネルギー式は(10)式で表わしておく。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = F_i \qquad (9) \qquad\qquad \frac{\partial h}{\partial t} = H \qquad (10)$$

ここに，F_i，H は次のとおり（Φ_D は無視）。

$$F_i \equiv -U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\{\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{\kappa}\tau_{ij} - \gamma_{ij}) - \frac{\partial P}{\partial x_i} - f_i\}$$

$$H \equiv -U_j\frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{R}{C_P P_0}\frac{\partial}{\partial x_j}(e^{\lambda}K\frac{\partial T}{\partial x_j} - \theta_j)$$

圧力ポアソン方程式は(11)式、質量保存式は(12)式となる。

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = -\rho\frac{DU_i}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}(e^{\lambda}\tau_{ij} - \gamma_{ij}) - f_i \qquad (11)$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{Dr}{Dt} \qquad (12)$$

上記で、F_i，H に含まれる κ，γ_{ij}，λ，θ_j はエネルギーを保存するため平均流に加えた補正項および補正関数で、その導出過程は後述する。いずれもシミュレーションの初期値はゼロとする。

2.5 適用要素

補正項 κ，γ_{ij}，λ，θ_j には双１次矩形要素を適用し、それ以外の物理量 ψ_i，ϕ，h，r，P には双３次矩形要素を適用する。

2.6 流速の増分

時間ステップｎ断面の状態量を既知とすれば、要素内離散点で(9)式および(10)式の右辺 F_i および H を求めることができる。したがって、これらを時空要素内の変化率としてｎ+1断面の流速および温度を得る。これを U_i^{ex}（$=U_i^n + \Delta t F_i$），h^{ex}（$= h_n + \Delta t H$）と記す。しかし、非線形項の存在によりいずれも空間的に高次となり、これを要素の基底関数で表現することはできない。

そこで、U_i^{ex}，h^{ex} を何らかの方法で平均化して有限要素で表現した値を U_i^{n+1}，h^{n+1} と記す。平均化は一般に運動量が保存されるよう行うが、エネルギーやエントロピーは必ずしも保存されていない。

2.7 エネルギーの保存

そこで求めた平均流をエネルギーを保存するよう補正する。ただし、ここで保存するエネルギーは真の値ではなく、U_i^{ex}，h^{ex} を用いて計算されるエネルギーを指す。

エネルギーの保存に先立ち、まずエントロピーを保存するよう補正関数 λ および κ を求める。λ, κ は(13)式を有限体積法で解いて求める。ただし、Ａは検査領域。

$$\int_A \underline{\underline{e^{\lambda}}}\frac{\Phi_D^{n+1}}{T^{n+1}}dA + \int_A \underline{\underline{e^{\kappa}}}K(\frac{\partial h^{n+1}}{\partial x_i})^2 dA = \int_A \frac{\Phi_D^{ex}}{T^{n+1}}dA + \int_A K(\frac{\partial h^{ex}}{\partial x_i})^2 dA \qquad (13)$$

次いで、エネルギーを保存するため補正項 γ_{ij} および θ_j を(14)式を同様に有限体積法で解くことで求める。

$$\int_A(\rho U_i^{n+1}U_j^{n+1} - e^{\lambda}\tau_{ij}^{n+1} + \underline{\underline{\gamma_{ij}}})dA + \int_A(\frac{C_P P_0}{R}U_j^{n+1}h^{n+1} - K\frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_j} + \underline{\underline{\theta_j}})dA = \int_A(\rho U_i^{ex}U_j^{ex} - \tau_{ij}^{ex})dA + \int_A(\frac{C_P P_0}{R}U_j^{ex}h^{ex} - K\frac{\partial T^{ex}}{\partial x_i})dA \qquad (14)$$

2.8 初期値および平均圧力の更新

流速はゼロとし、初期温度 T_0，平均密度 ρ_0 を既知とする。圧力分布と密度分布は運動方程式と状態方程式を同時に満足するよう設定する必要がある。ここでは気体を想定し、密度および圧力変化は小さいものとする。そこで、系全体で ρ_0 は一定として、状態方程式を満足するよう P_0 を定める。

その近似誤差を埋めるため物体力を $f_i = g_i(\rho - \rho_0)$ として、運動方程式が満足されるよう設定する。

時間進行に伴い ρ は、後述のように、質量が保存されるよう補正される。そこで、P_0 はあくまでも系全体の ρRT が保存されるよう時間ステップごとに補正する。

2.9 平均流

補正項を求めるに先立っては平均流を求めておく必要がある。平均流は補正項の値がなるべく小さくなり、かつ計算負荷も少ない方法が望ましい。検討の結果、連立方程式を次の順序で組み立てて近似的に解くこととした。

(1) ｎ断面の圧力

圧力は(11)式を最小二乗法で解いて運動量を保存するよう求める。その際、加速度には反復計算を避けるためｎ-0 断面

Copyright © 2000 by JSCFD

の値を適用する。

これによりせん断流加速度は$(\rho-\rho_0)\partial\alpha_i/\partial t$が考慮され、$\beta_i$は一旦圧力勾配に変換されるが、結果としてｎ-0 断面の値で外挿した値がU_i^{ex}に含まれることとなる。

(2) 温度変化率

(10)式右辺に(15)式のH^{ex}を代入し、ガレルキン法で解いて求める。ただし、検査領域での残差平均ゼロ（有限体積法）を制約条件とする。すなわち、残差分散が最小、かつ平均ゼロの解を求める。

$$H^{ex} \equiv -\frac{C_P P_0}{R} U_j^{ex} h^{ex} + K\nabla T^{ex} \qquad (15)$$

(3) ｎ+1 断面の密度

密度には境界条件がないので$\partial r/\partial t$のノード未知数に$-\partial h/\partial t$のノード値を代入することで求まる。

しかし、系全体の温度が上昇しても閉空間では初期質量は変化しないので、質量を保存するよう系全体で補正する。

この結果を受けて、前述したようにP_0も補正する。

(4) ｎ+1 断面のポテンシャル流

(12)式右辺に外挿値U_i^{ex}と(3)節で求めたｒを代入してガレルキン法で解いて求める。ただし、(2)節同様有限体積法を併用して検査領域での残差平均をゼロとする。

(5) ベクトルポテンシャル加速度

(16)式の右辺を与え、ガレルキン法で解いて求める。

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\beta_i}{\partial t} - U_j^{ex}\frac{\partial U_i^{ex}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho^{n+1}}\left(\frac{\partial\tau_{ij}^{ex}}{\partial x_j} - \frac{\partial P^n}{\partial x_i} - f_i^{n+1}\right) \qquad (16)$$

圧力勾配には近似的にｎ断面の値を代入し、$1/(\rho-\rho_0)$の分布を反映させた。

２.８ 上流化

上流化は既報[4]の方法によった。すなわち、要素辺平行方向をsとし、辺に垂直方向流速をVとする(17)式の右廻り線積分項を(15)式の積分時に加えることで達成する。

$$\text{上流化項} = -\Delta t\oint_S \left(V^{ex}U_i^{ex}\frac{\partial h^{ex}}{\partial x_i}\right)ds \qquad (17)$$

(17)式は$U_i^{ex}\dfrac{\partial h^{ex}}{\partial x_i}$の要素間境界における不連続性を捉え、辺に沿う微小面積$|\Delta t V^{ex} ds|$分の当該要素の値を同面積の上流要素の値で置き換えて上流化を図るものである。

α_iを求めるに際しても同様に処理する。

３．数値計算例と考察

熱対流問題のベンチマークテストとして欠かせないサーマルキャビティを数値計算し、検討経過を考察する。

ただし、今回計算にはエントロピーの補正は行なわず、$\lambda=0$, $\kappa=0$としてγ_{ij}およびθ_jを求めた。

３.１ ケース設定

代表流速は Boussinesq 近似の浮力と粘性力の釣合から定め、無次元流れ場を *Ra*（レーリー）数と *Pr*（プラントル）数で特徴付ける。

圧縮性流体ではさらにρ/ρ_0を特徴付ける必要があるが、本モデルではρとTの間に双曲線関係があるので、無次元表示式に温度上昇率$\Delta T/T_0$が陽に表れる。そこでこれをケース分けする。

Ra 数は比較的小さい1×10^6と比較的高い1×10^8の２通りとし、温度上昇率$\Delta T : T_0$は１：10 とその 10 倍の１：１を選び，次の３ケースとした。

ケース１．*Ra* 数＝1×10^6，$\Delta T : T_0$＝１：10
ケース１．*Ra* 数＝1×10^6，$\Delta T : T_0$＝１：１
ケース１．*Ra* 数＝1×10^8，$\Delta T : T_0$＝１：１

Pr 数=0.71 としたほか，比熱比=1.40，C_P =1.0，ρ_0 =1.0 とした。また、体積粘性率はゼロと仮定した。

要素数は *Ra* 数=1×10^6では不等分割 30×30 要素（壁面に沿って 5 列を 1/50 幅、その他を 1/25 幅×20 で分割）とした。

Ra 数=1×10^8では不等分割 40×40 要素（壁面に沿って 5 列を 1/100 幅、その他を約 1/33.3 幅×30 で分割）とした。

３.２ 計算過程の考察

(1) 加熱速度について

数値計算上困難を伴うのはポテンシャル流の計算である。その原因ははじめに述べたように、加熱速度にある。加熱方法は、まず系全体を T_0 に初期設定し、高温壁を $T_0+\Delta T$ に加熱する方法によった。

そこで$\Delta T : T_0$＝１：１のケースで、高温側壁面温度を 10,000 ステップ（変化率一定）かけて $T_0+\Delta T$ の定常状態に達するよう加熱した。$\Delta T : T_0$＝１：10 のケースでは 1,000 ステップとした。

加熱速度は当然時間ピッチΔｔにも依存するが、Δｔはケースにより試算しながら発散しない程度に定めた。

加熱速度が数値誤差としてまず表れるのは温度分布である。系内の温度は常に $T_0 \leqq T \leqq T_0+\Delta T$ となる必要があるが、少ない自由度でこの条件を数値的に完全にクリアーすることはかなり難しい。

誤差を一定値以下に抑えるためには、過渡状態を見る目的のシミュレーションでなければ、加熱速度を緩慢にすることである程度目的を達成することができる。

なお、シミュレーション目的によっては加熱方法として、まず系全体を $T_0+\Delta T/2$ に初期設定して高温壁を $T_0+\Delta T$ に加熱し、低温壁を T_0 に冷却する方法がある。少なくとも温度差の小さいケースでは、どちらの方法によっても定常状態に達したときには同じ状態を得るようモデルが組み立てられていなければならない。本モデルではP_0を常に状態方程式を満足するよう補正し、初期値に依存しないモデルとしていることから、この条件に整合している。

(2) ポテンシャル流の算定手法について

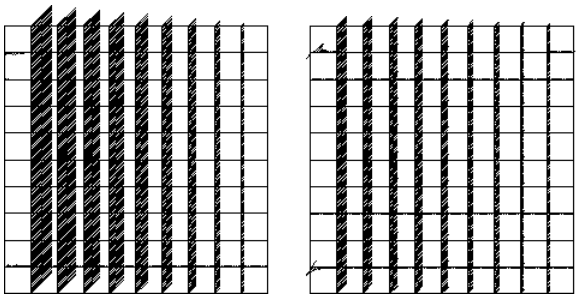
昨年度報告では、ポテンシャル流の算定方法として(12)式右辺に温度拡散項を代入する案を示した。今回これを原式のとおりrの実質微分で算定するものとした。前者との違いは一旦ｈの境界条件を入れているという点にある。

両者の違いを、高温度差で拡散項の大きいケース２の初期過渡状態で数値的に比較した。ただし、違いをズーミングするために他のケースとは異なり、Δｔ=1/10 としてｎ=100 でΔT=1 に達するよう温度を上げ、ｎ=500 の値を示す。

結果をβ_iのプロファイルで示す。Fig.1 はβ_1をｘ軸平行線上に、β_2をｙ軸平行線上にいずれも 45°方向にプロットしている。Fig.2 は逆にβ_2をｘ軸平行線上、β_1をｙ軸平行線上とした。

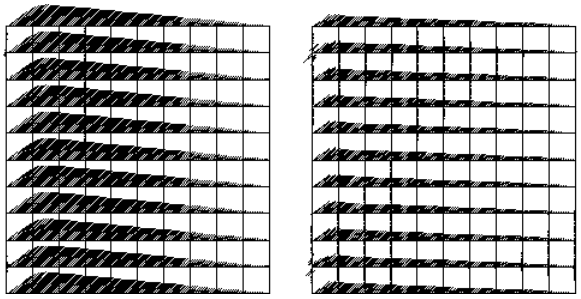
Copyright © 2000 by JSCFD

いずれも左側の(a)図が今回案であり、(b)図が温度拡散項を用いた結果である。これより、拡散項を用いる方法は誤差を含むことが判る。



(a) applied Dr/Dt　　(b) applied $(R/C_P P_0)K\nabla^2 T$

Fig.1 profiles of β_i (plotted β_1 on y-lines, β_2 on x-lines)



(a) applied Dr/Dt　　(b) applied $(R/C_P P_0)K\nabla^2 T$

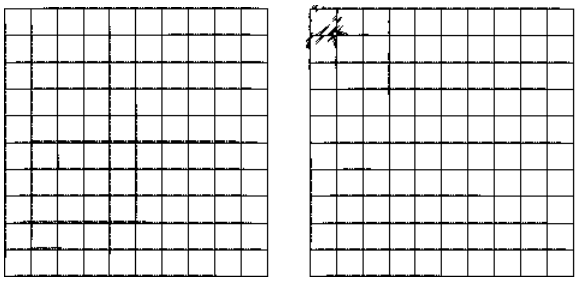
Fig.2 profiles of β_i (plotted β_2 on y-lines, β_1 on x-lines)

(2) $\nabla^2\phi$に対する有限体積法併用について

ガレルキン法のみではφのポアソン方程式を安定的に解くことはできなかった。そこで、前述のように有限体積法を併用して解決した。その例を Fig.3 および Fig.4 に示す。

β_i の絶対値そのものは大きな値ではないが、その誤差が α_i の成長に影響を与えていることが分る。

なお、ポアソン方程式への有限体積法併用は非圧縮流体の圧力解法でも適用（別稿 E07-2）している。

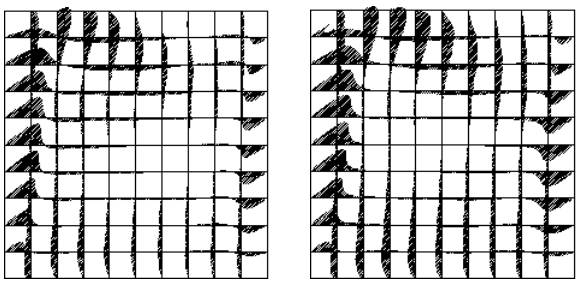


with control volume　　without control volume

$t=1.915\times10^4$　　$t=1.715\times10^4$

$Ra=1\times10^6$, $\Delta T:T_0=1:1$

Fig.3 profiles of β_i (plotted β_2 on y-lines, β_1 on x-lines)



with control volume　　without control volume

Fig.4 profiles of α_i (plotted α_1 on y-lines, α_2 on x-lines)

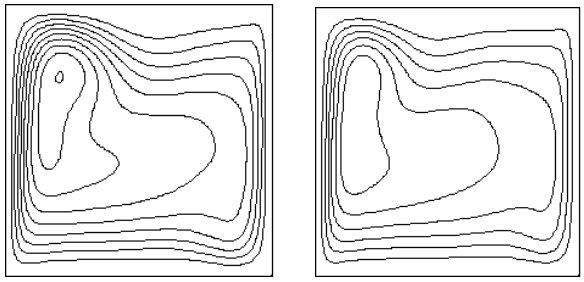
(3) γ_{ij} , θ_j および ϕ の影響

ケース２で各変数を無視することによるせん断流への影響を調べた。結果を $t=6.14\times10^4$ のψのコンターで比較する。

まず、すべての変数を考慮したケースを 2-1 とし、３変数を無視したケースを 2-4 とする。2-4 のケースは Boussinesq 近似に近い非圧縮モデルであるが、密度変化は浮力項のほか拡散項にも考慮されている。

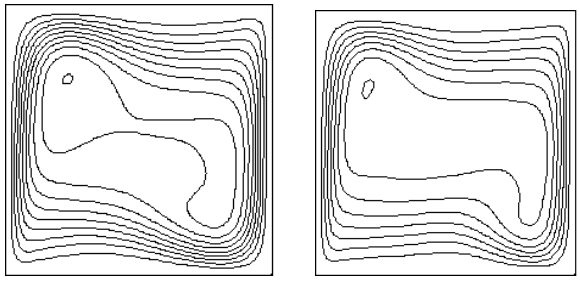
上記の２ケースを両極端とし、その中間的な γ_{ij} , θ_j を省略したケースを 2-2 とし、ϕ のみ省略したケースを 2-3 として比較する。ただし、この２ケースはいずれもケース 2-1 の $t=1.915\times10^4$ の状態を初期値とした。

ϕ の有無に差はかなりあり、無視できないと言える。



case 2-1 $F_i(\psi,\phi,\gamma_{ij},\theta_j)$　　case 2-2 $F_i(\psi,\phi,\cdot,\cdot)$

$T_0=1.461$　　$T_0=1.456$



case 2-3 $F_i(\psi,\cdot,\gamma_{ij},\theta_j)$　　case 2-4 $F_i(\psi,\cdot,\cdot,\cdot)$

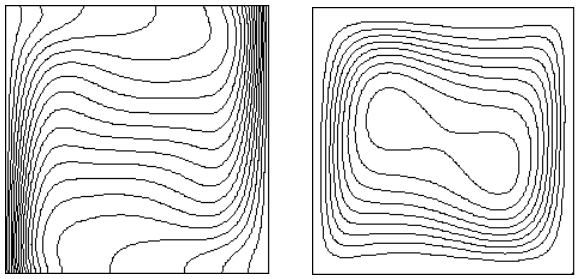
$T_0=1.486$　　$T_0=1.481$

Fig.5 contours of ψ in case 2

(4) 低レーリー数・低温度差での対称性について

Boussinesq 近似の解は対称性を示すことが知られている。本モデルでも Boussinesq 近似が適用できるような低レーリー数・低温度差の問題ではこの特徴を示すはずである。

そこでケース１に ϕ を入れず、かつ γ_{ij} , θ_j も入れずに定常状態まで計算した。



T distribution ($T_0=1.050$)　　ψ distribution

$F_i(\psi,\cdot,\cdot,\cdot)$, $Ra=1\times10^6$ $\Delta T:T_0=1:10$ $\Delta t=1/10\sim5$

Fig.6 contours of T and ψ in case 1

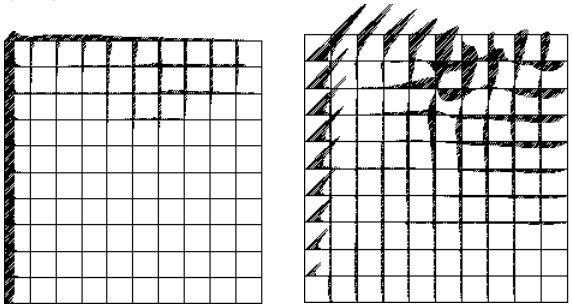
結果はこの特徴をよく表わしていると言える。非対称性はφの存在のほか、温度等に対する指数関数の適用によっても生じ、かつ高温度差で顕著になるはずである。これは Fig.5

Copyright © 2000 by JSCFD

からも読み取れる。

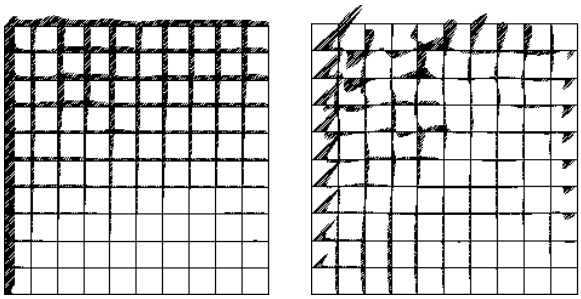
(6) ケース３の過渡状態

以上の変数に対する定性を踏まえ、その総合としてケース３の経過を温度および流速のプロファイルの形で次に示す。



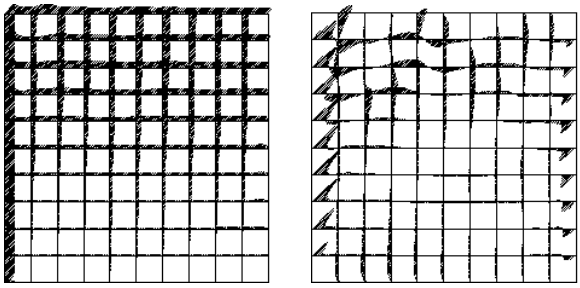
Profile of T　(T_0=1.066)　　profile of U_i

(a)　t=0.10×10^6 (n=10000)



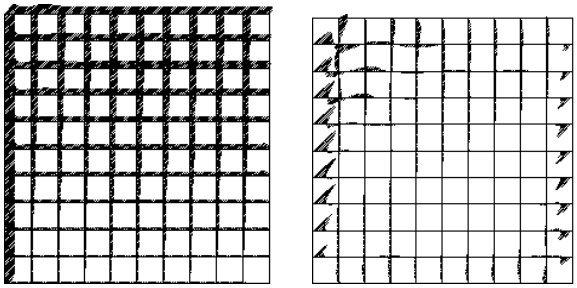
Profile of T　(T_0=1.243)　　profile of U_i

(b)　t=0.30×10^6 (n=20000)



Profile of T　(T_0=1.358)　　profile of U_i

(c)　t=0.53×10^6 (n=31500)



Profile of T　(T_0=1.443)　　profile of U_i

(d)　t=1.10×10^6 (n=60000)

Fig.7 profiles of T and U_i　in case 3

(plotted U_1 on y-lines, U_2 on x-lines)

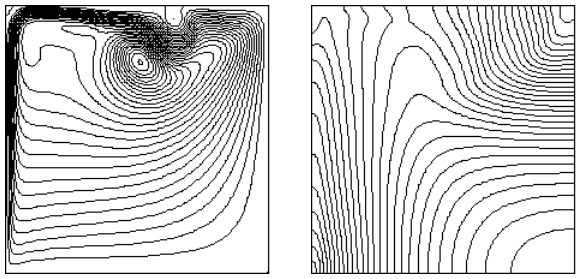
Fig.7(a)は高温壁の温度上昇が完了した時点であり、高温壁に沿った上昇流は活発であるが、他の図に見られる低温壁側に沿った下降流はまだ生じていない。

Fig.7(d)は系全体の平均温度が T_0=1.443 に上昇した状態である。定常状態では T_0=1.5 前後になると予想される。

$(T^{n+1}-T^n)/(\Delta t\, T^{n+1})$ =0.324×10^{-7}であり、かつこの値は漸減しているので、定常状態に至るにはシミュレーションをまだかなりの時間継続する必要がある。

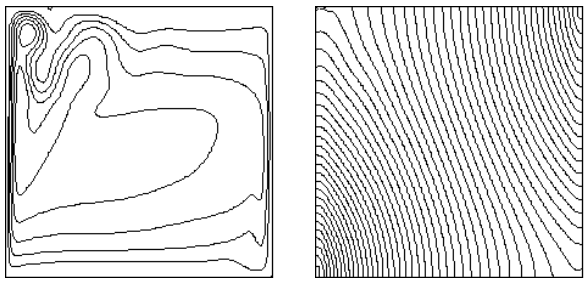
Fig.7(a)および(d)の状態をコンター図等で示せば fig.8 および Fig.9 のとおりである。

Fig.7 の U_i に含まれている β_i は、絶対値そのものが小さいのでほとんど識別できない。そこで拡大して示した。



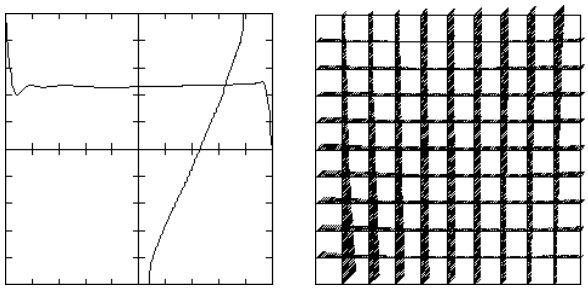
contour of ψ(@1×10^{-7})　　contour of φ(@1×10^{-8})

Fig.8 state at t=0.10×10^6 (n=10000) of case 3



contour of ψ(@1×10^{-7})　　contour of φ(@1×10^{-8})

T_0=1.443　　t=1.10×10^6 (n=60000)



profiles of (T-1) on geometric center lines　　profiles of β_i×20 (plotted β_1 on y-lines, β_2 on x-lines)

Fig.9 state at t=1.10×10^6 (n=60000) of case 3

５．まとめと今後の課題

圧縮性熱対流の外挿値のエネルギー保存手法を提案し、比較的高レーリー数かつ高温度差の２D サーマルキャビティで数値的に検討した。

検討の結果、高温度差ではポテンシャル流は絶対値はかなり小さいにも関わらず無視できないことを確認した。

また、高レーリー数・高温度差では、既に指摘されているように、非対称性がかなり極端になることを示した。

参考文献

(1) 今村，棚橋，"指数関数要素を用いる閉空間における熱対流の近似解法，" 第 12 回数値流体力学講演論文集, (1998), pp. 329.

Copyright © 2000 by JSCFD

(2) 今村, "指数関数要素を用いる閉空間における熱対流の近似解法,－boussinesq 近似に依らない自然対流問題の解法－" 日本建築学会関東支部研究報告, (1999), pp. 229.
(3) 今村, 棚橋, "高次外挿法による圧縮性熱対流の近似解法," 第 13 回数値流体力学講演論文集, (1999).
(4) 今村, "C_1 連続な FEM モデルの非圧縮流体への適用", 第 11 回数値流体力学講演論文集, (1997), pp.567
(5) Mlaouh, 辻, 長野, "温度差の大きい閉空間における熱対流" 日本機会学会論文集（Ｂ編）, (1996-2), pp. 364.
(6) 白石・村上・加藤・石田, "圧縮性高浮力流れの数値解析に関する研究／高温・高浮力流解析における基礎方程式", 1997 年度日本建築学会関東支部研究報告集, (1997), pp.293

Copyright © 2000 by JSCFD