

気泡関数要素を用いた GLS 型安定化有限要素法による 非圧縮性粘性流体解析

Incompressible Viscous Flow Analysis Using Bubble Function Element with GLS Type Stabilized Finite Element Method

○ 松本 純一, 中央大院, 〒112-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail : junmct@kc.chuo-u.ac.jp
川原 睦人, 中央大理工, 〒112-8551 文京区春日 1-13-27, E-mail : kawa@civil.chuo-u.ac.jp

Junichi MATSUMOTO, Dept. of Eng., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551, JAPAN
Mutsuto KAWAHARA, Dept. of Eng., Chuo Univ., Kasuga 1-13-27, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551, JAPAN

A new finite element formulation with bubble function for the incompressible Navier-Stokes equations is proposed in this paper. As the numerical approach, the spacial discretization is applied the mixed interpolations for velocity and pressure fields by the bubble element and linear element, respectively. The fractional step method based on the implicit time integration is used for the discretization. To verify applicability of presented bubble function, standing vortex problem and lid-driven cavity flow are performed for the numerical examples.

1. 緒言

近年, 要素境界上で 0 となり, 要素内のみに値を持つ関数である C^0 連続性を有する適合型の気泡関数を一次要素に加えた通常の Bubnov-Galerkin 型の有限要素法を用いた近似が, ある種の問題において安定化有限要素法と等価となることが明らかとなっている [1]. このような等価性は, 気泡関数の自由度を要素毎に消去する, いわゆる静的縮約という操作によって得られた有限要素方程式を考察することによって示される。定常 Stokes 方程式では, 流速場に対して気泡関数要素を用い, 圧力場に対しては一次要素による, MINI 要素と呼ばれる要素を用いた混合型有限要素法による近似は, 安定化有限要素法の一つである SUPG 法を PSPG 法と組み合わせた手法から導かれるものと等価となる。このことから, 正規化気泡関数要素を MINI 要素における気泡関数として適用することにより, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する混合型有限要素法を考えることができる。山田 [2] は, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する MINI 要素を用いた混合型有限要素法として, 気泡関数に P 型正規化気泡関数を適用する手法を提案している。しかしながら, 気泡関数における安定化作用には限界があり, Stokes 方程式においては, 気泡関数の圧力場に対する安定化作用は, かならずしも十分ではないことが指摘されている。そこで, 本研究では Petrov-Galerkin 型の定式化を用いることにより導出される重心点のみにおける安定化項を用いることにより数値的な不安定性を回避する著者ら [3] の方法を拡張し, 上限下限条件を満たさない四角形, 六面体要素 (Q1b/Q1) に適用できる解法 (Least-Squares Bubble) を提案するものである。

本論では, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式の有限要素法による解析手法として, 安定化作用を導入した気泡関数を分離型法に適用した新しい手法を提案し, 検証の計算として, Cavity 流れを取り上げ, ここで提案する手法の適用性について検討を行うものである。

2. 基礎方程式

非圧縮性粘性流れにおける基礎方程式は, 無次元化することによって, 以下の運動方程式と連続式によって表される。
運動方程式

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = f_i \text{ in } \Omega \quad (1)$$

連続式

$$u_{i,i} = 0 \text{ in } \Omega \quad (2)$$

ここで, u_i, p は, 流速, 圧力, f_i は外力項, また, $\nu = 1/Re$ であり, Re は, レイノルズ数である。

境界 Γ は, Γ_1 と Γ_2 に分けられ, 以下の境界条件が規定される。

$$u_i = \hat{u}_i \text{ on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p\delta_{ij} + \nu (u_{i,j} + u_{j,i})\} \cdot n_j = \hat{t}_i \text{ on } \Gamma_2 \quad (4)$$

ここで, δ はクロネッカーのデルタ関数, n_j は境界 Γ の外向き法線ベクトルである。

3. 時間方向の離散化

時間方向の離散化には, 安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し, 連続式 (2) は完全陰的に表す。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^* u_{i,j}^{n+1/2} + p_{,i}^{n+1} - \nu \left(u_{i,j}^{n+1/2} + u_{j,i}^{n+1/2} \right)_{,j} = f_i \quad (5)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (6)$$

ここで,

$$u_i^* = \frac{1}{2}(3u_i^n - u_i^{n-1}), \quad u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^{n+1} + u_i^n)$$

である。移流速の線形近似として用いている u_i^* は, 2 次精度 Adams-Bashforth 公式により得られている。このようにして得られたスキームは, 時間に関して 2 次精度を有する線形スキームとなっている。

圧力 Poisson 方程式の導出については, 連続式 (6) を完全に満足しない中間流速を導入してから圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことのできる分離型法を適用する。

前時間ステップの圧力 p^n を近似的な圧力として, 運動方程式 (5) の圧力を p^n に置き換えると, 運動方程式 (5) は, 未知流速 u_i^{n+1} を中間流速 \tilde{u}_i^{n+1} に置き換えた次式になる。

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^* \tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} + p_{,i}^n - \nu \left(\tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} + \tilde{u}_{j,i}^{n+1/2} \right)_{,j} = f_i \quad (7)$$

$$\tilde{u}_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_i^{n+1} + u_i^n)$$

式 (5) と式 (7) の差をとると、次式が得られる。

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}u_j^*(u_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1}) + (p_{i,i}^{n+1} - p_{i,i}^n) - \frac{1}{2}\nu \{(u_{i,j}^{n+1} - \tilde{u}_{i,j}^{n+1}) + (u_{j,i}^{n+1} - \tilde{u}_{j,i}^{n+1})\}_{,j} = 0 \quad (8)$$

式 (8) の発散をとり、式 (6) を代入することによって圧力 Poisson 方程式が得られる。

$$\Delta t(p_{i,i}^{n+1} - p_{i,i}^n) = \tilde{u}_{i,i}^{n+1} \quad (9)$$

ただし、式 (9) の導出において、流速 u_i^{n+1} は未知なので、 $u_i^{n+1} \simeq \tilde{u}_i^{n+1}$ と近似し、ここでは、式 (8) の第 2 項と第 4 項を省略している。

本手法のアルゴリズムは、次のようになる。

1. 初期条件として、流速 $u_i^{(0)}$ と圧力 pressure $p^{(0)}$ を与える。
2. 次式によって中間流速 \tilde{u}_i^{n+1} を求める。

$$\frac{\Delta \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}L\Delta \tilde{u}_i^{n+1} + Lu_i^n + p_{i,i}^n = f_i$$

$$Lu_i = u_j^* u_{i,j} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j}$$

$$\Delta \tilde{u}_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n$$

3. 次式によって圧力 p^{n+1} を求める。

$$\Delta t \Delta p_{i,i}^{n+1} = \tilde{u}_{i,i}^{n+1}, \quad \Delta p_{i,i}^{n+1} = p_{i,i}^{n+1} - p_{i,i}^n$$

4. 次式によって $n+1$ 回目の流速 u_i^{n+1} を求める。

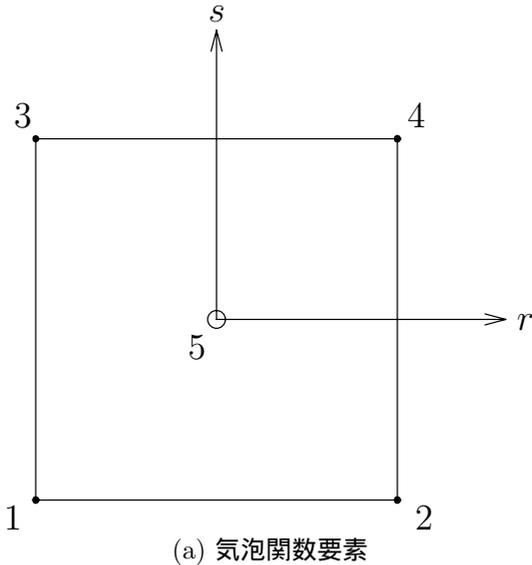
$$\frac{\Delta u_i^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}L\Delta u_i^{n+1} + \Delta p_{i,i}^{n+1} = 0$$

$$\Delta u_i^{n+1} = u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}$$

5. $i = i + 1$ として ステップ 2 へ。

4. 空間方向の離散化

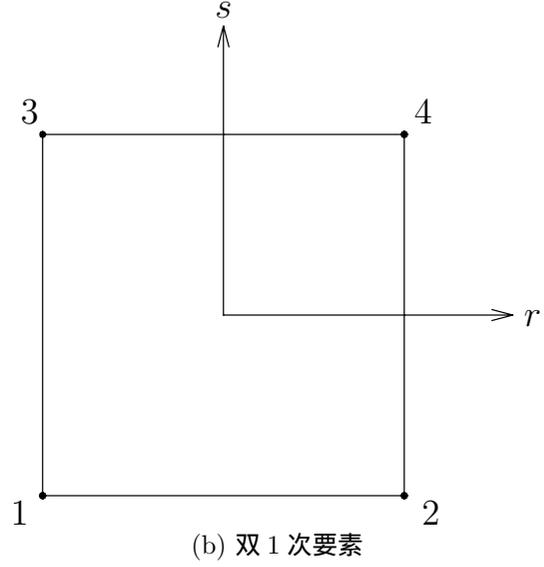
空間方向の離散化として、流速と圧力にべつの補間関数を適用する混合補間を用いた定式化を行う。本研究では、混合補間の組み合わせとして、流速に関しては気泡関数要素を圧力に関しては双 1 次要素を補間関数に用いる。以下に各要素を示す。



$$u_i = \Phi_1 u_{i1} + \Phi_2 u_{i2} + \Phi_3 u_{i3} + \Phi_4 u_{i4} + \Phi_5 u'_{i5} \quad (10)$$

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{4}(1 + r_\alpha r)(1 + s_\alpha s), \quad \alpha = 1 \sim 4, \quad \Phi_5 = \phi_e$$

$$u'_{i5} = u_{i5} - \frac{1}{4}(u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} + u_{i4})$$



$$p = \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 p_3 + \Psi_4 p_4 \quad (11)$$

$$\Psi_\alpha = \frac{1}{4}(1 + r_\alpha r)(1 + s_\alpha s), \quad \alpha = 1 \sim 4$$

Fig. 1: 流速と圧力の補間関数

ここで、 ϕ_e は気泡関数であり、本研究では Fig. 2 に示すように四角形の要素領域をその重心点を用いて 4 つの小三角形 w_i に分割する気泡関数を用いる。この気泡関数はこの小三角形毎にアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ を用いて次のように定義される。

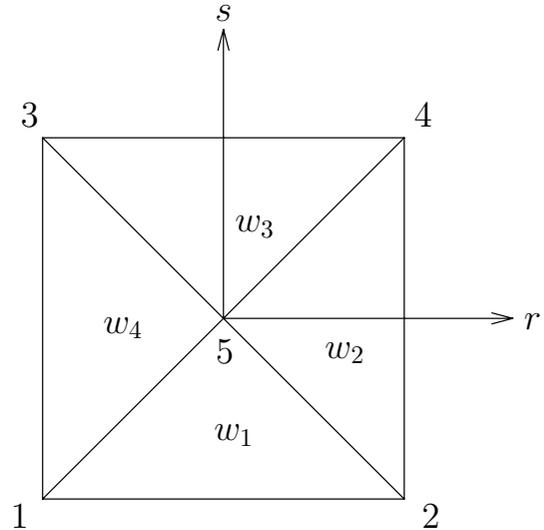


Fig. 2: 要素領域

$$\phi_e = \begin{cases} (1+s)^2 & \text{in } w_1 \\ (1-r)^2 & \text{in } w_2 \\ (1-s)^2 & \text{in } w_3 \\ (1+r)^2 & \text{in } w_4 \end{cases} \quad (12)$$

5. 改良型気泡関数要素を適用した非圧縮性粘性流体の

有限要素方程式

Petrov-Galerkin 法により有限要素近似を行う。改良型気泡関数要素を用いた有限要素近似では、次の双 1 次要素の有限要素空間 \bar{V}_i^h, Q^h と気泡関数の空間 V_i^h, \hat{V}_i^h を用いる。

$$\bar{V}_i^h = \{\bar{v}_i^h \in (C_0^0(\Omega))^N, \bar{v}_i^h|_{\Omega_e} \in (P1(\Omega_e))^N\} \quad (13)$$

$$V_i^h = \{v_i^h \in (C_0^0(\Omega))^N, v_i^h|_{\Omega_e} \in \phi_e c_{ei}, c_{ei} \in \mathbf{R}^N\} \quad (14)$$

$$\hat{V}_i^h = \{\hat{v}_i^h \in (C_0^0(\Omega))^N, \hat{v}_i^h|_{\Omega_e} \in \varphi_e c_{ei}, c_{ei} \in \mathbf{R}^N\} \quad (15)$$

$$Q^h = \{q^h \in C_0^0(\Omega), q^h|_{\Omega_e} \in P1(\Omega_e), \int_{\Omega} q^h d\Omega = 0\} \quad (16)$$

ここで、 ϕ_e, φ_e は要素領域 Ω_e をコンパクトな台とする気泡関数であり、 V_i^h, \hat{V}_i^h は気泡関数による近似空間に対応している。

有限要素空間として速度場に対して $\bar{V}_i^h \oplus V_i^h, V_i^h = \bar{V}_i^h \oplus V_i^h \oplus \hat{V}_i^h$ を圧力場に対して Q^h を用いることにより、有限要素近似解 $(u_i^h, p^h) \in (\bar{V}_i^h \oplus V_i^h) \times Q^h$ を見いだす次の近似問題が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\Delta \tilde{u}_i^{h, n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} L^h \Delta \tilde{u}_i^{h, n+1} + L^h u_i^{h, n} + p_{,i}^{h, n}, \hat{v}_i^h \right\rangle \\ & = \langle f_i, \hat{v}_i^h \rangle \quad \forall \hat{v}_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (17)$$

$$\langle \Delta t \Delta p_{,ii}^{h, n+1}, q^h \rangle = \langle \tilde{u}_{i,i}^{h, n+1}, q^h \rangle \quad \forall q^h \in Q^h \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\Delta u_i^{h, n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} L^h \Delta u_i^{h, n+1} + \Delta p_{,i}^{h, n+1}, \hat{v}_i^h \right\rangle = 0 \\ & \quad \forall \hat{v}_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は、 Ω における L^2 内積を表す。流速場に対する近似解 u_i^h と重み関数 \hat{v}_i^h は双 1 次要素による補間関数の近似空間の元 $\bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h$ および気泡関数による近似空間の元 $u_i^h, v_i^h \in V_i^h, \hat{v}_i^h \in \hat{V}_i^h$ を用いて次のように表現できる。

$$u_i^h = \bar{u}_i^h + u_i^h, \hat{v}_i^h = \bar{v}_i^h + v_i^h + \hat{v}_i^h = v_i^h + \hat{v}_i^h \quad (20)$$

ここで、

$$\bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h, u_i^h = \sum_{e=1}^{Ne} \phi_e b_{ei} \in V_i^h$$

$$v_i^h = \sum_{e=1}^{Ne} \phi_e c_{ei} \in V_i^h, \hat{v}_i^h = \sum_{e=1}^{Ne} \varphi_e c_{ei} \in \hat{V}_i^h \quad (21)$$

である。改良型気泡関数要素を適用した有限要素方程式は、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\Delta \tilde{u}_i^{h, n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} L^h \Delta \tilde{u}_i^{h, n+1} + L^h u_i^{h, n} + p_{,i}^{h, n}, v_i^h \right\rangle \\ & + \sum_{e=1}^{Ne} \nu'_{ik} \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 \left\{ \frac{1}{2} \Delta \tilde{b}_{ek}^{n+1} + b_{ek}^n \right\} c_{ei} \\ & = \langle f_i, v_i^h \rangle \quad \forall v_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (22)$$

$$\nu'_{ik} = \frac{\left\langle \frac{\Delta \tilde{u}_i^{h, n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} L \Delta \tilde{u}_i^{h, n+1} + L u_i^{h, n} + p_{,i}^{h, n}, \varphi_e \right\rangle_{\Omega_e}}{\|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 \left\{ \frac{1}{2} \Delta \tilde{b}_{ek}^{n+1} + b_{ek}^n \right\}} \quad (23)$$

$$\langle \Delta t \Delta p_{,ii}^{h, n+1}, q^h \rangle = \langle \tilde{u}_{i,i}^{h, n+1}, q^h \rangle \quad \forall q^h \in Q^h \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\Delta u_i^{h, n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} L^h \Delta u_i^{h, n+1} + \Delta p_{,i}^{h, n+1}, v_i^h \right\rangle \\ & + \sum_{e=1}^{Ne} \nu'_{ik} \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 \frac{1}{2} \Delta b_{ek}^{n+1} c_{ei} = 0 \quad \forall v_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (25)$$

$$\nu'_{ik} = \frac{\left\langle \frac{\Delta u_i^{h, n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} L \Delta u_i^{h, n+1} + \Delta p_{,i}^{h, n+1}, \varphi_e \right\rangle_{\Omega_e}}{\|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 \frac{1}{2} \Delta b_{ek}^{n+1}} \quad (26)$$

ここで、 $\sum_{e=1}^{Ne} \nu'_{ik} \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 b_{ek} c_{ei}$ は気泡関数要素による安定化作用を制御する項である。

6. GLS 型安定化有限要素法との関係について

現象が定常状態に収束する場合を考えると、中間流速、流速、圧力は

$$\Delta \tilde{u}_i^{h, n+1} \rightarrow 0, \Delta u_i^{h, n+1} \rightarrow 0$$

$$\tilde{u}_i^{h, n+1} \rightarrow u_i^h, u_i^{h, n} \rightarrow u_i^h$$

$$\Delta \tilde{b}_{ei}^{n+1} \rightarrow 0, \Delta b_{ei}^{n+1} \rightarrow 0, b_{ei}^n \rightarrow b_{ei}$$

$$\Delta p^{h, n+1} \rightarrow 0, p^{h, n} \rightarrow p^h$$

となるので、有限要素方程式 (22), (24), (25) は、以下の式に収束する。

$$\langle Lu_i^h + p_{,i}^h, v_i^h \rangle$$

$$+ \sum_{e=1}^{Ne} \nu_{ik} \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 b_{ek} c_{ei} = 0 \quad \forall v_i^h \in V_i^h \quad (27)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (28)$$

上式において静的宿約の操作によって b_{ei} を消去することを考える。式 (27) は以下のように書きかえることができる。

$$\begin{aligned} & \langle Lu_i^h + p_{,i}^h, \bar{v}_i^h \rangle + \sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \langle Lu_i^h + p_{,i}^h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \right. \\ & \left. + \nu' \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 b_{ei} \right\} c_{ei} = 0 \quad \forall \bar{v}_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (29)$$

上式により、次の 2 式を得る。

$$\langle Lu_i^h + p_{,i}^h, \bar{v}_i^h \rangle = 0 \quad (30)$$

$$\langle Lu_i^h + p_{,i}^h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} + \nu' \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 b_{ei} = 0 \quad (31)$$

ここで、式 (31) は以下のように書きかえることができる。

$$\langle L\bar{u}_i^h + p_{,i}^h, \phi_e \rangle_{\Omega_e}$$

$$+ \left\{ \langle L\phi_e, \phi_e \rangle_{\Omega_e} + \nu' \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 \right\} b_{ei} = 0 \quad (32)$$

式 (32) により、 b_{ei} は式 (33) のように表すことができる。

$$b_{ei} = -\tau_{eB} \langle L\bar{u}_i^h + p_{,i}^h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \frac{A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} \quad (33)$$

$$\tau_{eB} = \left\{ \langle L\phi_e, \phi_e \rangle_{\Omega_e} + \nu' \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 \right\}^{-1} \langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2 \quad (34)$$

また, 式 (30),(28) は以下のように表すことができる。

$$\langle L\bar{u}_i^h + p_{,i}^h, \bar{v}_i \rangle + \sum_{e=1}^{Ne} \langle L\phi_e, \bar{v}_i^h \rangle_{\Omega_e} b_{ei} = 0 \quad (35)$$

$$\langle \bar{u}_{i,i}^h, q^h \rangle + \sum_{e=1}^{Ne} \langle \phi_{e,i}, q^h \rangle_{\Omega_e} b_{ei} = 0 \quad (36)$$

式 (35),(36) に式 (33) を代入することにより, 運動方程式と連続式は結果的に有限要素近似解 $(\bar{u}_i^h, p^h) \in \bar{V}_i^h \times Q^h$ を見いだす問題となる。

$$\langle L\bar{u}_i^h + p_{,i}^h, \bar{v}_i^h \rangle - \sum_{e=1}^{Ne} \langle L\phi_e, \bar{v}_i^h \rangle_{\Omega_e} \tau_{eB}$$

$$\langle L\bar{u}_i^h + p_{,i}^h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \frac{A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} = 0 \quad \forall \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h \quad (37)$$

$$\langle \bar{u}_{i,i}^h, q^h \rangle - \sum_{e=1}^{Ne} \langle \phi_{e,i}, q^h \rangle_{\Omega_e} \tau_{eB}$$

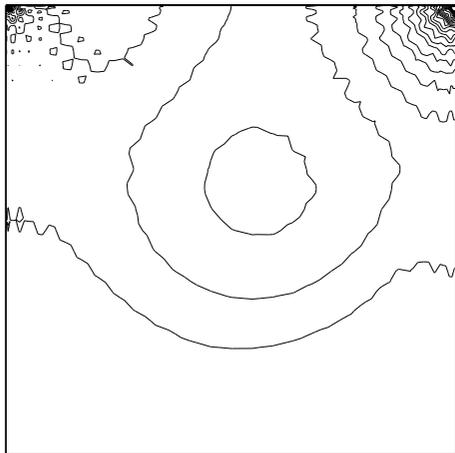
$$\langle L\bar{u}_i^h + p_{,i}^h, \phi_e \rangle_{\Omega_e} \frac{A_e}{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2} = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (38)$$

式 (37),(38) により, 現象が定常状態に収束する問題では, 改良型気泡関数要素 (Least-Squares Bubble) を用いた有限要素近似は GLS 型の安定化有限要素近似となっていることがわかる。また, GLS 型の安定化有限要素近似との対応をもたせるために, 本研究では ν' を次式のように決定している。

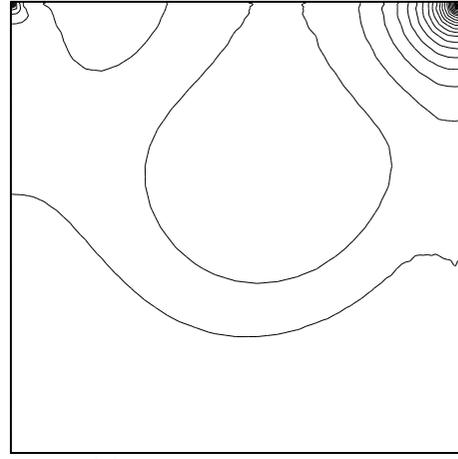
$$\begin{aligned} & \langle L\phi_e, \phi_e \rangle_{\Omega_e} + \nu' \|\phi_{e,j}\|_{\Omega_e}^2 \\ &= \frac{\langle \phi_e, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{A_e} \left[\left(\frac{2|u_i^{h*}|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \delta_{ij} \quad (39) \end{aligned}$$

7. 解析例

安定化作用を導入したことによる効果を検討するために, Cavity 流れを取り上げる。Fig. 3 に圧力の計算結果を示す。Fig. 3 から解るように, Q1b/Q1 を用いた場合の計算結果 (a) は, 数値粘性が不足しているために圧力振動が著しく発生しているのに対して, Least-Squares Bubble を用いた場合の計算結果 (b) は, 適切な数値粘性が与えられていることから圧力振動が発生していないことが解る。



(a) Q1b/Q1



(b) Least-Squares Bubble

Fig. 3: Quadrangle element(Re=400,T=37.5)

8. 結言

本研究では, Petrov-Galerkin 型の定式化に基づく改良型気泡関数要素 (Least-Squares Bubble) を用いた有限要素近似において, 現象が定常状態に収束する問題では, この近似が GLS 型の安定化有限要素近似となっていることを示した。また, 解析例として Cavity 流れの解析を取り上げ, 安定化作用を導入することにより適切な粘性を与えることができ, 圧力振動を回避できることを示した。

参考文献

1. Pierre, R., Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P_1 - P_1 element for the Stokes problem, *SIAM J. Num. Anal.*, **32**(1995), pp.1210-1224.
2. 山田 貴博, 非適合気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素スキーム, 計算工学講演会論文集, **2**(1997), pp.411-414.
3. 松本, 梅津, 川原, 線形型気泡関数を用いた非圧縮粘性流体解析と適応型有限要素法, 応用力学論文集, **2**(1999), pp.223-232.
4. Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R., Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **32**(1982), pp.199-259.
5. Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R., Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **95**(1992), pp.221-242.
6. Brezzi, F., Bristeau, M.-O., Franca, L.P., Mallet, M. and Roge, G., A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **96**(1992), pp.117-129.
7. Pierre, R., Simple C^0 approximations for the computation of incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **68**(1988), pp.205-227.
8. Franca, L.P. and Farhat, C., Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **123**(1995), pp.299-308.
9. Baicocchi, C., Brezzi, F. and Franca, L.P., Virtual bubbles and Galerkin-Least-Squares type method(Ga.L.S.), *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **105**(1993), pp.125-141.