

有限要素法解析における対流項の検討

Verification of convection term on finite element analysis

○ 榎原孝文, 慶大理工, 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: makihara@tana.mech.keio.ac.jp

棚橋隆彦, 慶大理工, 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: taka@mech.keio.ac.jp

Takafumi Makihara, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan

Takahiko Tanahashi, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan

We have some kinds of formulations of the convection term in the Navier-Stokes equation, for example gradient form, divergence form, skew-symmetric form and rotational form. When we analyze an incompressible flow, these formulations are equal to each other with the continuity equation. However, each numerical result is different because we can't satisfy the equation completely in our calculation. In the present paper, we discuss the formulation of the convection term and its discretization on finite element analysis.

1. 緒言

流れの数値解析を行う際には支配方程式の離散化手法を問わず、物理量の保存性が重要であることはよく知られており、差分法では保存性について詳細な検討が行われている⁽¹⁾⁽²⁾。しかしながら有限要素法では差分法ほど詳細に検討されているとは言えず⁽³⁾、また差分法と有限要素法では異なる部分も多いため、これまで有限要素法を用いて解析を行ってきた著者は有限要素法における保存性について議論する必要があると考える。差分法ではスタガード配置やコロケーション配置のように物理量の配置についていくつか考えられるため、対流項の表現形式が同じであっても離散化が異なる場合がある。そのため物理量の配置によって整合性のある離散化について詳細に検討されている。一方有限要素法では双一次要素の Galerkin 法が用いられる場合が多く、また通常、物理量の配置も速度ベクトルを格子点に圧力を要素中心に配置されることが多く、この条件下では差分法と異なり同じ形式の方程式の各項は補間関数が同じなら一通りに離散化される。そしてその離散化は二次中心差分に一致することが知られている。そのため有限要素法においては差分法と異なる保存性に対する議論が必要となり、方程式の各項の表現形式が保存性の議論の対象一つであると言える。ただし近年では電磁気学で用いられている辺要素や面要素に対するベクトル形状関数を流体解析への適用も研究されつつあり⁽⁴⁾⁽⁵⁾、この形状関数を用いれば保存性が向上することが知られており、発展次第では別の議論が行われることが考えられる。以上のような背景および二次中心差分でも最高精度の計算を要求する乱流の直接数値計算が可能であるという結果が示されている状況から、本論文では前述の線形形状関数を用いた双一次要素の Galerkin 法を離散化手法に採用して、流れの数値解析で特に重要となる非線形項の表現形式の違いによる計算領域全体の保存性について層流解析で検討し、さらに非線形項の取り扱いが重要となる乱流の LES (Large Eddy Simulation) において DNS (Direct Numerical Simulation) データベースと比較することで各形式の特徴を把握する。

一般に流れの有限要素法解析において Navier-Stokes 方程式の対流項には勾配型の形式が用いられる場合が多いが、本来 Navier-Stokes 方程式が運動量保存則から導かれることを考えると、発散型が用いられることが望ましいように思われる。両者は連続の式が完全に満足されれば互換であるが、数値解析で連続の式を完全に満たすことは困難である。例えば本論文で扱う GSMAC 有限要素法⁽⁶⁾では圧力に関する Poisson 方程式の流速と圧力の同時緩和反復の際に収束判定基準として連続の式が小さな値をとることを要求するが、完全に零になるわけではない。その他の解析手法でもこれは同じである。その結果、勾配型と発散型では解析結果に誤差が生じることになるはずであるが、有限要素法解析においてはこれらの対流項の

形式による解析誤差について比較検討されておらず、検討の必要があると思われる。さらに勾配型と発散型の平均をとる形式として混合型も考えられる。混合型は速度二乗量および運動エネルギーに対して保存形であることが示され、差分法で用いられることが多いが有限要素法で用いられることは少なく、比較検討すべき形式であると考えられる。また初期の GSMAC 有限要素法⁽⁷⁾で用いられた回転型も考えることができる。GSMAC 有限要素法においては近年では勾配型を用いているが、これらの優劣を比較検討した例はなくここで比較を行ってみる。

以上のように対流項の表現形式には勾配型 (Gradient form)、発散型 (Divergence form)、混合型 (Skew-Symmetric form)、回転型 (Rotational form) が考えられ、これらの形式の解析的特性の詳細は森西に詳しい⁽¹⁾。有限要素法解析で勾配型が用いられるのは対流速度に要素平均を用いることで離散化が容易になることや速い流れを安定に解析するために必要な上流化を取り込みやすいことなどが考えられる。しかしながら上流化については他で議論するとして、計算要領について考えると、要素平均を用いることで発散型を用いても計算容量を増やさずに容易に計算を行うことができる。本論文では上記 4 つの形式に対して、まず正方形および立方体キャビティ内流れの層流解析によって計算領域全体の物理量の総量という意味での保存性を比較検討する。この結果回転型表示が特に優れるという結果を示さず、また上流化を取り込みにくい形式であることから、次の解析となる LES では回転型を除いて比較する。本論文では Smagorinsky モデルを用いた Channel 乱流の LES を行い、DNS データベースと比較することで勾配型、発散型、混合型の各形式の解析精度について Grid スケールの平均量を対象として比較検討を行う。

2. 対流項の形式およびその離散化

2.1 対流項の形式

有限要素法による非圧縮性流体の流れ解析を行う多くの場合、流れを記述する支配方程式である連続の式と Navier-Stokes 方程式は以下のように書かれる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

ここで方程式は適切に無次元化されているものとし、 $\mathbf{u}$, p , Re はそれぞれ速度ベクトル、圧力、Reynolds 数である。本来、運動量保存則から導かれる Navier-Stokes 方程式 (2) の左辺第 2 項に示される対流項は保存形式として

$$(\text{Convection term}) = \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (3)$$

と発散型で表されるが、連続の式 (1) を考慮することによって式 (2) のように勾配型で書くこともできる。数値解析において連続の式 (1) が完全に満足されれば対流項の勾配型と発散型は互換であるが、一般には式 (1) が完全に満足されることはなく、互換性はない。また対流項の形式には勾配型と発散型の平均をとる混合型があり以下のように書かれる。

$$(\text{Convection term}) = \frac{1}{2} \{ \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \} \quad (4)$$

さらに勾配型の対流項において以下のベクトル解析の公式を用いて

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

初期の GSMAC 有限要素法で用いられた回転型を考えることができる。ただし $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度ベクトルである。

以下に比較検討する勾配型、発散型、混合型、回転型の 4 つの対流項の表現形式をまとめる。

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{Gradient form}) \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (\text{Divergence form}) \quad (7)$$

$$\{ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \} / 2 \quad (\text{Skew-Symmetric form}) \quad (8)$$

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (\text{Rotational form}) \quad (9)$$

ただし、回転型における動圧部分 $\nabla(u^2/2)$ は圧力項に取り込むものとする。

2.2 対流項の離散化

次にこれらの形式の双一次要素 Galerkin 法による離散化を考える。一般に有限要素法による離散化は差分法による離散化に比べ、係数行列を必要とするために記憶容量が大きくなってしまふ。そこでここでは要素平均を用いることにより、記憶容量を小さくすることを考えて離散化を行う。そのため勾配型では従来から行われている移流速度を、発散型ではテンソル $\mathbf{u}\mathbf{u}$ 、回転型では渦度ベクトルに要素平均を用いる。その結果離散化された各々は以下のように書かれる。

$$\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta \quad (\text{Gradient form}) \quad (10)$$

$$-(\mathbf{u}\mathbf{u})_e C_\alpha \quad (\text{Divergence form}) \quad (11)$$

$$\{ \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{u} - (\mathbf{u}\mathbf{u})_e C_\alpha \} / 2 \quad (\text{Skew-Symmetric form}) \quad (12)$$

$$M_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta \times \boldsymbol{\omega}_e \quad (\text{Rotational form}) \quad (13)$$

ここで移流行列 $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ 、勾配行列 C_α 、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ は線形状関数 N_α

$$N_\alpha = \frac{1}{2} (1 + \xi_\alpha \xi) \quad (1D) \quad (14)$$

$$N_\alpha = \frac{1}{4} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \eta_\alpha \eta) \quad (2D) \quad (15)$$

$$N_\alpha = \frac{1}{8} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \eta_\alpha \eta) (1 + \zeta_\alpha \zeta) \quad (3D) \quad (16)$$

を用いてそれぞれ以下のように書かれる。ただし、 ξ, η, ζ は計算空間の座標であり、下添字 α は局所節点番号である。

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \int_\Omega N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega \quad (17)$$

$$C_\alpha = \int_\Omega \nabla N_\alpha d\Omega \quad (18)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_\Omega N_\alpha N_\beta d\Omega \quad (19)$$

また下添字 α, β は局所節点番号、 e は要素平均、 Ω は有限要素内部を表し、Divergence form と Skew-Symmetric form の発散型の部分では部分積分を用いたが、ここでは境界積分項の表記を省略している。

本論文では対流項の影響のみを検討することから、Navier-Stokes 方程式 (2) 中の他の非定常項、圧力項、粘性項に関しては以下のように同一の離散化を用いることとする。

$$(\text{Unsteady term}) = \overline{M}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{u}_\beta}{\partial t} \quad (20)$$

$$(\text{Pressure term}) = C_\alpha p_e \quad (21)$$

$$(\text{Viscous term}) = -\frac{1}{Re} D_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta \quad (22)$$

ただし、 $\overline{M}_{\alpha\beta}$ は集中質量行列、 $D_{\alpha\beta}$ は以下に示す拡散行列である

$$D_{\alpha\beta} = \int_\Omega \nabla N_\alpha \cdot \nabla N_\beta d\Omega \quad (23)$$

また圧力項および拡散項の離散化に対しては部分積分を用いており、境界積分項は以下ようになる。

$$(\text{Boundary integral term}) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{Re} N_\alpha \mathbf{n} \cdot \nabla N_\beta \mathbf{u}_\beta - N_\alpha p_e \mathbf{n} \right) d\Gamma \quad (24)$$

ただし、 Γ および $\mathbf{n}$ はそれぞれ有限要素境界とその外向き法線ベクトルである。

3. 二次元解析

3.1 解析モデルおよび解析条件

解析モデルにはまず二次元正方形キャビティ内強制対流を用い、詳細に比較検討する。要素数、格子幅 $\Delta L_{\min}$ および時間刻み幅 Δt の解析条件を表 1 に示す。対流項の表現形式の違いによる解析結果の違いを検討するために極力他の誤差要因を取り除くことを考え、要素数を変えても Courant 数 CFL を統一 ($CFL = 0.4$) し、かつ正方形の有限要素を形成するために格子分割は等間隔とした。Reynolds 数は $Re = 1000$ である。Navier-Stokes 方程式の解法には GSMAC 有限要素法⁽⁶⁾を用いたが、ここでは BTD 法のような安定化手法を取り入れないように時間進行には対流項および拡散項ともに二次精度 Adams-Bashforth 法を用いた。また Poisson 方程式の収束判定基準は $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ とした。初期条件は Impulsive start とし、解析は $t = 50$ まで行った。

Tab. 1: Numerical conditions for 2D

Mesh size	$\Delta_{\min}$	Δt	CFL
20 × 20	5.00×10^{-2}	2.0×10^{-2}	0.4
40 × 40	2.50×10^{-2}	1.0×10^{-2}	0.4
80 × 80	1.25×10^{-2}	5.0×10^{-3}	0.4
160 × 160	6.25×10^{-3}	2.5×10^{-3}	0.4

3.2 解析結果および検討

図 1 に本解析で用いたスキームの解析精度を示すために、ほぼ定常状態と判断できる $t = 50$ における中心軸上速度分布を Ghia らの解⁽⁸⁾と同時に示した (以下同様に $t = 50$ における比較を示す)。ただし紙面の都合上ここでは発散型のみを示すこととし、他の形式による結果も同様の格子依存性を示したことを付記しておく。20 × 20 の要素では明らかに要素が不足していることが分かるが、これは境界層に壁面近傍の格子点がないためであり、要素の増加とともに Ghia らの解に近づき、160 × 160 の要素では良好に一致する。図 2 および 3 には 20 × 20 と

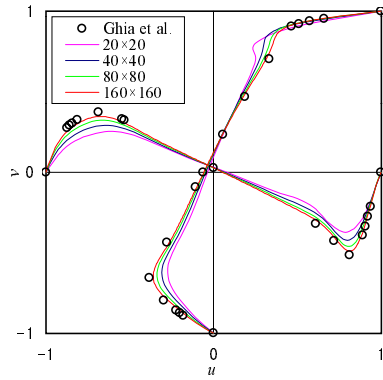


Fig. 1: Velocity profiles of divergence form

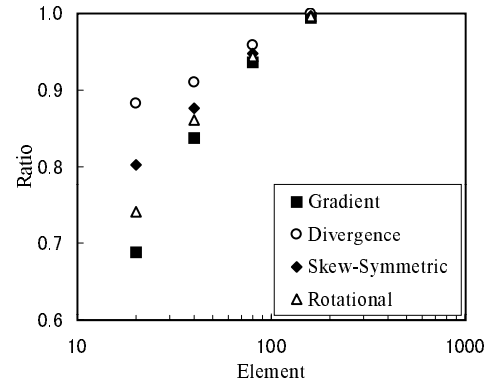


Fig. 4: Ratio of total absolute velocity $|u|$

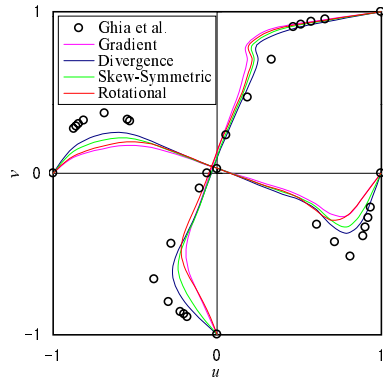


Fig. 2: Velocity profiles using 20×20 elements

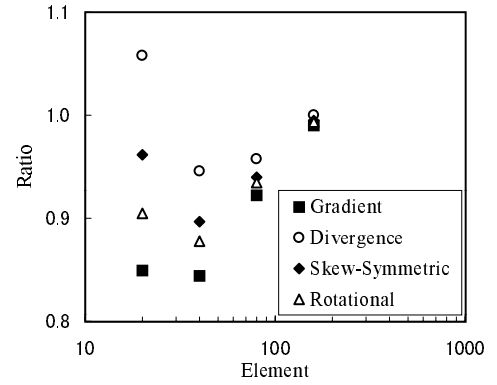


Fig. 5: Ratio of total square velocity u^2

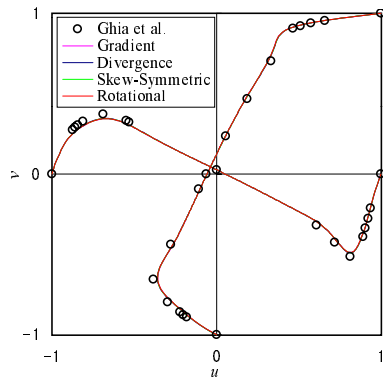


Fig. 3: Velocity profiles using 160×160 elements

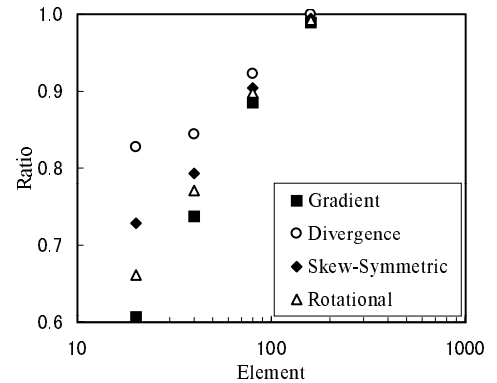


Fig. 6: Ratio of total kinetic energy K

160×160 の要素を用いた各対流項形式による解の違いを示した。図3のように十分な要素を用いれば紙面では違いの区別がつかないが、図2のように不十分な要素では違いがはっきりと分かり、発散型を用いた解析結果優れていることがわかる。

定量的な評価として図4, 5, 6に計算領域全体における物理量の総量の格子依存性を 160×160 の要素を用いた発散型に対する比で示した。ただしここでは紙面の都合上、水平速度成分の絶対値 $|u|$ 、水平速度の二乗量 u^2 および運動エネルギー K のみとし、具体的な数値および鉛直速度成分に関する量は表2に示すこととした。図4, 5, 6において要素が十分に確保される場合 (160×160) には対流項の表現形式にほとんど依存せずに結果は一致

する。特に Gradient form を除いては 1% の誤差もない。しかしながら要素が不十分になるにつれて対流項の表現形式の違いがかなり顕著に現れる。本解析に対しては他の3つ形式に比べて要素数依存が小さい発散型が対流項の表現形式として優れていると言える。(図5において要素数が小さいときに1を越えるのは上面速度が過大に評価されるためである。)

Tab. 2: Conservation and its ratio

	Gradient form				Divergence form			
Element	20	40	80	160	20	40	80	160
$ u $	0.688	0.837	0.936	0.944	0.882	0.910	0.958	1
$ v $	0.519	0.759	0.910	0.994	0.723	0.839	0.934	1
u^2	0.849	0.844	0.922	0.990	1.058	0.946	0.957	1
v^2	0.312	0.607	0.840	0.989	0.548	0.721	0.880	1
K	0.606	0.737	0.885	0.989	0.828	0.844	0.922	1
	Skew-Symmetric form				Rotational form			
Element	20	40	80	160	20	40	80	160
$ u $	0.802	0.876	0.947	0.997	0.741	0.861	0.944	0.996
$ v $	0.637	0.801	0.922	0.997	0.565	0.782	0.917	0.995
u^2	0.962	0.897	0.940	0.995	0.905	0.878	0.934	0.993
v^2	0.445	0.668	0.860	0.994	0.365	0.642	0.853	0.992
K	0.728	0.793	0.904	0.995	0.661	0.771	0.898	0.993

4. 三次元解析

4.1 解析モデルおよび解析条件

次に解析モデルとして三次元立方体キャビティ内強制対流を用い、比較検討を行う。要素数、格子幅 $\Delta L_{\min}$ および時間刻み幅 Δt の解析条件を表 1 に示す。三次元解析の場合、要素数の増大は二次元より速く、二次元解析のように十分な要素を確保することが難しいため、ここでは不等分割要素を用いる。その結果 Courant 数 CFL を統一することはできなかったが、ここでは二次元解析の Courant 数より小さくなるように設定した。二次元解析と同様に Reynolds 数は $Re = 1000$ 、Navier-Stokes 方程式の解法には時間進行に対流項および拡散項ともに二次精度 Adams-Bashforth 法を用いた GSMAC 有限要素法である。また Poisson 方程式の収束判定基準は $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ とした。初期条件は Impulsive start とし、解析は $t = 50$ まで行った。

Tab. 3: Numerical conditions for 3D

Mesh size	$\Delta_{\min}$	Δt	CFL
$20 \times 20 \times 20$	1.73×10^{-2}	5.0×10^{-3}	0.29
$30 \times 30 \times 30$	1.12×10^{-2}	2.5×10^{-3}	0.22
$60 \times 60 \times 60$	5.40×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.19

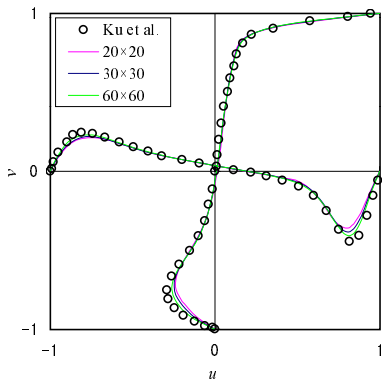
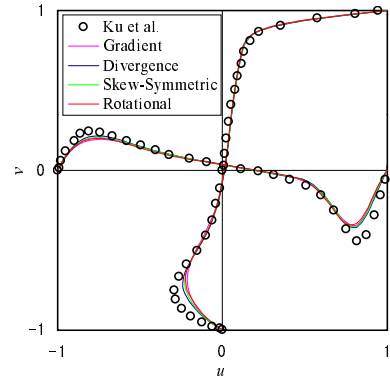
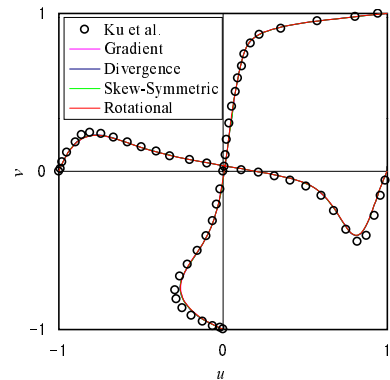


Fig. 7: Velocity profiles of divergence form

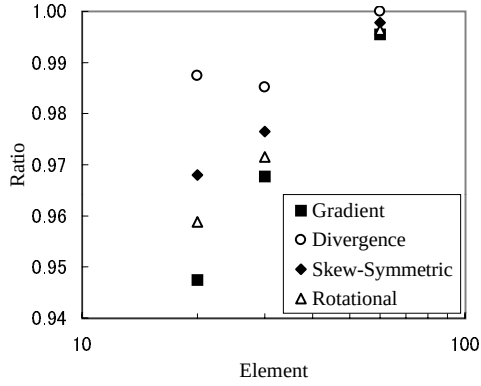
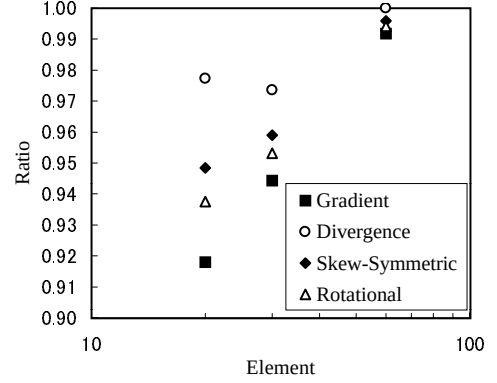
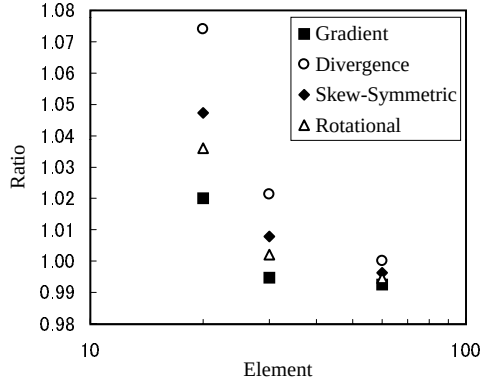
4.2 解析結果および検討

前節の二次元解析同様、まず図 7 に本解析で用いたスキームの解析精度を示すために発散型による結果の中心軸上速度分布を Ku らの解⁽⁹⁾と同時を示した。他の形式による結果も同様の格子依存性を示したことを付記して

Fig. 8: Velocity profiles using $20 \times 20 \times 20$ elementsFig. 9: Velocity profiles using $60 \times 60 \times 60$ elements

Tab. 4: Conservation and its ratio

	Gradient form			Divergence form			Skew-Symmetric form			Rotational form		
Element	20	30	60	20	30	60	20	30	60	20	30	60
$ u $	0.947	0.968	0.996	0.987	0.985	1	0.968	0.976	0.998	0.959	0.972	0.996
$ v $	0.866	0.928	0.995	0.909	0.948	1	0.888	0.938	0.997	0.878	0.933	0.996
$ w $	0.905	0.949	0.993	0.972	0.979	1	0.937	0.963	0.996	0.929	0.959	0.995
u^2	1.020	0.995	0.992	1.074	1.021	1	1.047	1.008	0.996	1.036	1.002	0.995
v^2	0.773	0.873	0.991	0.839	0.905	1	0.807	0.889	0.995	0.797	0.883	0.994
w^2	0.834	0.905	0.983	0.977	0.970	1	0.901	0.936	0.991	0.882	0.927	0.990
K	0.918	0.944	0.992	0.977	0.974	1	0.948	0.959	0.996	0.937	0.953	0.994

Fig. 10: Ratio of total absolute velocity $|u|$ Fig. 12: Ratio of total kinetic energy K Fig. 11: Ratio of total square velocity u^2

おく。不等分割要素を用いたにも関わらず $20 \times 20 \times 20$ の要素では若干の要素不足が確認されるが、要素の増加とともに Ku らの解に近づき、 $60 \times 60 \times 60$ の要素では良好に一致する。図8および9には $20 \times 20 \times 20$ と $60 \times 60 \times 60$ の要素を用いた各対流項形式の違いを示した。図9のように十分な要素を用いれば紙面では区別がつかないが、図8のように不十分な要素では違いが分かり、発散型を用いた解析結果が優れていることがわかる。

定量的な評価として図10, 11, 12に計算領域全体における物理量の総量の格子依存性を $60 \times 60 \times 60$ の要素を用いた発散型に対する比で示した。ただしここでは紙面の都合上、水平速度成分の絶対値 $|u|$ 、水平速度の二乗量 u^2 および運動エネルギー K のみとし、具体的な数値お

よび鉛直速度成分に関する量は表4に示すこととした。図10, 11, 12において要素が十分に確保される場合 ($60 \times 60 \times 60$) には対流項の表現形式にほとんど依存せずに結果は一致する。しかしながら要素が不十分になるにつれて対流項の表現形式の違いがかなり顕著に現れる。二次元解析同様本解析に対して他の3つ形式に比べて要素数依存が小さい発散型が対流項の表現形式として優れていると言える。

5. Channel 乱流の LES

5.1 Smagorinsky モデル

Navier-Stokes 方程式 (2) に filtering 操作を施すと以下のように書かれる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (25)$$

ここで

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{2}{3}E, \quad \tau_{ij}^* = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} \quad (26)$$

であり、SGS の運動エネルギー E とは応力 τ_{ij} は

$$E = \frac{1}{2}\tau_{kk} = \frac{1}{2}(\overline{u_k u_k} - \bar{u}_k \bar{u}_k) \quad (27)$$

$$\tau_{ij} = \underbrace{(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j)}_{L_{ij}} + \underbrace{(\overline{u_i u'_j} + \overline{u'_i u_j})}_{C_{ij}} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{R_{ij}} \quad (28)$$

と書かれ、右辺第一項は Leonard 項 L_{ij} 、第二項は Cross 項 C_{ij} 、第三項は subgrid scale (SGS) の Reynolds 応力項

R_{ij} である。ただし、本解析では Leonard 項と Cross 項の間に強い負の相関があることを利用して

$$L_{ij} + C_{ij} = 0 \quad (29)$$

とする。SGS の Reynolds 応力項を勾配拡散形に書く。

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} = -2K \bar{S}_{ij} \quad (30)$$

ここで

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (31)$$

は grid scale の流れ場のひずみ速度テンソル、 K は sub-grid scale の渦粘性係数であり、Smagorinsky モデルを用いて以下のように書かれる (Normal)。

$$K = (C_s \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} = C_s^2 \Delta^2 |\bar{S}| \quad (32)$$

Δ は有限要素法の解析において有限要素体積 V_e を用いて

$$\Delta = (V_e)^{1/3} \quad (33)$$

として解析する。本解析では壁乱流の標準値として用いられているように $C_s = 0.1$ とする。

主流が非回転場では流体の加速度はソレノイダル場であり、加速度の発散 $\alpha_{i,i}$ は零になる。

$$\alpha_{i,i} = \frac{du_{i,i}}{dt} + S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} \omega_i \omega_i = 0 \quad (34)$$

ゆえに流体が非圧縮で $u_{i,i} = 0$ のとき

$$2S_{ij} S_{ij} = \omega_i \omega_i \quad (35)$$

となり、渦粘性係数 K は vorticity モデルによっても

$$K = (C_s \Delta)^2 (\bar{\omega}_i \bar{\omega}_i)^{1/2} \quad (36)$$

と表現できる。ただし前報で顕著な優位性が確認されなかったため⁽¹⁰⁾、本論文では標準モデル (32) を用いる。Reynolds 応力項に Smagorinsky モデルを適用し、以下の閉じた方程式系を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ K \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (38)$$

ここで、 $\bar{P} = \bar{p} + 2E/3$ である。また、Smagorinsky モデルのままでは壁面での SGS 応力がゼロとならないため、Smagorinsky モデル定数に以下の Van Driest の壁面減衰関数 f

$$f = 1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \quad (39)$$

を乗じる。ここで u_τ 、 τ_w 、 ρ は以下に示される壁面摩擦速度、壁面摩擦応力と密度である。

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad A^+ = 25 \quad (40)$$

5.2 解析モデルおよび解析条件

解析モデルには乱流解析のベンチマーク問題となっている channel 乱流を扱い、解析領域は流れ方向 (x)、壁面方向 (y)、スパン方向 (z) に $3.2H \times 1.0H \times 1.6H$ とした。壁面摩擦速度に基づく Reynolds 数は $Re_\tau (\equiv u_\tau H/\nu) = 360$ である。境界条件は流れ方向とスパン方向に周期境界条件、壁面上で滑りなしの条件を用いる。このとき流れを維持するために無次元圧力勾配

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2.0 \quad (41)$$

を与えた。要素分割は $32 \times 40 \times 32$ であり、壁座標に基づく格子間隔は $\Delta x^+ : \Delta y^+ : \Delta z^+ = 36 : 2.96 : 19.81 : 18$ である。解析の時間刻み幅は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ とした。初期条件には勾配型の対流項による離散化で予備計算を行い、十分に発達した状態の瞬時値を用いた。解析は回転型を除く 3 つの対流項形式を用いた。

5.3 解析結果および検討

図 13 に平均速度分布を示した。平均速度分布は勾配型が DNS データと良好に一致しており、混合型、発散型の順に過小に見積もられた。一方、図 14 から 16 に示した乱流強度 (図 14 が u_{rms} 、図 15 が v_{rms} 、図 16 が w_{rms}) では勾配型に比べると発散型が DNS データに最も近い分布を示す。これは特に図 14 における u_{rms} の分布において顕著にみられる。この原因は発散型は勾配型に比べて主流を過小に評価していることも考えられるが、前 2 章で見られたように保存が良好であることも考えられる。この点に関してはさらに細かい格子を用いて比較する必要

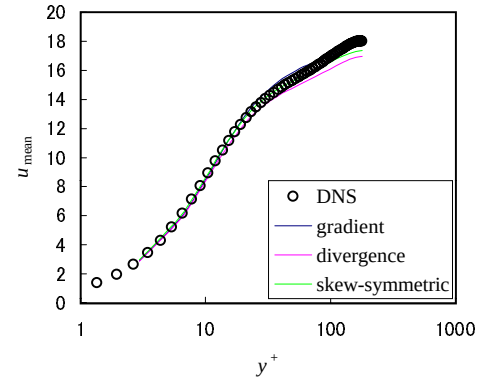


Fig. 13: Distributions of mean velocity

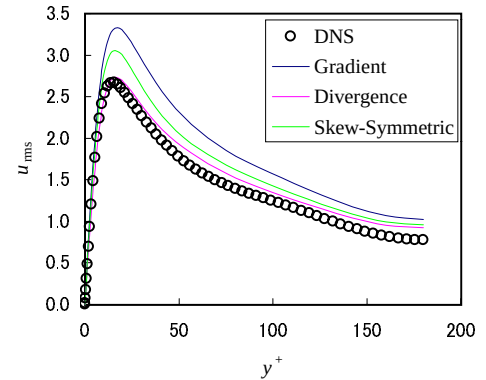


Fig. 14: Distributions of turbulent intensity

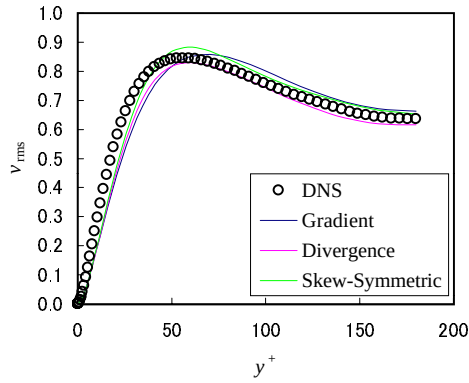


Fig. 15: Distributions of Reynolds stress

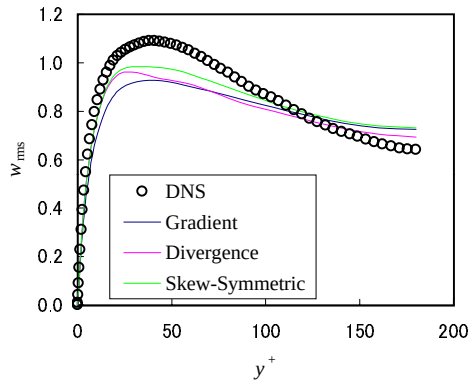


Fig. 16: Distributions of Reynolds stress

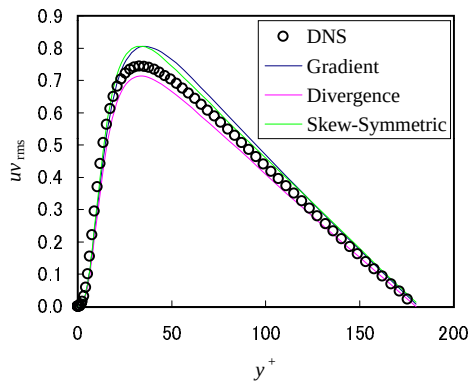


Fig. 17: Distributions of Reynolds stress

がある。(ただし、 $32 \times 64 \times 32$ の要素を用いた解析結果と本解析結果を勾配型で比較したところ大きな差は見られず、流れ方向およびスパン方向の分割数を増やすことが必要であったことを付記しておく) また図 17 に示した Reynolds 応力の分布においても乱流強度と同様の傾向を示したが、その原因は乱流強度と同じであると考えられる。

6. 結言

実用的な解析を行おうとする場合、十分な要素数が確保できる場合はないに等しく、多くの場合これを補うために上流化手法や乱流モデルが用いられる。しかしながらこれらの方法を用いる前に基本スキームの性能を把握しておかなければ、解析誤差を分離できなくなってしまう。そもそも流体計算では支配方程式が物理量の保存則から導かれているために、完全ではないにしてもなるべく物理量を保存するスキームを用いることが前提であり、有限要素法解析ではこの点に関する議論が少なかったように思われる。そこで本論文ではその第一段階として Navier-Stokes 方程式の対流項に異なる定式化を用いた場合の解析結果、特に解析領域全体の保存量を比較した。解析の対象には二次元正方形および三次元立方体キャビティ内強制対流と Smagorinsky モデルを用いた平行平板間乱流の LES を用いた。その結果対流項の定式化に発散型を用いた場合、従来から用いられている勾配型や勾配型と発散型の平均をとる混合型および回転型に比べ物理量の保存性は要素数に依存しないことが分かった。本解析のように Reynolds 数の小さい流れでも保存性にが生じることを考えれば、高級なモデルを導入しても良好な解析結果が得られないことが考えられる。本論文では実用的な流れを解析していくことを念頭に置いて粘性流体を扱ったが、運動エネルギーが非粘性で保存される量であることから完全流体もしくはさらに大きな Reynolds 数で検証されるべきである。また有限要素法による離散化では対流項は一点積分することによって運動エネルギーが保存されるなどの議論もあり、まだ多くの検討すべき問題が残っている。

最後に著者の一人 (楨原孝文) は日本学術振興会特別研究員であり、本研究は文部省科学研究費補助金の援助を受けて行われたものである。ここに改めて謝意を表す。

参考文献

- 梶島, 機論, **60**-574, B(1994), 2058.
- 森西, 機論, **62**-604, B(1996), 4090.
- 大島・小林・谷口, 機論, **63**-610, B(1997), 1995.
- 棚橋, CFD の基礎理論, 第 12 章, (1999), アイピーシー.
- 松本・棚橋, 第 13 回計算力学講演会講演論文集, (2000), 113.
- 加藤・棚橋, 機論, **57**-540, B(1991), 2640.
- 棚橋・斉藤, 京都大学数理解析研究所講究録, **548**, (1985), 122.
- Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., *J. Comp. Phys.*, **48**, (1982), 387.
- Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D., *J. Comp. Phys.*, **70**, (1987), 439.
- 楨原・棚橋, 日本流体力学会年会 2000 講演論文集, (2000), 597.