Helmholtz 分解表示要素を用いた非圧縮流外挿解のエネルギー保存スキーム

Numerical Scheme for Energy Conservation of Explicit Values Using Helmholtz Decomposite Element in Incompressible Fluid

今村 純也, IMI 計算工学研究室（理研研究嘱託）,
〒351-0114 埼玉県和光市本町 31-9-803,E-mail:jimamura@ra2.so-net.ne.jp
棚橋 隆彦, 慶大理工, 〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail:taka@mech.keio.ac.jp
Junya IMAMURA, IMI Computational eng.Labo., Honcho 31-9-803, Wako-shi, 351-0114 JAPAN
Takahiko TANAHASHI, Keio University, Hiyoshi 3-14-1, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8552 JAPAN

The numerical model, in which primitive variable is used, satisfy the continuity condition as week solution. On the other hand, the model using Helmholtz decomposite element does as strong solution. The latter model is more accurate than the former one in term of the acceleration in the element, because Navier-Stokes equation using spatial differentials of the Helmholtz element takes advantage of its calculation. In this study, we applied C1-continuity Helmholtz element to the model and constructed a scheme for energy conservation of explicit values using the acceleration.

１．目 的

連続の式を弱解として満足させる要素ではミクロにはは圧縮性を含むので、要素内離散点で求める加速度の取り扱いには留意が必要である。これに対し、基底関数をベクトルポテンシャルとする有限要素は連続の式を常に満足するので、保存形と非保存形の式は数値的にも一致する。したがって、要素内離散点で求める加速度の精度は高く、そのエネルギーを保存するよう計算を進めることは意義があると考える。

しかし、非線形項の存在により加速度は空間的に高次となり、これを同じ要素の次数で表現することはできない。そこで離散化解析ではこれを平均化して、運動量が保存（有限体積法、ガレルキン法など）されるよう表現する。その場合、エネルギーは必ずしも保存されていない。

エネルギーは極微細要素による（DNS）か、乱流モデルを加えることで保存するよう近づけるのが一般である。

本研究では、平均化された流速のエネルギーを元の加速度から求まるエネルギーを保存するよう補正し、次ステップの加速度分布に反映させることで高レイノルズ数流れにも対応可能なスキームの開発を目指している。

なお、本稿では非圧縮を仮定する。（圧縮性熱対流への適用法は別稿 E05-3 参照。）

２．方 法

２.１ 基礎方程式

添え字なしはいずれも平均流を表し、U_iは流速, τ_{ij}は粘性応力, Pは圧力とし、密度は基準化して表し、連続の式は(1)式、運動方程式は(2)式とする。

連続の式：
$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

運動方程式：
$$\frac{\partial U_i}{\partial \mathrm{t}} = F_i \tag{2}$$

ただし、空間微分項を F_i にまとめ次式とする。

$$F_i \equiv -\frac{\partial(U_iU_j - \tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

また、(1)式がミクロにも満足されているならば、

$$F_i \equiv -U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

２.２ 輸送方程式のモデル化

(1) 有限要素

平均流と圧力にはＣ$_1$連続な双３次矩形要素を、後述の補正関数にはいずれもＣ$_0$連続な双１次矩形要素を用いる。

双３次要素は２Ｄでは隅点ノードに次の４自由度の未知数ベクトルを有する。ただし、fは流れ関数ψまたは圧力 P である。

ノード未知数ベクトル： $\{f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\}$

(2) 平均流輸送方程式

流速 U_i は Helmholtz 分解してベクトルポテンシャル ψ_i で表し、連続の式(1)を完全に満足させる。

$$U_i \equiv \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x_{i-1}} \tag{3}$$

ここに、*(i=1,2,3)(i+1=2,3,1)(i-1=3,1,2)*

平均流で表わされる運動エネルギーと外挿値との間の誤差を補正するため F_i は(4)式で表現する。

$$F_i \equiv -\frac{\partial(U_iU_j - e^{\lambda}\tau_{ij} + \gamma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i} \tag{4}$$

(4)式の右辺に含まれる exp(λ)が散逸率を合わせるため、また γ_{ij} が運動エネルギーを保存するため導入した補正項である。

２.３ 外挿値

F_i を用いて線形外挿した流速を U_i^{ex} と記し、平均化された加速度（有限要素の基底関数で表現）による外挿流速を U_i^{n+1} と記して区別する。また、その空間勾配を用いて求めた散逸率をそれぞれ Φ_D^{ex} および Φ_D^{n+1} と記す。

$$U_i^{ex} = U_i^n + \Delta t F_i \tag{5}$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \frac{\partial U_i}{\partial t} \tag{6}$$

2.4 補正値

λおよびγ $_{ij}$ の初期値はゼロとし、まずΦ $_D^{ex}$ が保存されるようλを有限体積法で求める（A は検査領域）。

$$\int_A \underline{\underline{e^{\lambda}}}\Phi_D^{n+1}dA = \int_A \Phi_D^{ex}dA \qquad (7)$$

次いで、運動エネルギーに拡散を考慮した値が成分ごとに保存されるよう γ_{ij} を同様に有限体積法で求める。

$$\int_A (U_i^{n+1}U_j^{n+1} - e^{\lambda}\tau_{ij}^{n+1} + \underline{\underline{\gamma_{ij}}})dA = \int_A (U_i^{ex}U_j^{ex} + \tau_{ij}^{ex})dA \qquad (8)$$

2.5 平均流速および平均圧力

補正項に先立つ平均流の求め方は陰解法、陽解法ともに考えられるが、補正量λおよびγ $_{ij}$ が小さくなり、かつ計算負荷も少ない方法が望ましい。

検討の結果、平均加速度には連立方程式左辺を求め直さなくて済む次式を解く方法（ガレルキン法）を採用した。

$$\int_\Omega \delta U_i \times (\underline{\underline{\frac{\partial U_i}{\partial t}}} + U_j^{ex}\frac{\partial U_i^{ex}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{ex}}{\partial x_j})d\Omega = 0 \qquad (9)$$

加速度に先立ち、平均圧力はポアソン方程式を制約条件（有限体積式）として、運動量の残差分散を最小化する方法（最小２乗法）によって求める。

2.5 上流化

上流化は既提案[3]の方法による。すなわち、移流項の要素内積分は近似的に要素辺 ds あたり $\Delta t Vds$ だけ上流要素にはみ出して積分することに等しい。よって、この面積分は上流要素の関数で置き換えて積分する必要がある。

これは次式の要素辺一周積分項を加えることで達成される。

$$上流化項 \quad = +\Delta t \oint_S VU_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}ds \qquad (10)$$

Sは要素辺一周, V は要素辺垂直方向流速であり、移流項を $\Delta t Vds$ 面積分下流要素から減じ、その分上流要素を加えることとなる。一周積分することにより、加減の符号は V に含まれて実行される。

2.6 等価線積分項

有限要素法では要素間不連続量は線積分項として加算する。このためせん断力には発散定理を適用する。(9)式の積分において、外挿流速は不連続であるから移流項にも等価線積分項の導入が必要である。これは(11)式を付加することで達成される。ただし、k は s および s に直交方向。

$$移流項の等価線積分項 \quad = -\oint_S \delta U_k \times (V^{ex}U_k^{ex})ds \qquad (11)$$

発散定理適用による不連続量のモデル化は線積分項が現れないのでモデル化項の陰的表現と呼び、これに対し(11)式を加える形式をモデル化項の陽的表現と呼んで区別している。

陽的表現項は(8)式にも同様にして適用する。

４.数値計算例と考察

Re 数＝1×10^4 および 5×10^4 の２Ｄキャビティフローを数値計算した。

要素数はいずれも不等分割 50×50 要素（壁面に沿って５列を 1/152 幅、その他を約 1/42.8 幅×40 で分割）とし，時間ピッチは *Re* 数＝1×10^4 ではΔt＝1/1000、*Re* 数＝5×10^4 ではΔt＝1/2000 とした。

２Ｄではベクトルポテンシャルは ψ_3 のみであるから流れ関数 ψと記せば $U_1=\partial\psi/\partial x_2$ であり、双３次要素では U_1 は x_1方向３次式となる。よって、移動壁隅点では $U_1=0$ として垂直壁上端と一致させ、かつ $\partial U_1/\partial x_1=0$ として連続の条件も満足させた。

まず、既報告 *Re* 数＝1×10^4 の層流解（t =900 状態）の流速プロファイルを Ghia らの結果[5]とともに Fig. 1 に示す。以下にはこれと比較する形で本解析結果を示す。

提案モデルによる *Re* 数＝1×10^4 の結果は Fig. 1 とほとんど差がなかった。ここには図を省略するが、モデルの検証の１例として評価できる。

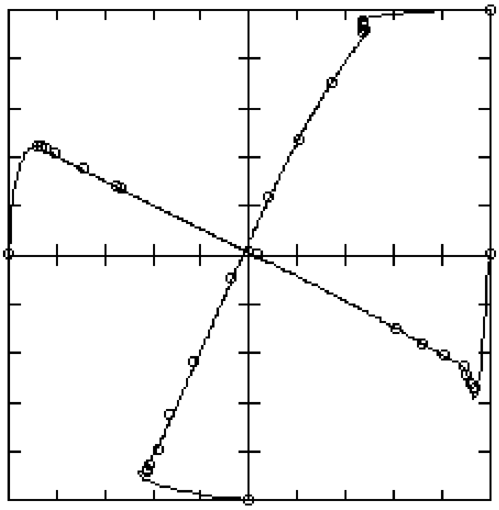
次に、*Re* 数＝5×10^4 の計算結果を Fig.1 との重ね書きで Fig. 2 に示す。*Re* 数＝5×10^4 では定常状態は存在せず、常に変動すると予想される。そこで t=450～470 の無次元時間 20 の平均で示す。これは主渦外縁の流速が 0.43 程度であるから、主渦が 2.5～3 回転する時間である。

同図から *Re* 数＝5×10^4 の主渦プロファイル部分は Fig. 2 とほとんど一致し、ほぼ直線であるから剛体回転していることとなる。

壁面近傍の詳細は Fig.3 に示す。これにより流速は壁面近傍で急勾配で変化する様子が読み取れる。

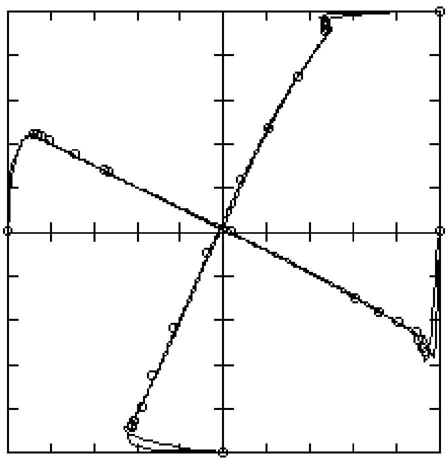
また、ψのコンターを Fig.4 に、P のコンターを Fig.5 に示す。

以上の結果より、本モデルの妥当性とλおよび γ_{ij} が運動エネルギーを保存し、かつ平均化する効果のあることが確認できたと判断する。



profile of U_i on geometrical center line
（○：Ghia et al.）

Fig. 1 distributions of result values of *Re*＝1×10^4 by laminar analysis (t=900. , Δt=1/1000)

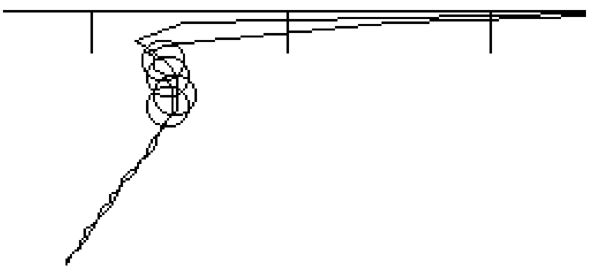


profile of U_i on geometrical center line

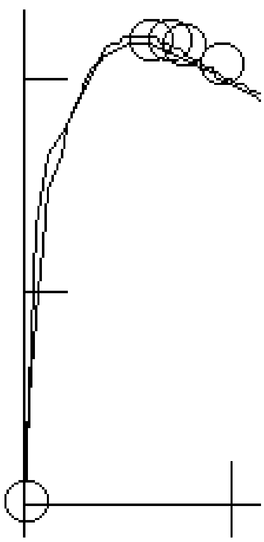
(○:Ghia et al.)

Fig. 2 overlay of profiles of both Re number

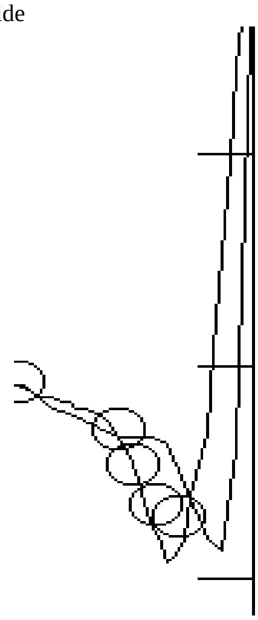
（Re 1×10^4 and 5×10^4）



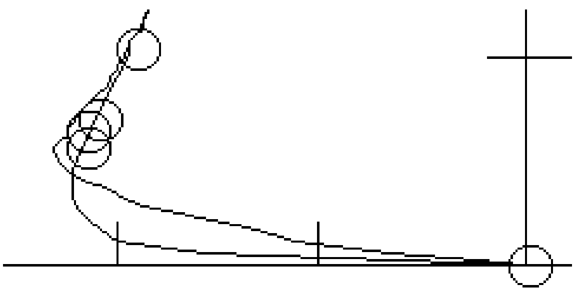
(a) top side



(b) left side

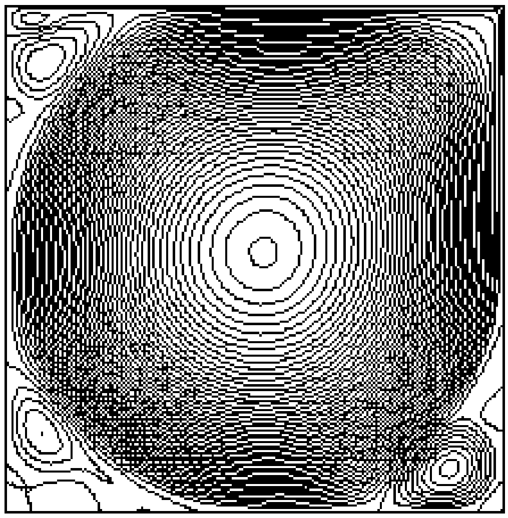


(c) right side

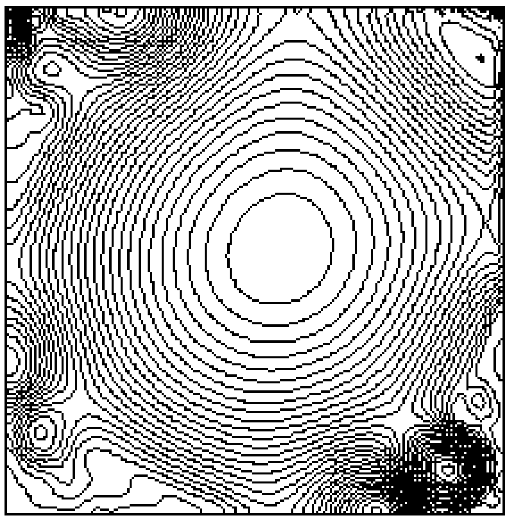


(d) bottom side

Fig.3 details of the profiles in Fig.2



(a) contour of ψ



(c) contour of P

Fig. 4 distributions of result values of $Re=5\times10^4$

(mean value,　t=450～470 ,　Δt=1/2000)

Fig.2 の壁面近傍のノード値を Table 1～4 に示す。この値を 3 次式で補間することで Fig.2 のプロファイルは作図できる。

Table.1 node values on geometric center
(along vertical line, from top)

x	y	ψ	∂ψ/∂y
0.50	1.0000	0.0000	0.0000
0.50	0.9934	-0.4511×10^{-2}	0.4919
0.50	0.9868	-0.7501×10^{-2}	0.4476
0.50	0.9803	-1.0499×10^{-2}	0.4649
0.50	0.9737	-1.3606×10^{-2}	0.4786
0.50	0.9671	-1.6781×10^{-2}	0.4857
0.50	0.9605	-1.9986×10^{-2}	0.4876
0.50	0.9539	-2.3186×10^{-2}	0.4846
0.50	0.9474	-2.6353×10^{-2}	0.4779

Table.2 node values on geometric center (along horizontal line, from left)

x	y	ψ	∂ψ/∂x
0.0000	0.50	0.0000	0.0000
0.0066	0.50	-0.1005×10^{-2}	–0.2606
0.0132	0.50	-0.2984×10^{-2}	–0.3272
0.0197	0.50	-0.5246×10^{-2}	–0.3592
0.0263	0.50	-0.7701×10^{-2}	–0.3862
0.0329	0.50	-1.0315×10^{-2}	–0.4076
0.0395	0.50	-1.3049×10^{-2}	–0.4223
0.0461	0.50	-1.5859×10^{-2}	–0.4310
0.0526	0.50	-1.8709×10^{-2}	–0.4348

Table.3 node values on geometric center (along horizontal line, to right)

x	y	ψ	∂ψ/∂x
0.9474	0.50	-2.5160×10^{-2}	0.4639
0.9539	0.50	-2.2102×10^{-2}	0.4652
0.9605	0.50	-1.9045×10^{-2}	0.4644
0.9671	0.50	-1.5967×10^{-2}	0.4746
0.9737	0.50	-1.2732×10^{-2}	0.5140
0.9803	0.50	-0.9189×10^{-2}	0.5637
0.9868	0.50	-0.5415×10^{-2}	0.5747
0.9934	0.50	-0.1895×10^{-2}	0.4798
1.0000	0.50	0.0000	0.0000

Table.4 node values on geometric center (along vertical line, to bottom)

x	y	ψ	∂ψ/∂y
0.50	0.0526	-2.0668×10^{-2}	–0.4315
0.50	0.0461	-1.7811×10^{-2}	–0.4370
0.50	0.0395	-1.4902×10^{-2}	–0.4414
0.50	0.0329	-1.2013×10^{-2}	–0.4413
0.50	0.0263	-0.9128×10^{-2}	–0.4349
0.50	0.0197	-0.6304×10^{-2}	–0.4224
0.50	0.0132	-0.3591×10^{-2}	–0.3994
0.50	0.0066	-0.1179×10^{-2}	–0.3133
0.50	0.0000	0.0000	0.0000

５．まとめと今後の課題

外挿値の散逸率および運動エネルギーを保存するスキームを提案し、*Re* 数＝1×10^4 および 5×10^4 の２Ｄキャビティフローで数値計算して検討した。

Re 数＝1×10^4 では層流解との差がないこと、また Ghia らとの解とも一致することから妥当と判断される。

Re 数＝5×10^4 では安定的に数値計算できることは確認できた。しかし、その妥当性の検証は今後の課題として残ることとなる。

その結果は、①主渦のプロファイルは *Re* 数＝1×10^4 とほぼ同じであること ②壁面近傍で流速が急勾配となることを示した。

本モデルは時間ステップΔｔの間にも生成消滅するような乱流を捉えることはできない。したがって、さらに高レイノルズ数流れでは乱流モデルを加える必要がある。

参考文献

(1) 今村，棚橋，"時間軸２次精度流跡線による非圧縮流体解法" 計算工学論文集，第４巻第１号、(1999), pp. 263.

(2) 今村，棚橋，"三次精度流跡線による外挿解の平均化法とその残差エネルギー保存法" 第 13 回数値流体力学講演論文集,(1999)

(3) 今村, "C_1連続な FEM モデルの非圧縮流体への適用" 第 11 回数値流体力学講演論文集,(1997) , pp.567

(4) 槙原，今村，棚橋，"２次元正方キャビティ内流れの数値解に対する考察,"第13回数値流体力学講演論文集,(1998), pp. 471.

(5) U.Ghia,K.N.Ghia and C.T.Shin “High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, Journal of Computational Phisics 48, (1982), pp387-411.