

新しい気泡関数要素と Galerkin/Least-Squares 法

A New Bubble Element Prompts Galerkin/Least-Squares Type Methods

○ 奥村 弘, 中央大院, 〒112-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail : oku@kc.chuo-u.ac.jp

川原 睦人, 中央大理工, 〒112-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail : kawa@civil.chuo-u.ac.jp

Hiroshi OKUMURA, Dept. of Civil Engrg., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27 Bunkyo-ku, Tokyo

Mutsuto KAWAHARA, Dept. of Civil Engrg., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27 Bunkyo-ku, Tokyo

A new Petrov-Galerkin formulation employing the bubble element, which is to be equivalent to Galerkin/Least-squares type methods, is proposed. The new formulation possesses better stability properties than Bubnov-Galerkin formulation employing classical bubble element. The stabilizing effect of this formulation is evaluated by stabilizing parameter determined by the shapes of both the trial and weighting bubble functions.

1. はじめに

従来, 気泡関数要素では Bubnov-Galerkin 型の定式化により気泡関数の自由度を要素毎に消去する, いわゆる静的縮約 (static condensation) の操作によって得られた有限要素近似式が, ある種の問題において安定化有限要素法^{1~3}と等価な近似式となることがわかっている^{4~7}.

山田^{9,10}は, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対し, 流速場に気泡関数要素, 圧力場に三角形一次要素を用いた MINI 要素^{5,8,11}による混合型有限要素法を提案した. ここで山田の提案する気泡関数要素は, 適合型の気泡関数の形状を要素ペクレ数に応じて変化させることにより適切な安定化の効果を導入する P 型正規化気泡関数 (P-scaled bubble function)⁹を用いている. また, Hughes は要素ペクレ数に対応する Green 関数を用いた気泡関数を導出し, 安定化パラメータに対する関係式¹²を導くことに成功した. その他の提案されている気泡関数としては, Simo らの S 型正規化気泡関数¹³などが挙げられる. また, 最近の研究においては C_0 連続性を満たさない非適合 (non-confirming) モード¹¹を有する気泡関数が提案されている. しかしながら, Stokes 方程式に対する MINI 要素において, その数値安定性が不足が指摘されている¹¹ように, Bubnov-Galerkin 型の定式化において, どのような適合型および非適合型の気泡関数を選んでも, 安定化パラメータを任意の大きさとすることはできず¹¹, 安定化作用は必ずしも十分ではない.

そこで本研究では, 従来の気泡関数要素¹⁴における数値安定性の問題点を解消する気泡関数を用いた新しい定式化を提案する. ここでは, 試行気泡関数と重み気泡関数の自由度の補間に異なった気泡関数を用いたある種の Petrov-Galerkin 法^{1,15}の考え方に基づき, Stokes 方程式により支配される非圧縮体に対する変分法的定式化を行った. これにより得られる近似式は, MINI 要素による Bubnov-Galerkin 型の近似^{4,5,7}と同様に, 安定化有限要素法と等価になる. 特に, 試行気泡関数に正規化気泡関数を, 重み気泡関数に正規化した適合・非適合どちらの気泡関数を用いた場合でも得られる安定化パラメータは従来の制約がなく, 任意の大きさとすることができる. ここで, 安定化作用の大きさは, 試行気泡関数と重み気泡関数のそれぞれの形状によって決定され, それらの形状は形状パラメータによって制御される. 非定常問題では, GLS (Galerkin/Least-squares) 法に類似した形式の近似方程式を導出することができるが, 本論文においては気泡関数の議論を明確にするために, 定常問題のみの議論をすることにする. また, 数値実験として Cavity 流れ問題を取り上げ, 本研究の数値安定性および有効性を示す.

2. Stokes 方程式に対する有限要素近似

$\partial\Omega$ を境界とする空間領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において, 流速 $\mathbf{u} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ と圧力 $p : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ を見出す次の Stokes 方程式により支配される非圧縮体問題を考える.

$$-\nu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (3)$$

ここで, ν は粘性係数, $\mathbf{f}$ はソース項である. Stokes 方程式は非圧縮等方弾性体理論における方程式と同一形式なり, 弾性体問題においては, 流速場 $\mathbf{u}$ は変位場, 粘性係数 ν は弾性係数と見なすことができる.

この問題に対し, 混合型の変分法的定式化を適用するにあたり, 試行関数空間 $\mathcal{S}_u \subset (H_0^1(\Omega))^2$, $\mathcal{S}_p \subset L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ と重み関数空間 $\mathcal{V}_u \subset (H_0^1(\Omega))^2$, $\mathcal{V}_p \subset L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ を考える. ここで, $H_0^1(\Omega)$ は関数と 1 階導関数が 2 乗可積分なものが元で, 関数が境界 $\partial\Omega$ ですべて 0 になるものの全体を表す Sobolev 空間である. また, $L^2(\Omega)$ は 2 乗可積分を満たすものの全体のなす空間である.

この関数空間を用いることにより, 全ての $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}_u \times \mathcal{V}_p$ に対し, 次の弱形式を満たす $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_p$ を見出す次の変分問題を得ることができる.

$$\nu \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle - \langle p, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_u \quad (4)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle = 0 \quad \forall q \in \mathcal{V}_p \quad (5)$$

ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は領域 Ω における L^2 内積を示し, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx$ である.

次に, この変分問題に対する有限要素近似を行うにあたり, 離散領域 $\Omega^h \simeq \Omega$ の有限要素への分割を考える. 要素数を N_e とし, 要素 $e \in \{1, 2, \dots, N_e\}$ に対する要素領域を Ω_e^h とし, 次の正則な要素分割を与える.

$$\Omega^h = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e^h \quad (6)$$

$$\emptyset = \bigcap_{e=1}^{N_e} \Omega_e^h \quad (7)$$

この変分問題 (4) (5) に対する MINI 要素を用いた有限要素近似では, 以下に導入するの 1 次要素の有限要素空間 $\tilde{\mathcal{S}}_u^h, \mathcal{S}_p^h, \tilde{\mathcal{V}}_u^h, \mathcal{V}_p^h$ と気泡関数空間 $\tilde{\mathcal{S}}_u^h, \tilde{\mathcal{V}}_u^h$ を用いる.

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{S}}_u^h &= \bar{\mathcal{V}}_u^h \\ &= \{\bar{v}_h \in (C_0^0(\Omega^h))^2, \bar{v}_h|_{\Omega_e^h} \in (P^1(\Omega_e^h))^2\} \quad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_u^h &= \{\tilde{v}_h \in (C_0^0(\Omega^h))^2, \tilde{v}_h|_{\Omega_e^h} = \phi_e b_e, \\ &\quad b_e \in \mathbb{R}^2\} \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}_u^h &= \{\tilde{v}_h \in (C_0^0(\Omega^h))^2, \tilde{v}_h|_{\Omega_e^h} = \varphi_e c_e, \\ &\quad c_e \in \mathbb{R}^2\} \quad (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_p^h &= \mathcal{V}_p^h \\ &= \{q_h \in C^0(\Omega^h), q_h|_{\Omega_e^h} \in P^1(\Omega_e^h), \\ &\quad \int_{\Omega^h} q_h dx = 0\} \quad (11)\end{aligned}$$

ここで、 $P^1(\Omega_e^h)$ は Ω_e^h で考えた 1 次の多項式を意味する。関数 ϕ_e, φ_e はそれぞれ試行気泡関数および重み気泡関数である。これらは要素毎に定義され、要素領域 Ω_e^h の境界においてその値が 0 となる C_0 連続性を有する適合型の気泡関数である。また、 b_e, c_e はそれぞれ試行気泡関数 ϕ_e および重み気泡関数 φ_e についての自由度である。この変分問題に対する MINI 要素を用いた有限要素近似では、速度場の近似に対し 1 次要素と気泡関数の近似空間からなる次の有限要素空間

$$u_h \in \mathcal{S}_u^h = \bar{\mathcal{S}}_u^h \oplus \tilde{\mathcal{S}}_u^h \subset \mathcal{S}_u \quad (12)$$

$$v_h \in \mathcal{V}_u^h = \bar{\mathcal{V}}_u^h \oplus \tilde{\mathcal{V}}_u^h \subset \mathcal{V}_u \quad (13)$$

を用い、また圧力場の近似に対しては 1 次要素の有限要素空間

$$p_h \in \mathcal{S}_p^h \subset \mathcal{S}_p \quad (14)$$

$$q_h \in \mathcal{V}_p^h \subset \mathcal{V}_p \quad (15)$$

を用いて有限要素近似 (図-1) を行うわけであるが、有限要素空間 (8) (11) より、流速場および圧力場における 1 次要素の有限要素空間においては、試行関数空間と重み関数空間の近似空間に同一のものを用いている。本研究では、気泡関数の自由度の補間に関してのみ、試行関数と重み関数に異なったものを用いているため、ある種の Petrov-Galerkin 法と位置付けられる。

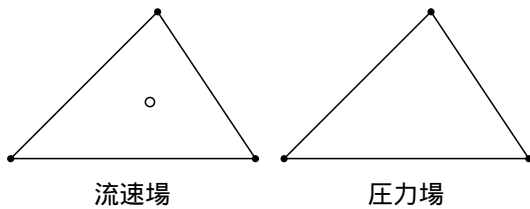


図-1 MINI 要素

以上のことを踏まえ、Petrov-Galerkin 近似を適用することにより、全ての $(v_h, q_h) \in \mathcal{V}_u^h \times \mathcal{V}_p^h$ に対し、有限要素近似解 $(u_h, p_h) \in \mathcal{S}_u^h \times \mathcal{S}_p^h$ を見出す次の近似問題が得られる。

$$\begin{aligned}\nu < \nabla u_h, \nabla v_h > - < p_h, \nabla \cdot v_h > &= < f, v_h > \\ \forall v_h \in \mathcal{V}_u^h &\quad (16)\end{aligned}$$

$$< \nabla \cdot u_h, q_h > = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{V}_p^h \quad (17)$$

流速場に対する近似試行関数 u_h と近似重み関数 v_h は、補間関数による近似空間の元 $\bar{u}_h \in \bar{\mathcal{S}}_u^h, \bar{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}_u^h$ および気泡関数による近似空間の元 $\tilde{u}_h \in \tilde{\mathcal{S}}_u^h, \tilde{v}_h \in \tilde{\mathcal{V}}_u^h$ を用いて次のように表現できる。

$$u_h = \bar{u}_h + \tilde{u}_h, \quad v_h = \bar{v}_h + \tilde{v}_h \quad (18)$$

ここで、気泡関数 ϕ_e, φ_e は要素毎に独立に定義されていることから、静的縮約 (static condensation) により試行気泡関数 ϕ_e についての自由度 b_e を消去することができ、 f が要素毎に定数関数であることを仮定すると、全ての $(\bar{v}_h, q_h) \in \bar{\mathcal{V}}_u^h \times \mathcal{V}_p^h$ に対し、次式を満たす 1 次要素を用いた有限要素近似解 $(\bar{u}_h, p_h) \in \bar{\mathcal{S}}_u^h \times \mathcal{S}_p^h$ を見出す問題となる。

$$\begin{aligned}\nu < \nabla \bar{u}_h, \nabla \bar{v}_h > - < p_h, \nabla \cdot \bar{v}_h > &= < f, \bar{v}_h > \\ \forall \bar{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}_u^h &\quad (19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< \nabla \cdot \bar{u}_h, q_h > + \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e < \nabla p_h, \nabla q_h >_e \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} \tau_e < f, \nabla q_h >_e \quad \forall q_h \in \bar{\mathcal{V}}_p^h \quad (20)\end{aligned}$$

ここで、 τ_e は次の気泡関数によって与えられるパラメータである。

$$\tau_e = \frac{< \phi_e, 1 >_e < \varphi_e, 1 >_e}{\nu < \nabla \phi_e, \nabla \varphi_e >_e A_e} \quad (21)$$

また、 $A_e = \int_{\Omega_e^h}$ であり、要素領域 Ω_e^h の測度 (面積) を示す。

したがって、MINI 要素による Bubnov-Galerkin 型の定式化⁵ によって得られる近似式と同様に、気泡関数のみに関する Petrov-Galerkin 型の定式化によって得られた式 (19), (20) の近似式が、三角形一次要素を用いた同次補間 (P^1 - P^1) を用いた圧力場のラプラシアン作用素の導入によって安定化作用の働きをする安定化有限要素法^{1~3} と等価となる。式 (21) により表される安定化パラメータ τ_e の大きさは、試行気泡関数 ϕ_e と重み気泡関数 φ_e のそれぞれの形状により決まることになる。

さらに、ここでは重み気泡関数 φ_e に要素境界上での気泡関数の値が 0 としない非適合気泡関数 (non-confirming bubble) を用いることを考える。Bubnov-Galerkin 型の有限要素近似において、非適合型の気泡関数を用いた場合、従来の気泡関数の安定化作用をある程度改善できるものの inf-sup 条件を満足しないといった問題点があった¹¹。しかしながら、本研究においては、ある種の Petrov-Galerkin 型の有限要素近似法を用いているため、inf-sup 条件の制約がなくなり、気泡関数の自由度を消去した近似方程式 (19)(20) が CBB (Circumventing the Babuška-Brezzi) 条件² を満たす形式になっていることから、重み気泡関数に非適合型の気泡関数を用いることができる。

(10) における重み関数空間の元に代わる非適合気泡関数 φ_e^{nc} として、次の関数空間の元¹¹ を考える。

$$\begin{aligned}W^h &= \{\varphi^{\text{nc}} \in H^1(\Omega_e^h), \int_F \varphi_e^{\text{nc}} p_h ds = 0, \\ &\quad \forall F = F(\Omega_e^h), \forall p_h \in P^1(\Omega_e^h)\} \quad (22)\end{aligned}$$

ここで、 $F(\Omega_e^h)$ は要素領域 Ω_e^h の辺の集合である。

重み気泡関数に非適合気泡関数 φ_e^{nc} を用いた Petrov–Galerkin 有限要素近似を適用した場合、安定化パラメータ τ_e は次式により書き換えられる。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_e \langle \varphi_e^{\text{nc}}, 1 \rangle_e}{\nu \langle \nabla \phi_e, \nabla \varphi_e^{\text{nc}} \rangle_e A_e} \quad (23)$$

本研究では以後、上式 (21)(23) によって表される気泡関数の安定化パラメータを用いて議論を進めていくものとする。

一方、安定化有限要素法では、安定化パラメータ τ_e は次式により決定された。

$$\tau_e = \alpha \frac{h_e^2}{\nu} \quad (24)$$

ここで、 h_e は代表要素長であり、 α は要素ペクレ数と呼ばれる無次元パラメータである。

3. 安定化パラメータの評価

ここでは、前節において得られた適合型の重み気泡関数による気泡関数 (21) と非適合型の重み気泡関数 (23) によって得られた安定化パラメータの評価をそれぞれについて行う。

3.1 適合型気泡関数 φ_e による安定化パラメータ

重み気泡関数に適合型の気泡関数を選んだ場合の安定化パラメータは (21) によって安定化作用の大きさが表せることができた。

適当な試行気泡関数として、以下に定義する正規化気泡関数を用いる。アイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ における各要素領域を重心位置から図-2 に示すように、3つの小3角形 ω_i に分割し、次のように正規化気泡関数を定義する。

$$\phi_e^\xi = \begin{cases} \frac{(\xi+1)(\xi+2)}{2} 3^\xi (1-r-s)^\xi & \text{in } \omega_1 \\ \frac{(\xi+1)(\xi+2)}{2} 3^\xi r^\xi & \text{in } \omega_2 \\ \frac{(\xi+1)(\xi+2)}{2} 3^\xi s^\xi & \text{in } \omega_3 \end{cases} \quad (25)$$

本研究では特に $\xi = 2$ を選び、 C_0^2 級の試行気泡関数 ϕ_e を用いることにする。一方、適合型の重み気泡関数 φ_e は以下のように定義する。

$$\varphi_e = \phi_e^\xi + \tilde{\nu} \phi_e^{\xi+1} \quad \text{in } \omega \quad (26)$$

ここで、 $\tilde{\nu}$ は重み気泡関数の形状を決定するパラメータである。次に重み気泡関数 φ_e を正規化するために、 $\frac{1}{1+\tilde{\nu}} = \eta$ とおけば、正規化された重み気泡関数 φ_e は以下のように得られる。

$$\varphi_e = \eta \phi_e^\xi + (1-\eta) \phi_e^{\xi+1} \quad \text{in } \omega \quad (27)$$

この場合、気泡関数による安定化パラメータ τ_e は η の関数として以下のように得られる。

$$\tau_e = \frac{2A_e^2}{3\nu g} \{ \eta_0 \eta + \eta_1 (1-\eta) \} \quad (28)$$

ここで、 η_0, η_1 はそれぞれ以下のように表せる。

$$\eta_0 = \frac{1}{4(2\xi-1)} \xi(\xi+1)^2(\xi+2)^2 \quad (29)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{4(2\xi+1)} (\xi+1)^2(\xi+2)^2(\xi+3) \quad (30)$$

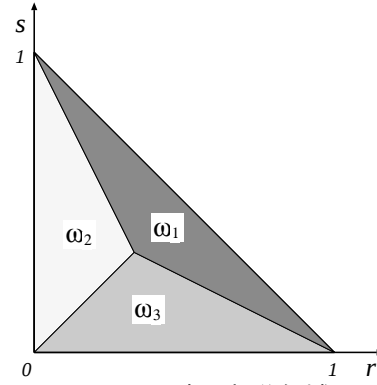


図-2 要素の部分領域

3.2 非適合型気泡関数 φ_e^{nc} による安定化パラメータ

前節において得られた気泡関数の安定化パラメータ τ_e を形状パラメータ ξ を用いて関数形状を制御することを考える。この時、気泡関数の安定化作用を表す安定化パラメータ τ_e は以下のように得られる。

$$\tau_e = \frac{\langle \phi_e^\xi, 1 \rangle_e \langle \varphi_e^\xi, 1 \rangle_e}{\nu \langle \nabla \phi_e^\xi, \nabla \varphi_e^\xi \rangle_e A_e} \quad (31)$$

本研究では適当な気泡関数として、以下に定義する P 型正規化気泡関数 (P-scaled bubble)⁹ を用いて議論を進めていくものとする。アイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ における各要素領域を重心位置から図-2 に示すように、3つの小3角形 ω_i に分割し、次のように正規化気泡関数を定義する。

$$\bar{\phi}_e^\xi = \begin{cases} \frac{\xi+2}{\xi} \{1 - (1 - 3(1-r-s))^\xi\} & \text{in } \omega_1 \\ \frac{\xi+2}{\xi} \{1 - (1 - 3r)^\xi\} & \text{in } \omega_2 \\ \frac{\xi+2}{\xi} \{1 - (1 - 3s)^\xi\} & \text{in } \omega_3 \end{cases} \quad (32)$$

従来、この正規化気泡関数を用いた MINI 要素により Bubnov–Galerkin 型の有限要素近似を行った場合、安定化パラメータ τ_e は ξ の関数として次のように表されることが分かっている^{9,11}。

$$\tau_e = \frac{2A_e^2}{3\nu g} \frac{\xi}{(\xi+2)^2} \quad (33)$$

ここで、 $g = |\mathbf{x}_{,r}|^2 + |\mathbf{x}_{,s}|^2 - \mathbf{x}_{,r} \cdot \mathbf{x}_{,s}$ である。また、 ξ は 0 から 2 までの値を動くが、要素ペクレ数が小さくなるにつれ $\xi = 2$ に収束し、Bubnov–Galerkin 近似により得られる安定化パラメータは以下の上限の値を持つ。

$$\tau_e \leq \frac{A_e^2}{12\nu g} \quad (34)$$

このとき、圧力場に対する気泡関数の安定化作用は十分ではない。図-3 に従来の Bubnov–Galerkin 型の近似において正規化気泡関数を用いた場合における安定化パラメータの上限値 ($\xi = 2$) における気泡関数の形状を示す。

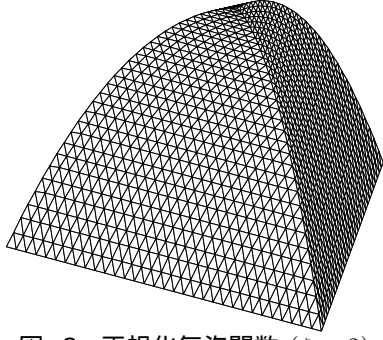
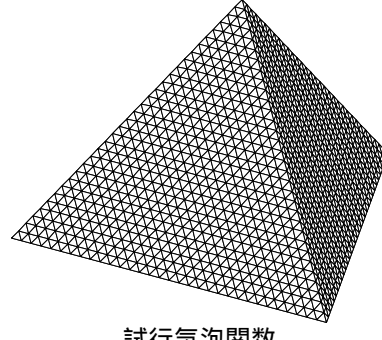


図-3 正規化気泡関数 ($\xi = 2$)



試行気泡関数

ここで、別の視点から見れば、Bubnov-Galerkin 近似から導出される安定化パラメータは、試行気泡関数と重み気泡関数ともに同一の形状から決定されているとも解釈できる。そこで、著者らはある種の Petrov-Galerkin 法の考え方にに基づき、試行気泡関数および重み気泡関数に異なった形状を用いることにより安定化パラメータを決定することで、従来の気泡関数の安定化作用の不足を改善できるものと期待し、本研究に至った。本研究では前節で述べたように、安定化パラメータの具体的な導出に対し、試行気泡関数 ϕ_e^ξ には適当な気泡関数として式 (32) の正規化気泡関数と線形 ($\xi = 1$) の正規化気泡関数を組み合わせた気泡関数を用いるを試みる。

$$\phi_e^\xi = \begin{cases} \bar{\phi}_e^\xi & (0 \leq \xi \leq 1) \\ \bar{\phi}_e^1 & (1 \leq \xi \leq \frac{26}{11}) \end{cases} \quad (35)$$

また、重み気泡関数 φ_e^ξ には非適当な気泡関数として式 (32) の正規化気泡関数に、次式の非適合気泡関数を組み合わせる。

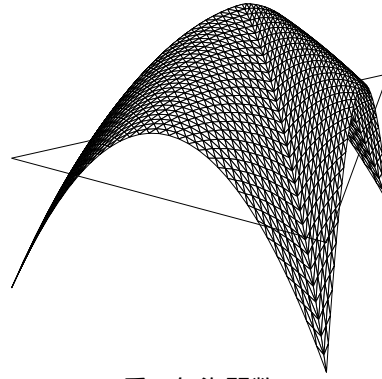
$$\varphi_e^\xi = \begin{cases} \bar{\phi}_e^\xi & (0 \leq \xi \leq 1) \\ (2 - \xi) \bar{\phi}_e^1 + (\xi - 1) \phi_e^{nc} & (1 \leq \xi \leq \frac{26}{11}) \end{cases} \quad (36)$$

ここで、 ϕ_e^{nc} は次式で定義される非適合気泡関数である。

$$\phi_e^{nc} = \begin{cases} \frac{9}{5} \{2 - 3(r^2 + s^2)\} & \text{in } \omega_1 \\ \frac{9}{5} \{2 - 3((1 - r - s)^2 + s^2)\} & \text{in } \omega_2 \\ \frac{9}{5} \{2 - 3(r^2 + (1 - r - s)^2)\} & \text{in } \omega_3 \end{cases} \quad (37)$$

形状パラメータ ξ が 0 から 1 までの範囲においては、試行および重み気泡関数ともに同一の関数形状をしながら変化していく。一方、 ξ が 1 から $\frac{26}{11}$ の範囲においては、試行気泡関数 ϕ_e^ξ は $\xi = 1$ のまま固定されて線形の気泡関数形状を保ち、重み気泡関数 φ_e^ξ は ξ が $\frac{26}{11}$ に近づくにつれて非適合性を強くしていきながら、試行気泡関数とは別の挙動を示す。しかしながら、Stokes 流れにおいては安定化パラメータ τ_e が限りなく無限大 (もしくは 0) に近づくことはあっても、無限大 (もしくは 0) の値をとることはなく、 ξ の値は $\frac{26}{11}$ になることはない。 $\xi = \frac{26}{11}$ のおける試行気泡関数 ϕ_e^ξ と重み気泡関数 φ_e^ξ それぞれの形状を図-4 に示す。このとき、安定化パラメータ τ_e は ξ の関数として次式のように表される。

$$\tau_e = \begin{cases} \frac{2A_e^2}{3\nu g} \frac{\xi}{(\xi+2)^2} & (0 \leq \xi \leq 1) \\ \frac{A_e^2}{3\nu g} \left(\frac{39}{5} - \frac{33}{10}\xi\right)^{-1} & (1 \leq \xi \leq \frac{26}{11}) \end{cases} \quad (38)$$



重み気泡関数

図-4 気泡関数の組み合わせ ($\xi = \frac{26}{11}$)

ここで、非適合型の気泡関数を用いた MINI 要素による Petrov-Galerkin 型の有限要素近似により得られる安定化パラメータは、形状パラメータ ξ が 0 から 1 の範囲においては、正規化気泡関数による Bubnov-Galerkin 型の定式化により得られる式 (33) と一致し、 $1 \leq \xi \leq \frac{26}{11}$ の範囲においては ξ が $\frac{26}{11}$ に収束するにつれ

$$\tau_e \rightarrow \infty \quad (\xi \rightarrow \frac{26}{11}) \quad (39)$$

となり、安定化パラメータに関する制約がなくなり、任意の大きさとすることができる。したがって、要素ベクレ数が小さい場合においても十分な安定化作用が期待できる。

4. 数値実験

数値解析解析例として、Cavity 流れ問題 (図-5) を取り上げ、本研究で提案する手法の数値安定性を検証する。粘性係数は $\nu = 1$ とし、図-6 に示すように 40×40 の均等メッシュを用いて計算を行う。気泡関数としては、通常用いられる標準気泡関数 $\phi_e = L_1 L_2 L_3$ (L_i は面積座標) を用い、本手法の比較対象とする。Bubnov-Galerkin 型の定式化において標準気泡関数を用いた場合、安定化パラメータは具体的に $\tau_e = \frac{A_e^2}{10\nu g}$ で与えられる。また、 $\alpha = 0.25$ とした安定化有限要素法の結果との比較も行った。

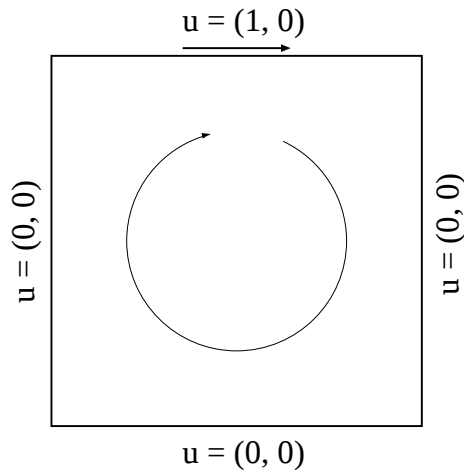


図-5 Cavity 流れ問題

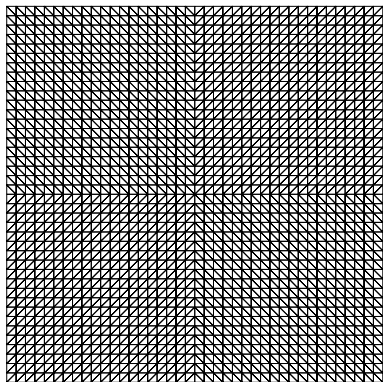
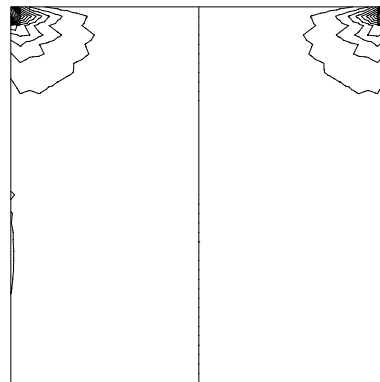
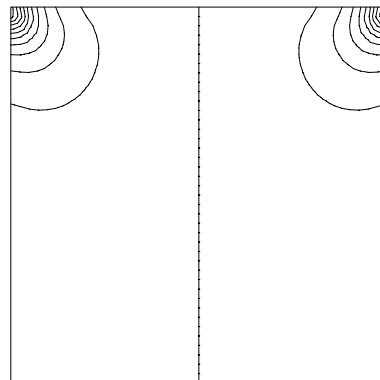


図-6 有限要素分割

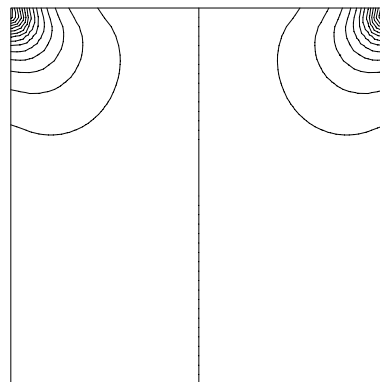
図-7に圧力コンター図を示す. (a) の標準気泡関数を用いた MINI 要素による Bubnov-Galerkin 型の近似では, 角点および辺上の特異点近傍で同次補間を用いた場合に見られる特有の数値的圧力振動が見られる. この数値的不安定性は, 任意の気泡関数 $\phi_e \in H_0^1(\Omega_e)$ を用いた MINI 要素による Bubnov-Galerkin 型の近似においても見られる¹¹⁾. 一方, 本手法である (b) の適合気泡関数および (c) の非適合気泡関数を用いた気泡関数要素による Petrov-Galerkin 型の近似による結果では, 数値的圧力振動は見られず, (d) の安定化有限要素法の結果と一致している. このことは, 本手法と安定化有限要素法との等価性および本手法における安定化作用の有効性を示している. また, (c) の結果を得るにあたり, $\xi = 2.313$ の値をとった.



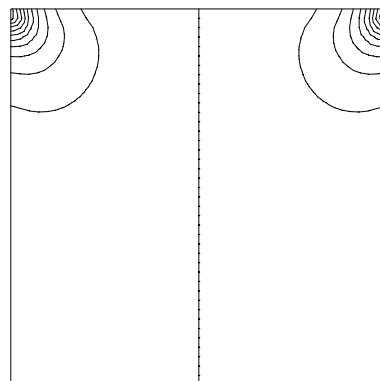
(a) BG/standard



(b) PG/confirming



(c) PG/non-confirming



(d) 安定化有限要素法

図-7 圧力コンター図 ($\nu = 1$)

参考文献

1. Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Stream-line upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.32, pp.199~259, 1982.
2. Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra. M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodationig equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.59, pp.85~99, 1986
3. Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.95, pp.221~242, 1992.
4. Brezzi, F., Bristeau, M.O., Mallet, M. and Roge, G. : A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.96, pp.117~129, 1992.
5. Pierre, R.: Simple C^0 approximation for the computation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.68, pp205~227, 1988.
6. Franca, L.P. and Farhat, C.: Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.123, pp.299~308, 1995.
7. Baicocchi, C., Brezzi, F. and Franca, L.P. : Virtual bubbles Galerkin-Least-Squares type method (Ga.L.S.), *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.105, pp.125~141, 1993.
8. Arnold, D.N., Brezzi, F. and Fortin. M.: A stable finite element for the Stokes equation, *Calcolo*, Vol.23, 337~344, 1984.
9. Yamada, T.: A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.9, pp.1567~1576, 1995.
10. Yamada, T.: A bubble element for the compressible Euler equations, *IJCFD*, Vol.9, pp.273~283, 1998.
11. Pierre, R.: Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P_1 - P_1 element for the Stokes problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.32, pp.1210~1224, 1995.
12. Hughes, T.J.R.: Multiscale phenomena: Green's function. the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origin of stabilized methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.127, pp.387~401, 1995.
13. Simo, J.C., Armero, F. and Taylor, C.: Galerkin finite element methods with bubble for advection dominated incompressible Navier-Stokes, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.38, pp.1475~1506, 1995.
14. Fortin, M. and Fortin, A.: Newer and newer elements for incompressible flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.6, John Wiley & Sons Ltd., pp.171~187, 1985.
15. 奥村 弘, 川原 睦人: 非圧縮体に対する非適合気泡関数を用いた MINI 要素による Petrov-Galerkin 有限要素法, 応用力学論文集, Vol. 3, pp.275~280, 2000.