

変形ガレルキン法による水平二重円管内自然対流問題の解析

Modified Galerkin Analysis for Natural Convection Problems in a Concentric Horizontal Annuli

宇仁 真彦, 信大院, 〒380 - 8553 長野市若里 4 - 17 - 1, E-mail: cslab05@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 松田 安弘, 信大工, 〒380 - 8553 長野市若里 4 - 17 - 1, E-mail: matsuda@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 邵 長城, 信大工, 〒380 - 8553 長野市若里 4 - 17 - 1, E-mail: cslab01@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 吉野 正人, 信大工, 〒380 - 8553 長野市若里 4 - 17 - 1, E-mail: masato@gipwc.shinshu-u.ac.jp
 Masahiko Uni, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan
 Yasuhiro Matsuda, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan
 Changcheng Shao, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan
 Masato Yoshino, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano City, 380-8553 Japan

In our previous research, the MSR method, which is a combination of the modified Galerkin method and the SIMPLER formulation, was proposed as an efficient method for the analyses of viscous fluid flows and natural convections in cavities. In this study, the MSR method is applied to the three-dimensional natural convection problems in concentric horizontal annuli for a Rayleigh number of 4.70×10^4 . The bilateral symmetric steady solution is obtained using non-uniform meshes of $60 \times 20 \times 30$, and the distributions of temperature and velocity and average Nusselt number agree well with other research works.

1. 緒言

誤差解析手法を用いて提案した有限要素法の一つである変形ガレルキン法(MGM)では, 移流項と拡散項に誤差解析手法による補正方式を導入することにより離散化精度を向上させた。また移流項を陽的に取り扱いマトリックスを対称化することによって計算時間の短縮を実現している。著者らはこの MGM 法と Patankar らによる SIMPLER 法とを組み合わせた MSR 解法を開発したが, その有効性はキャビティ内での自然対流を解析した過去の研究結果により示されている⁽¹⁾。

本研究では, 水平二重円管内の流体が内管壁により加熱され, 同時に外管壁により冷却された場合の自然対流現象の解析を行った。特に $Ra=4.70 \times 10^4$ の場合での流速と温度の分布や内管壁と外管壁における平均 Nusselt 数について他の研究結果と比較・検討することにより本スキームの有効性について考察した。

2. 基礎式

三次元熱流動の基礎式として, 連続の式, ブジネスク(Boussinesq)近似による浮力項を考慮したナビエ・ストークス(Navier-Stokes)方程式およびエネルギー方程式の無次元形を用いる⁽²⁾。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Ra} \text{Pr} T \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (3)$$

ここで,

$\mathbf{u}$: 速度ベクトル, $\mathbf{j}$: y 方向の単位ベクトル,
 T : 温度, p : 圧力 / 密度,
 Ra : レーリー(Rayleigh)数($=\text{Pr} \times \text{Gr}$),
 Pr : プラントル(Prandtl)数($=\nu / \alpha$),
 Gr : グラスホフ(Grashof)数($=g \beta \Delta \theta L^3 / \nu^2$),

t : 時間, ν : 動粘性係数, α : 温度伝導率,
 g : 重力加速度, β : 体膨張係数, L : 代表長さ
 であり, Re (: Reynolds 数) での代表速度を温度伝導率と代表長さとの比とすることにより, $\text{Re} \times \text{Pr} = 1$ となる。

3. MSR 解法による定式化

流速と圧力を求める計算では SIMPLER 法⁽³⁾の手法を用いる。

3.1 擬似速度 $\bar{\mathbf{u}}$ の導出

式(2)の非定常項を $(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) / \Delta t$ と考えると (n : 時間方向の添字), 同式は式(4), (5)の2式に分割することができる。

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \{ \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n \nabla \mathbf{u}^n + \text{Ra} \text{Pr} T^n \mathbf{j} \} \Delta t \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}} - \Delta t \cdot \nabla p^* \quad (5)$$

式(4)にガレルキン法を適用することにより式(6)が得られ, これを解いて擬似速度 $\bar{\mathbf{u}}$ が求められる。

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} \right\} \{ \bar{\mathbf{u}} \} = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - [D]_1 \right\} \{ \mathbf{u} \}^n - \{ F \}_1^n \quad (6)$$

ここで,

$$[P] = \sum_1^M \int_{V_e} N_i N_j dx dy dz$$

$$[D]_1 = \sum_1^M \int_{V_e} \text{Pr} \left\{ \frac{\nabla N_i}{\nabla x} \frac{\nabla N_j}{\nabla x} + \frac{\nabla N_i}{\nabla y} \frac{\nabla N_j}{\nabla y} + \frac{\nabla N_i}{\nabla z} \frac{\nabla N_j}{\nabla z} \right\} dx dy dz$$

$$\{ F \}_1 = \sum_1^M \int_{V_e} N_i \{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \text{Ra} \text{Pr} T \mathbf{j} \} dx dy dz$$

ただし, Δt : タイム・ステップ, M : 総要素数,
 V_e : 一要素の領域, N_i : 形状関数

であり, $\sum$ は各要素マトリックスを足し加えて全体マトリックスを作ることを意味している。

3.2 圧力の予測値 p^* の導出

式(5)については、その両辺の発散を取り式(1)を考慮すると圧力の予測値 p^* に関するポアソン方程式、すなわち式(7)が得られる。この式をガレルキン法により定式化し(式(8))、これより p^* を求めることができる。

$$\nabla^2 p^* = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} / \Delta t \quad (7)$$

$$[D]_2 \{p^*\} + \{F\}_2 = 0 \quad (8)$$

ここで、

$$[D]_2 = \sum_1^M \int_{V_e} \left\{ \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_x} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_x} + \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_y} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_y} + \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_z} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_z} \right\} dx dy dz$$

$$\{F\}_2 = \sum_1^M \int_{V_e} N_i \left\{ (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) / \Delta t \right\} dx dy dz$$

である。

3.3 速度の予測値 $\mathbf{u}^*$ と次の時刻での温度 T^{n+1} の導出

式(2)、(3)をそれぞれ変形ガレルキン法により定式化する。変形ガレルキン法では従来のガレルキン法より式(2)の慣性項、圧力項、浮力項と式(3)の移流項を陽的に考えることで対称マトリックスのみが扱われることになる。この際、式(8)から得られた p^* を用いて定式化すると速度の予測値 $\mathbf{u}^*$ と次の時刻での温度 T^{n+1} に関する連立方程式、すなわち式(9)及び式(10)が得られる。これを解くことにより速度の予測値 $\mathbf{u}^*$ と温度 T^{n+1} が求められる。ここで f_u と f_T は補正係数であり、第4章において詳述する。

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + j[D]_3 \right\} \{\mathbf{u}\}^* = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1-j)[D]_3 \right\} \{\mathbf{u}\}^n - \{F\}_3 \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + j[D]_4 \right\} \{T\}^{n+1} = \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1-j)[D]_4 \right\} \{T\}^n - \{F\}_4 \quad (10)$$

ここで、

$$[D]_3 = \sum_1^M \int_{V_e} \text{Pr} \times f_u \left\{ \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_x} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_x} + \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_y} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_y} + \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_z} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_z} \right\} dx dy dz$$

$$[D]_4 = \sum_1^M \int_{V_e} f_T \left\{ \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_x} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_x} + \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_y} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_y} + \frac{\mathbb{N}_i}{\mathbb{N}_z} \frac{\mathbb{N}_j}{\mathbb{N}_z} \right\} dx dy dz$$

$$\{F\}_3 = \sum_1^M \int_{V_e} N_i \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p^* - \text{Ra} \text{Pr} T \mathbf{j} \right\} dx dy dz$$

$$\{F\}_4 = \sum_1^M \int_{V_e} N_i \left\{ \mathbf{u} \cdot \nabla T \right\} dx dy dz$$

j : タイム・スキーム・パラメータである。

3.4 圧力修正量 dp の導出

式(2)の非定常項を予測段階と新しい時刻での陰的差分法により離散化すると次の2式が得られる。

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* = -\nabla p^* + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u}^* + \text{Ra} \text{Pr} T^* \mathbf{j}$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} = -\nabla p^{n+1} + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \text{Ra} \text{Pr} T^{n+1} \mathbf{j}$$

この2式の差を求め、さらに移流項、粘性項および浮力項を省略すると圧力の修正量 $dp (= p^{n+1} - p^*)$ に関する次式が得られる。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla(dp) \quad (11)$$

上式の発散を取り式(1)を考慮すると dp に関するポアソン方程式、式(12)が得られるが、これを式(7)と同様にガレルキン法により定式化すると dp を求めることができる。

$$\nabla^2(dp) = \nabla \cdot \mathbf{u}^* / \Delta t \quad (12)$$

3.5 次の時刻での流速 $\mathbf{u}^{n+1}$ と圧力 p^{n+1} の導出

式(11)と圧力修正量の定義から、次の時刻での流速と圧力を式(13)、(14)により求める。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \cdot \nabla(dp) \quad (13)$$

$$p^{n+1} = p^* + dp \quad (14)$$

以上の解法を MSR 解法とよぶ⁽¹⁾。

4. 任意形状要素での補正係数

4.1 補正方式の考え方

MSR 解法の定式化で式(2)と式(3)に変形ガレルキン法を適用するために、粘性項と拡散項に f_u と f_T を、慣性項と移流項に g_u と g_T の補正係数を導入する。これらの補正係数は、移流拡散方程式の一般解における増幅係数とその変形ガレルキン法での数値解における増幅係数を等値化することによって求められる⁽⁴⁾。本研究では、その任意形状要素への一般的定式化を導出する。

4.2 誤差解析手法による数値解法の補正方法

三次元非定常移流拡散方程式を考える。

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{t}} + u \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{x}} + v \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{y}} + w \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{z}} \\ &= \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{x}} \left(K_x \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{x}} \right) + \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{y}} \left(K_y \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{y}} \right) + \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{z}} \left(K_z \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{z}} \right) \quad (15) \end{aligned}$$

ただし、 t : 時間、 C : 濃度、 u, v, w : x, y, z 方向の流速、 K_x, K_y, K_z : x, y, z 方向の拡散係数である。

4.2.1 一般解についての定式化

流速 u, v, w 及び拡散係数 K_x, K_y, K_z が定数である場合には、式(15)は変数分離法によって解くことができる。そしてその一般解はフーリエ級数で表現されるが、その成分の一つは次式で表される。

$$C = A \exp \{ -(b_x^2 K_x + b_y^2 K_y + b_z^2 K_z) t + I [b_x (x - ut) + b_y (y - vt) + b_z (z - wt)] \} \quad (16)$$

ただし、 A ：複素定数、 $I = \sqrt{-1}$ 、 b_x, b_y, b_z ： x, y, z 方向の波数である。ここで、 $t = n \Delta t$ 、 $x = a_K h_x$ 、 $y = b_K h_y$ 、 $z = g_K h_z$ 、 $b_x = u \Delta t / h_x$ 、 $b_y = v \Delta t / h_y$ 、 $b_z = w \Delta t / h_z$
 $r_x = K_x \Delta t / h_x^2$ 、 $r_y = K_y \Delta t / h_y^2$ 、 $r_z = K_z \Delta t / h_z^2$
 とすると、式(16)より次式を得る。ただし、 n ：時間方向の指標、 K ：節点番号、 h_x, h_y, h_z ： x, y, z 方向の代表メッシュ幅である。

$$C_K^n = A(x_A)^n \exp \{ I (b_x a_K h_x + b_y b_K h_y + b_z g_K h_z) \} \quad (17)$$

$$x_A = P_1 + I P_2 \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \exp \left\{ - (b_x h_x)^2 r_x - (b_y h_y)^2 r_y - (b_z h_z)^2 r_z \right\} \\ &\quad \times \cos (b_x b_x h_x + b_y b_y h_y + b_z b_z h_z) \\ P_2 &= - \exp \left\{ - (b_x h_x)^2 r_x - (b_y h_y)^2 r_y - (b_z h_z)^2 r_z \right\} \\ &\quad \times \sin (b_x b_x h_x + b_y b_y h_y + b_z b_z h_z) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 C_K^n は時刻 $t = n \Delta t$ での節点 K における濃度であり、 x_A は増幅因子と呼ばれる。

4.2.2 数値解の定式化とその補正方法

式(15)にある数値解法を適用して離散化すると、 C_K^n を未知数とする代数方程式が得られる。そしてこの数値解は一般解(式(17))と同じ形式で次式のように表される。

$$C_K^n = A(x_N)^n \exp \{ I (b_x a_K h_x + b_y b_K h_y + b_z g_K h_z) \} \quad (20)$$

ここで x_N は数値解の増幅因子である。式(20)を上記の代数方程式に代入して整理すると x_N は一般に次式により表される。

$$\begin{aligned} f &= \lim_{\substack{b_x h_x \rightarrow 0 \\ b_y h_y \rightarrow 0 \\ b_z h_z \rightarrow 0}} \frac{(Q_3 - P_1 Q_9 + P_2 Q_{12})(Q_4 - P_1 Q_{10} - P_2 Q_7) - (Q_6 - P_1 Q_{12} - P_2 Q_9)(Q_1 - P_1 Q_7 + P_2 Q_{10})}{(Q_6 - P_1 Q_{12} - P_2 Q_9)(Q_2 - P_1 Q_8 + P_2 Q_{11}) - (Q_3 - P_1 Q_9 + P_2 Q_{12})(Q_5 - P_1 Q_{11} - P_2 Q_8)} \\ g &= \lim_{\substack{b_x h_x \rightarrow 0 \\ b_y h_y \rightarrow 0 \\ b_z h_z \rightarrow 0}} \frac{(Q_1 - P_1 Q_7 + P_2 Q_{10})(Q_5 - P_1 Q_{11} - P_2 Q_8) - (Q_4 - P_1 Q_{10} - P_2 Q_7)(Q_2 - P_1 Q_8 + P_2 Q_{11})}{(Q_6 - P_1 Q_{12} - P_2 Q_9)(Q_2 - P_1 Q_8 + P_2 Q_{11}) - (Q_3 - P_1 Q_9 + P_2 Q_{12})(Q_5 - P_1 Q_{11} - P_2 Q_8)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$x_N = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + I(Q_4 + Q_5 + Q_6)}{Q_7 + Q_8 + Q_9 + I(Q_{10} + Q_{11} + Q_{12})} \quad (21)$$

ここで式(21)の分母と分子はそれぞれ C_K^n 及び C_K^{n-1} により表される。また各項は以下の通りである。

Q_1, Q_4, Q_7 と Q_{10} ： $b_x h_x, b_y h_y, b_z h_z$ の関数であり、非定常項から生ずる。

Q_2, Q_5, Q_8 と Q_{11} ： $b_x h_x, b_y h_y, b_z h_z$ と r_x, r_y, r_z の関数であり、拡散項から生ずる。

Q_3, Q_6, Q_9 と Q_{12} ： $b_x h_x, b_y h_y, b_z h_z$ と b_x, b_y, b_z の関数であり、移流項から生ずる。

今、精度向上のために拡散項と移流項にそれぞれ補正係数 f および g を導入し、式(15)の代わりに次式を考える。

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbb{I}C}{\mathbb{I}t} + g \left[u \frac{\mathbb{I}C}{\mathbb{I}x} + v \frac{\mathbb{I}C}{\mathbb{I}y} + w \frac{\mathbb{I}C}{\mathbb{I}z} \right] \\ &= f \left[\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}x} \left(K_x \frac{\mathbb{I}C}{\mathbb{I}x} \right) + \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}y} \left(K_y \frac{\mathbb{I}C}{\mathbb{I}y} \right) + \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{I}z} \left(K_z \frac{\mathbb{I}C}{\mathbb{I}z} \right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

したがってこの場合の式(21)に対応する x_N は次式のように表される。

$$x_N = \frac{Q_1 + fQ_2 + gQ_3 + I(Q_4 + fQ_5 + gQ_6)}{Q_7 + fQ_8 + gQ_9 + I(Q_{10} + fQ_{11} + gQ_{12})} \quad (23)$$

ここで補正係数の f と g は一般解における増幅因子(式(18))と数値解の増幅因子(式(23))とを等値することにより求める。すなわち次式を実部と虚部の二つの関係式に分けることにより f と g を求めることができる。

$$\begin{aligned} &(P_1 + IP_2) \times [Q_7 + fQ_8 + gQ_9 + I(Q_{10} + fQ_{11} + gQ_{12})] \\ &= Q_1 + fQ_2 + gQ_3 + I(Q_4 + fQ_5 + gQ_6) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで波数 β_x, β_y と β_z に依存しない補正係数を求めるために、 $b_x h_x \rightarrow 0$ 、 $b_y h_y \rightarrow 0$ 、 $b_z h_z \rightarrow 0$ での極限を考えると次式を得ることができる。

なお $b_x h_x$ ($= 2ph_x / l_x$, λ_x : x 方向の波長) と $b_y h_y$ ($= 2ph_y / l_y$, λ_y : y 方向の波長) と $b_z h_z$ ($= 2ph_z / l_z$, λ_z : z 方向の波長) を極限でゼロとする考え方は, 高精度の数値解を得るためにより小さなメッシュを使用することにも対応している。そして式(25)により求めた f と g を各数値解法の定式化に適用することによって, その数値解法の補正方式を得ることができる。

4.3 変形ガレルキン法による定式化とその補正

4.3.1 変形ガレルキン法による定式化

式(15)を従来のガレルキン法により定式化すると次式を得る。

$$[P] \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} \right\} + ([D] + [F]) \{C\} = 0 \quad (26)$$

ただし,

$$\begin{aligned} [P] &= \sum_{e=1}^M \int_{V_e} N_l N_m dx dy dz \\ [D] &= \sum_{e=1}^M \int_{V_e} \left\{ \frac{N_l}{N_x} K_x \frac{N_m}{N_x} + \frac{N_l}{N_y} K_y \frac{N_m}{N_y} + \frac{N_l}{N_z} K_z \frac{N_m}{N_z} \right\} dx dy dz \\ [F] &= \sum_{e=1}^M \int_{V_e} N_l \left\{ u \frac{N_m}{N_x} + v \frac{N_m}{N_y} + w \frac{N_m}{N_z} \right\} dx dy dz \end{aligned} \quad (27)$$

ここで式(26)での非定常項を式(28)の差分公式により離散化するとガレルキン法による定式化が得られ, 移流項のみを陽的に取り扱うと変形ガレルキン法による定式化として式(29)のマトリックス形式が得られる。

$$(1-f) \left\{ \frac{N_l}{N_t} \right\}^{n-1} + f \left\{ \frac{N_l}{N_t} \right\}^n = \frac{\{C\}^n - \{C\}^{n-1}}{\Delta t} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{[P]}{\Delta t} + f[D] \right\} \{C\}^n \\ &= \left\{ \frac{[P]}{\Delta t} - (1-f)[D] \right\} \{C\}^{n-1} - [F] \{C\}^{n-1} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{K=0}^N \left\{ P_{k,K} + f r_x D_{x,k,K} + f r_y D_{y,k,K} + f r_z D_{z,k,K} \right\} C_K^n \\ &= \sum_{K=0}^N \left\{ P_{k,K} - (1-f) r_x D_{x,k,K} - (1-f) r_y D_{y,k,K} - (1-f) r_z D_{z,k,K} - b_x F_{x,k,K} - b_y F_{y,k,K} - b_z F_{z,k,K} \right\} C_K^{n-1} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで添字 “ k, K ” は各マトリックスの第 k 行目の各要素を意味しており, “ $K=0$ ” は節点 “ k ” を, “ $K=1, 2, \dots, N$ ” は節点 “ k ” を囲む各節点を表している。また式(27)より式(30)での各項は次式で表され, $1 \sim E$ 以外の要素は節点 “ k ” を含まないためその寄与はゼロとなっている。

$$\begin{aligned} P_{k,K} &= \left[\sum_{e=1}^E \int_{V_e} N_l N_m dx dy dz \right]_{k,K}, \quad D_{x,k,K} = \left[\sum_{e=1}^E \int_{V_e} h_x^2 \frac{N_l}{N_x} \frac{N_m}{N_x} dx dy dz \right]_{k,K}, \quad D_{y,k,K} = \left[\sum_{e=1}^E \int_{V_e} h_y^2 \frac{N_l}{N_y} \frac{N_m}{N_y} dx dy dz \right]_{k,K}, \\ D_{z,k,K} &= \left[\sum_{e=1}^E \int_{V_e} h_z^2 \frac{N_l}{N_z} \frac{N_m}{N_z} dx dy dz \right]_{k,K}, \quad F_{x,k,K} = \left[\sum_{e=1}^E \int_{V_e} h_x N_l \frac{N_m}{N_x} dx dy dz \right]_{k,K}, \quad F_{y,k,K} = \left[\sum_{e=1}^E \int_{V_e} h_y N_l \frac{N_m}{N_y} dx dy dz \right]_{k,K}, \\ F_{z,k,K} &= \left[\sum_{e=1}^E \int_{V_e} h_z N_l \frac{N_m}{N_z} dx dy dz \right]_{k,K} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで添字 “ l ” と “ m ” は各要素での節点 k と節点 K の番号に対応している。

なお変形ガレルキン法では連立方程式に現れるマトリックスはすべて対称となる。

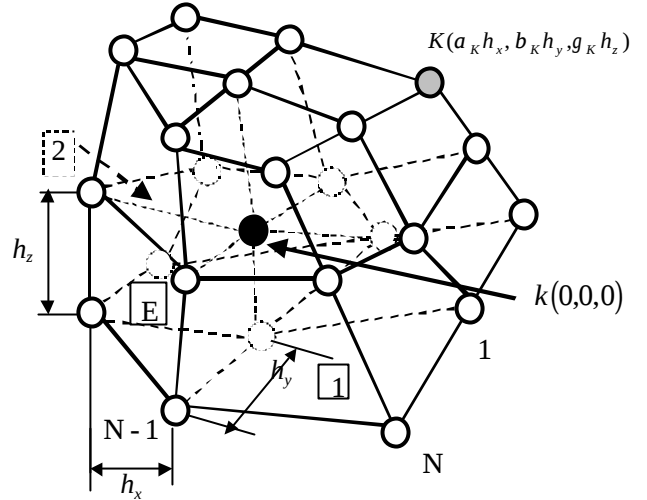


Fig.1 Nodes in arbitrary-shaped meshes

いま図 1 のように内部節点を “ k ” (考える領域での節点番号) とした任意個数の任意形状要素により囲まれた場合を考える。ここで “ N ” は節点 “ k ” を囲む要素の節点の個数 (ただし節点 “ k ” は含まない。) であり, “ E ” は節点 “ k ” まわりの要素の個数とする。いま座標の原点を節点 “ k ” とし, その隣接する任意の節点 (たとえば図 1 では節点 “ $N-1$ ”) から代表メッシュ幅 $h_x (\neq 0)$, $h_y (\neq 0)$, $h_z (\neq 0)$ を定義すると, 任意の節点 “ K ” の座標は, 一般に $x_K = a_K h_x$ 及び $y_K = b_K h_y$, $z_K = g_K h_z$ で表される。したがって変形ガレルキン法による全体方程式(式(29))の第 k 番目の代数方程式は次式で表される。

4.3.2 補正係数の一般式

4.2.2節に述べた数値解の増幅因子 χ_N を求めるために式(30)に一般解での式(17)と同形式の式(32)を代入して整理すると、数値解の増幅因子、式(21)での $Q_1 \sim Q_{12}$ は式(33)のように表される。

$$\begin{aligned}
 C_K^n &= A(x_N)^n \exp[I(b_x a_K h_x + b_y b_K h_y + g_z b_K h_z)] \\
 &= A(x_N)^n [\cos(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + g_z b_K h_z) + I \sin(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + g_z b_K h_z)] \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_1 &= \sum_{K=0}^N P_{k,K} \cos(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_2 &= -(1-f) \sum_{K=0}^N (r_x D_{xk,K} + r_y D_{yk,K} + r_z D_{zk,K}) \cos(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_3 &= -\sum_{K=0}^N (b_x F_{xk,K} + b_y F_{yk,K} + b_z F_{zk,K}) \cos(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_4 &= \sum_{K=0}^N P_{k,K} \sin(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_5 &= -(1-f) \sum_{K=0}^N (r_x D_{xk,K} + r_y D_{yk,K} + r_z D_{zk,K}) \sin(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_6 &= -\sum_{K=0}^N (b_x F_{xk,K} + b_y F_{yk,K} + b_z F_{zk,K}) \sin(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_8 &= f \sum_{K=0}^N (r_x D_{xk,K} + r_y D_{yk,K} + r_z D_{zk,K}) \cos(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_{11} &= f \sum_{K=0}^N (r_x D_{xk,K} + r_y D_{yk,K} + r_z D_{zk,K}) \sin(a_K b_x h_x + b_K b_y h_y + l_K b_z h_z) \\
 Q_7 &= Q_1, \quad Q_9 = 0, \quad Q_{11} = Q_4, \quad Q_{12} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

したがって式(25)より、各補正係数は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 f &= \lim_{\substack{b_x h_x \rightarrow 0 \\ b_y h_y \rightarrow 0 \\ b_z h_z \rightarrow 0}} \frac{Q_3 \{Q_4(1-P_1) - P_2 Q_1\} - Q_6 \{Q_1(1-P_1) + P_2 Q_4\}}{Q_6(Q_2 - P_1 Q_8 + P_2 Q_{11}) - Q_3(Q_5 - P_1 Q_{11} - P_2 Q_8)} \\
 g &= \lim_{\substack{b_x h_x \rightarrow 0 \\ b_y h_y \rightarrow 0 \\ b_z h_z \rightarrow 0}} \frac{\{Q_1(1-P_1) + P_2 Q_4\}(Q_5 - P_1 Q_{11} - P_2 Q_8) - \{Q_4(1-P_1) - P_2 Q_1\}(Q_2 - P_1 Q_8 + P_2 Q_{11})}{Q_6(Q_2 - P_1 Q_8 + P_2 Q_{11}) - Q_3(Q_5 - P_1 Q_{11} - P_2 Q_8)} \quad (34)
 \end{aligned}$$

さらに、 $b_x h_x \rightarrow 0$, $b_y h_y \rightarrow 0$, $b_z h_z \rightarrow 0$ での極限を考えると、 f と g の分母と分子がゼロとなるためロピタルの定理を用いて、 $b_x h_x = b_y h_y = b_z h_z \rightarrow 0$ として、各補正係数は次式のように表される。ただし、“ $'$ ”と“ $''$ ”は、 $b_x h_x$ での1階微分と2階微分を意味する。

$$\begin{aligned}
 f &= \lim_{\substack{b_x h_x \rightarrow 0 \\ b_y h_y \rightarrow 0 \\ b_z h_z \rightarrow 0}} \frac{-Q_3'' P_2' Q_1 - Q_6' (-Q_1 P_1'' + 2P_2' Q_4')}{Q_6' (Q_2'' - Q_8'' + 2P_2' Q_{11}') - Q_3'' (Q_5' - Q_{11}')} \\
 g &= \lim_{\substack{b_x h_x \rightarrow 0 \\ b_y h_y \rightarrow 0 \\ b_z h_z \rightarrow 0}} \frac{(-Q_1 P_1'' + 2P_2' Q_4')(Q_5' - Q_{11}') + P_2' Q_1 (Q_2'' - Q_8'' + 2P_2' Q_{11}')} {Q_6' (Q_2'' - Q_8'' + 2P_2' Q_{11}') - Q_3'' (Q_5' - Q_{11}')} \quad (35)
 \end{aligned}$$

以下に補正係数の一例として、図2の不等長立方体要素の場合を示す⁽⁴⁾。

$$f = 1 + \frac{1}{2} \frac{(b_x + b_y + b_z)^2}{r_x + r_y + r_z} + \frac{1}{6} \frac{(a-1)b_x + (b-1)b_y + (g-1)b_z}{r_x + r_y + r_z} \quad (36)$$

$g = 1$

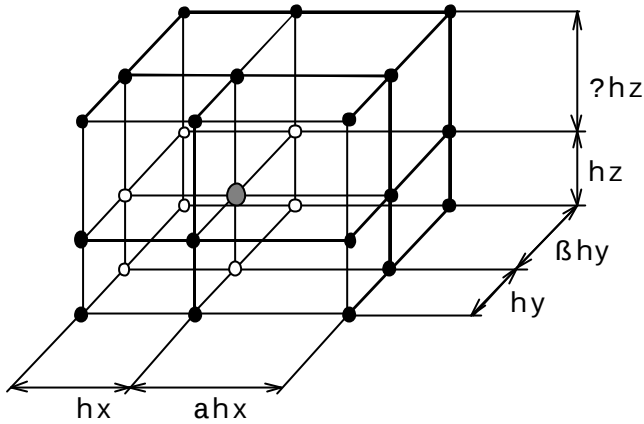


Fig.2 Non-uniform hexahedral liner elements

式(35)の補正係数を直接式(2),(3)に適用するが、式(2)に適用した場合は f を f_u と記し $K_x = K_y = K_z = Pr$ となり、式(3)に適用した場合は f を f_T と表記し $K_x = K_y = K_z = 1$ である。

5. 数値計算例

5.1 計算条件

本解析では、 $Ra = 4.70 \times 10^4$ までの水平二重円管における3次元自然対流現象を静止状態から定常状態までに至るまでの解析を行った。以下に、計算領域、要素分割数、境界条件、初期条件等を示す。

計算領域(図3:参考文献[5],[6]を参照)

- ・内管半径 $R_i = 0.625$
- ・外管半径 $R_o = 1.625$ ($R_o/R_i = 2.6$)
- ・管長さ $\lambda = 3$

要素分割

- ・円周方向: 60
- ・半径方向: 20
- ・管軸方向: 30

境界条件・流速: 内管, 外管壁ですべり無し,

- ・温度: 内管壁で温度: 1
外管壁で温度: 0

- ・圧力: 内管壁, 外管壁で $\partial p / \partial n = 0$

(ただし、 $\partial / \partial n$ は法線方向での微分を表している)
また上記の値について他断面で周期的境界条件を導入した。

周期的境界条件の与え方

- ・ $T(x, y, 0) = T(x, y, \lambda - \Delta z)$
- ・ $T(x, y, \lambda) = T(x, y, 0 + \Delta z)$
- ・ $u(x, y, 0) = u(x, y, \lambda - \Delta z)$
- ・ $u(x, y, \lambda) = u(x, y, 0 + \Delta z)$
- ・ $p(x, y, 0) = p(x, y, \lambda - \Delta z)$
- ・ $p(x, y, \lambda) = p(x, y, 0 + \Delta z)$

(ただし、 Δz は軸方向要素分割幅)

初期条件 (すべての計算領域で)

- ・流速: 0
- ・温度: 0
- ・圧力: 0

定常判定条件として式(36)を用いる。

$$|u^n, v^n, w^n| \geq \text{Max} \|u_i^n\| \times 0.001 \text{ に対して,}$$

$$d = \text{Max} \left(\left| \frac{u^n - u^{n-1}}{u^n} \right|, \left| \frac{v^n - v^{n-1}}{v^n} \right|, \left| \frac{w^n - w^{n-1}}{w^n} \right| \right) \leq 0.001 \quad (37)$$

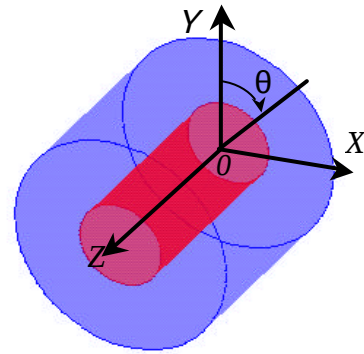


Fig.3 Computation region

図4に要素分割図を示すが、半径方向の要素分割については式(38)と式(39)を用いて壁付近での要素分割を密にしている。

$$x_j = \frac{\exp \{a(j-1)\overline{h_x}\} - 1}{2\{\exp(a) - 1\}} + R_i \quad \left(j \leq \frac{N}{2} \right) \quad (38)$$

$$x_j = \frac{\exp \{a[1 - (j-1)\overline{h_x}]\} - 1}{2\{\exp(a) - 1\}} + R_i \quad \left(j > \frac{N}{2} \right) \quad (39)$$

ただし、 $a = 2.0$, $\overline{h_x} = \frac{2}{N}$ (N : 半径方向の要素分割数)

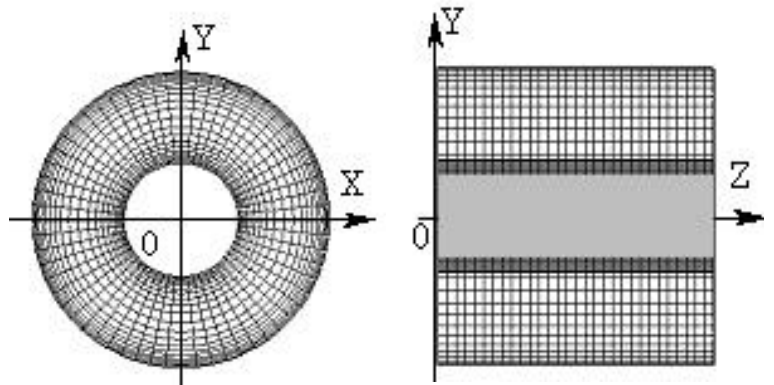


Fig.4 Non-uniform meshes

5.2 計算結果

表1に本解析と他の研究例の各種計算パラメータ(Ra, Pr , メッシュ数, Loop 数(計算繰り返し回数), Δt)についてまとめた。ただし、本解析と参考文献の間には、代表速度のとり方に違いがあるため、括弧内にその換算値をあわせて記す。

Table 1 Computation condition

Ra	Case	Method	Pr	Meshes($N_\theta \times N_r \times N_z$)	Δt	Loop	Loop $\times \Delta t$
7.10×10^2	1	Present	0.71	$60 \times 20 \times 30$	1.0×10^{-3}	643	6.43×10^{-1}
4.70×10^4	2	Present	0.71	$60 \times 20 \times 30$	5.0×10^{-5}	11471	5.74×10^{-1}
	3	Kato et al.(a) ⁽⁵⁾	0.71	$96 \times 36 \times 30$	$1.0 (2.12 \times 10^{-5})$	2.5×10^4	2.5×10^4 (5.30×10^{-1})
	4	Kato et al.(b) ⁽⁵⁾	0.71	$60 \times 20 \times 30$	$1.0 (2.12 \times 10^{-5})$	2.5×10^4	2.5×10^4 (5.30×10^{-1})

本解析手法により得られた, $Ra=7.10 \times 10^2$ 及び 4.70×10^4 における温度分布の外観図を図5に, $Z=1.5$ 断面での温度と流速の分布の様子を図6及び図7に示す。

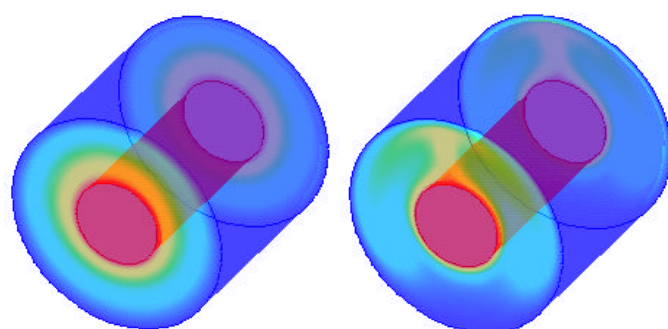
(a) $Ra=7.10 \times 10^2$ (b) $Ra=4.70 \times 10^4$

Fig. 5 Distribution of temperature

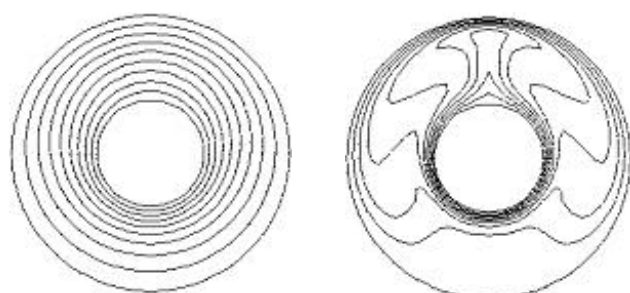
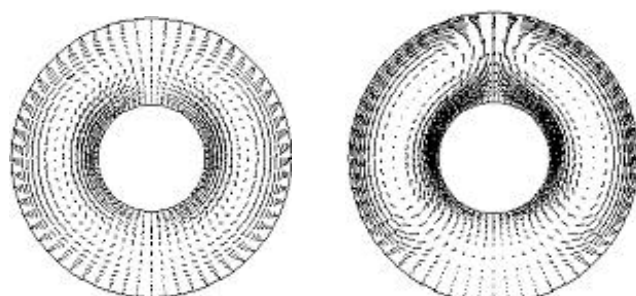
(a) $Ra=7.10 \times 10^2$ (b) $Ra=4.70 \times 10^4$ Fig. 6 Distribution of temperature at $Z=1.5$ (a) $Ra=7.10 \times 10^2$ (b) $Ra=4.70 \times 10^4$ Fig. 7 Distribution of velocity at $Z=1.5$

図5, 6から, $Ra=7.10 \times 10^2$ の場合には, ほぼ同心円状に温度が伝達しており拡散による熱移動が支配的となるのに対し, $Ra=4.70 \times 10^4$ の場合には, 内管より加熱された流体が高温となって上昇し外管壁に沿って冷却されながら広がる対流の様子が観察できる。また本解析では, 管軸方向に対して流速, 温度の分布の3次元性は表れなかった。

流速についても, $Ra=7.10 \times 10^2$ と $Ra=4.70 \times 10^4$ とではその値と勾配は $Ra=4.70 \times 10^4$ の方が大きくなっていることがわかる。(ただし図7において, $Ra=7.10 \times 10^2$ における流速のスケールは, $Ra=4.70 \times 10^4$ の10倍として図示している)

また以下に, $Ra=4.70 \times 10^4$ での定常状態における半径方向温度分布図 ($\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$) を示す。図8は, 本解析より得られた結果, そして図9の線は, 参考文献〔5〕の結果であり, プロットされている点は, 参考文献〔7〕の実験によって得られたものである。ただし, 温度分布は管軸方向に平均化された値であり, 横軸はギャップ幅 ($=R_o-R_i$) で無次元化された内管からの距離を表している。

図8と図9を比較・検討することにより本解析手法で得られた結果が他の研究結果と, 非常に近い分布状態を示していることがわかる。

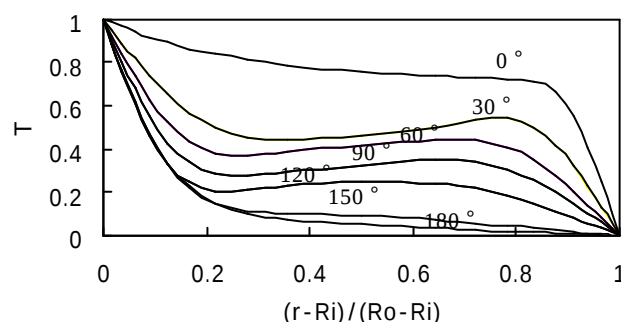


Fig. 8 Distribution of temperature for radius direction

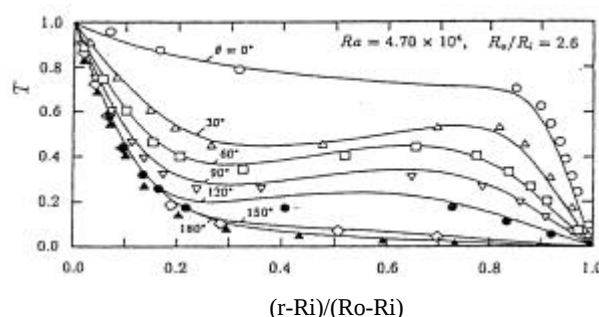
Fig. 9 Distribution of temperature for radius direction^{(5),(7)}

図 10 に、式 (40) により定義された内管壁及び外管壁における平均 Nusselt 数の計算繰返し回数に伴う変化の様子を示す。

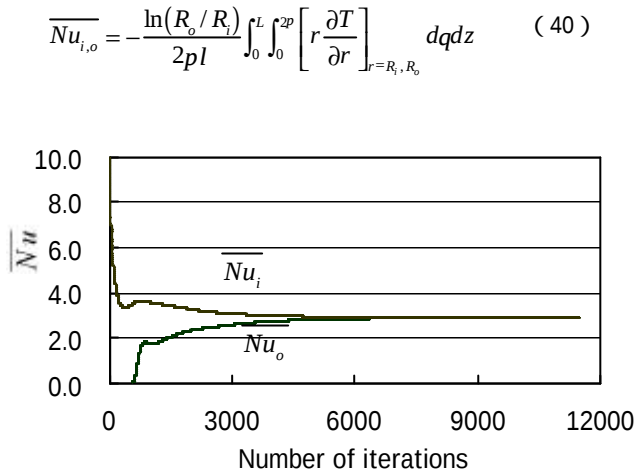


Fig. 10 Change of $\overline{Nu}_i$ and $\overline{Nu}_o$

また、表 2 に $\overline{Nu}_i$ 、 $\overline{Nu}_o$ および $\overline{Nu}$ ($= (\overline{Nu}_i + \overline{Nu}_o)/2$) の値について他の研究例との比較を含めて示す。これより高温壁及び低温壁での平均 Nusselt 数の値は他の研究例の値とほぼ一致していることがわかる。

Table 2 Comparison of $\overline{Nu}_i$, $\overline{Nu}_o$ and $\overline{Nu}$

Sources	Ra	$\overline{Nu}_i$	$\overline{Nu}_o$	$\overline{Nu}$
Present	7.10×10^2	1.030	1.044	1.037
	4.70×10^4	2.886	2.907	2.897
Kato et al. ⁽⁴⁾ Case3	4.70×10^4	2.899	2.916	2.908
Kato et al. ⁽⁴⁾ Case4	4.70×10^4	2.881	2.917	2.899

図 11 には、 $Ra=4.70 \times 10^4$ での相対速度変化率 δ の計算回数に伴う変化の様子を示すが、これより数値解は単調に収束していることがわかる。

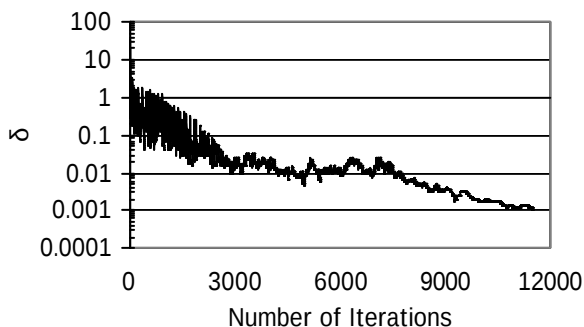
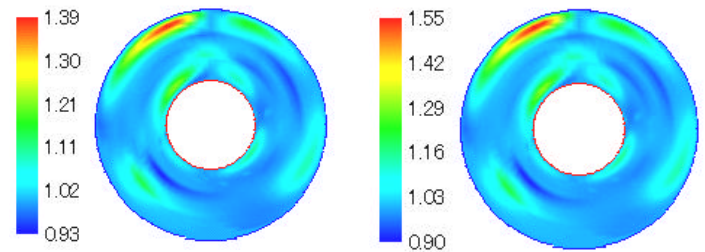


Fig. 11 Change of δ

また図 12 には、 $Ra=4.70 \times 10^4$ における計算収束時の $Z=1.5$ 断面での補正係数 f_T と f_u の分布の様子を示すが最小値は 0.93 と 0.90 となり最大値は 1.39 と 1.55 となっている。これより補正方式を導入した効果を確認できる。



(a) f_T (b) f_u

Fig. 12 Distribution of f_T and f_u

6. 結論

MSR 解法を用いて $Ra=4.70 \times 10^4$ までの水平二重円管内自然対流問題の解析を行い、他文献との比較により本解析手法より得られた結果の妥当性を確認した。

なお流速の予測値と新しい時刻での温度を求める際、誤差解析手法による任意形状要素の補正係数を定式化に導入して、その計算精度を向上させた。

参考文献

- (1) 松田・邵・山崎・松本, "変形ガレルキン法による三次元自然対流問題の解析 (誤差解析手法によるアプローチ)", 日本機械学会論文集, 66-648, B(2000), pp.1984-1991.
- (2) 数値流体力学編集委員会, "非圧縮性流体解析", (1995), pp.18-21, 東京大学出版社.
- (3) Patankar, S.V. 原著, 水上・香月訳, "コンピュータによる熱移動と流れの数値解析", (1985), 森北出版.
- (4) 松田・小野寺・市川・邵, "三次元移流拡散方程式の、有限要素法による新しい定式化 (誤差解析手法によるアプローチ)", 日本機械学会論文集, 59-561, B(1993), pp.1580-1587.
- (5) 加藤・棚橋・大田, "流速と Bernoulli 関数の同時緩和方を用いた三次元非圧縮粘性流れの有限要素解析 (第 2 報, 水平同軸二重円管内自然対流)", 日本機械学会論文集, 58-551, B(1992), pp.2100-2107.
- (6) 大屋・三木・守田・福田・長谷川, "水平環状空間内非定常 3 次元自然対流", 日本原子力学会誌, 30-1, B(1988), pp.87-96.
- (7) Kuehn, T.H. and Goldstein, R.J., "An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders", J. Fluid Mech., 74(1976), pp.695-720.