

局所 5 次スプライン内挿を利用した高精度流体解析手法

Higher-Order Scheme with Local Quintic Spline Interpolation

○ 牛島 省, 瀬津 家久, 山上 路生, 坂根 由季子

京都大学大学院 環境地球工学専攻, 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町

S. Ushijima, I. Nezu, M. Sanjou and Y. Sakane

Department of Global Environment Engineering, Kyoto University

Kyoto-shi, 606-8501, Japan, E-mail : ushijima@gee.kyoto-u.ac.jp

A higher-order computational scheme utilizing quintic spline interpolation (QSI scheme) has been proposed. The first derivatives included in convection terms are evaluated by differentiating the quintic spline function fitted to the local velocity distributions. This scheme was firstly applied to a pure advection problem and it was demonstrated that its numerical accuracy is superior to a fifth-order upwind difference which is recently adopted in some direct numerical simulations for turbulent flows. This QSI scheme has been implemented in the pressure-velocity coupling CFD code with collocated grid system on the general curvilinear coordinates. The developed computational method has been applied to square and polar cavity flows. As a result, it was shown that the accuracy of the present computational method is generally higher than that of the fifth-order upwind difference and that the QSI scheme is effectively working in the collocated grid on curvilinear coordinates.

1. はじめに

本研究では, 近年 RANS モデルによる流体計算や DNS に利用されることのある, 5 次精度の計算スキームについて考察した. 本報では, 離散化された変数の局所的な分布を 5 次スプライン関数により 4 階微分まで連続な関数として表現し, 基礎方程式中の移流項をその微分量から計算する QSI (quintic spline interpolation) スキームを提案する. これを 2 次元の pure advection 問題に適用し, 既往のスキームと比較した結果, 5 次風上差分よりも良好な結果が得られることが確認された. さらに, この計算スキームに基づき, 一般曲線座標系上においてコロケート格子を利用した流体解析手法を作成した. 正方形および polar キャビティ内の流れの計算を行った結果, pure advection 問題で確認されたように, QSI スキームでは 5 次風上差分よりも精度の高い数値計算が可能であることが示された.

2. QSI スキーム

5 次スプライン関数 $S_k(x)$ は区間 $[x_k, x_{k+1}]$ (ここに $x_k < x_{k+1}$; $k = 1, 2, \dots, N-1$) において, 一般に次のような 5 次の多項式として表される.

$$S_k(x) = \sum_{m=0}^5 C_m (x - x_k)^m \quad (1)$$

ここで, C_m は区間ごとに定められる係数である. 離散化された物理量 ϕ の分布が $S_k(x)$ により表される場合, その 1 次元移流方程式は $x = x_k$ において次のように表現される.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=x_k} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u C_1 = 0 \quad (2)$$

C_m を数値的に安定に求めるアルゴリズムとして, $S_k(x)$ の 3 階微分関数に対する 2 次の B スプライン関数を利用する手法が提案されている¹. この手法により, 係数 C_1 のみを求めることで, (2) 式のように移流項を評価することができる. C_1 を求める際には, 計算時間と得られる解の精度を考慮して, 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ の前後の合計 6 点の局所的な ϕ の値を利用することとした. この 6 点の範囲は, 流速の方向に応じて変化させることが有効である.

本報では, Fig.1 に示すように, 流速の方向に対応して利用する 6 点の範囲を定めるものとした.

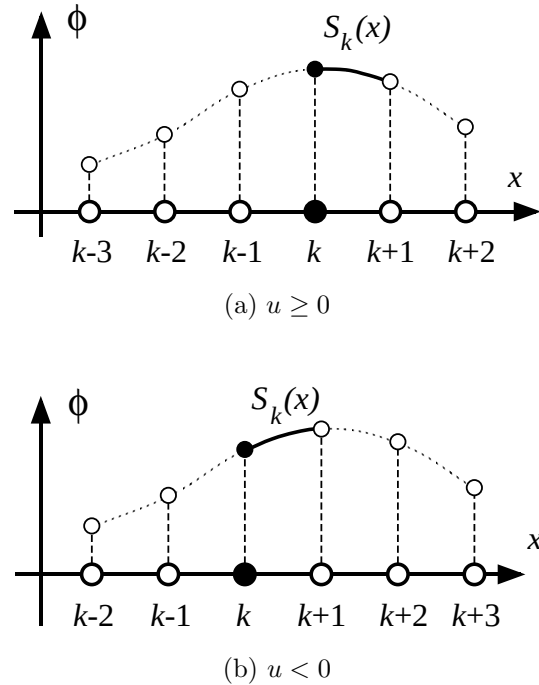


Fig. 1: Derivation of $S_k(x)$ in $[x_k, x_{k+1}]$

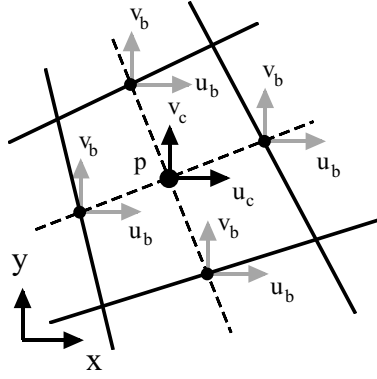
また, $S_k(x)$ を定める際には, 格子点間隔の変化は問題にならないため, 不等間隔格子でも利用しやすい. さらに, 一方向にしか ϕ の分布が存在しない境界壁面近傍においても, 6 点の分布を流体側にシフトさせてやることにより, ある程度の精度を保持できると考えられる.

本報で扱うコロケート格子系²では、セル中心で移流項と拡散項を評価し、空間内挿されたセル境界の流速を用いて圧力場を計算する。一般曲線座標系 ($\xi^m, m = 1, 2$) を用いる場合、次式より物理空間中における曲線座標系が生成される。

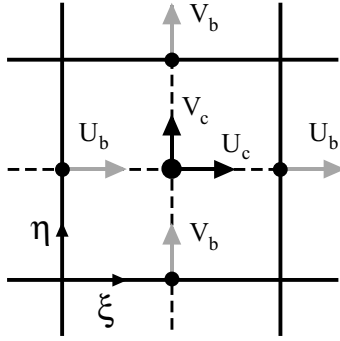
$$\frac{\partial^2 \xi^m}{\partial x^i \partial x^i} = P^m(\xi^1, \xi^2) \quad (3)$$

ここで、 x^i ($i = 1, 2$) は物理空間中における直交座標系であり、 P^m は同空間中においてメッシュ間隔を制御するために用いられる関数である。

Fig.2 に、2つの空間における変数配置を示す。



(a) physical space



(b) computational space

Fig. 2: Configuration of velocity components

非圧縮性流体の連続式は次式のように表される。

$$\frac{\partial U^m}{\partial \xi^m} = 0 \quad (4)$$

ここに、 U^m は流速ベクトルの反変成分で、直交座標系の流速成分 u^i と次の関係が成り立つ。

$$U^m = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} u^i \quad \text{and} \quad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^m} U^m \quad (5)$$

ここでは、次式で表される Navier-Stokes 方程式を用いる。

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + U^m \frac{\partial u^i}{\partial \xi^m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x^i} + \nu \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^n} \frac{\partial \xi^n}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} \quad (6)$$

圧力は $n+1$ ステップの値を用いている。

計算では、最初に Fig.2 に示されるセル中心の流速 u_c^i が次式から計算される。

$$u_c^i = (u^i)^n + \left[-U^m \frac{\partial u^i}{\partial \xi^m} + \nu \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^n} \frac{\partial \xi^n}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} \right] \Delta t \quad (7)$$

ここに、 $(u^i)^n$ は n ステップの u^i を表す。なお、(7) 式では簡単のため、Euler explicit 法が用いられているが、高次の離散化手法を適用することも可能である (後述の計算では 2 次および 3 次の Adams-Bashforth 法を用いている)。(7) 式中に含まれる移流項の離散化には、QSI スキームが用いられる。(6) 式と (7) 式から $n+1$ ステップの流速は次式で与えられる。

$$(u^i)^{n+1} = u_c^i - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x^i} \quad (8)$$

圧力場は、以下の 2 式により、セル境界上で定義された u_b^i を用いて計算される。

$$\frac{\partial (u_b^i)^{n+1}}{\partial x^i} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_b^i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x^i} \quad (10)$$

u_b^i は u_c^i を空間内挿することにより求められるが、5 次スプライン関数を利用して精度の向上を図ることが有効である。(10) 式は次式のように変換される。

$$\frac{\partial U_b^m}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} g^{mj} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi^j} \quad (11)$$

ここに、 g^{mj} は基本テンソルの反変成分である。(11) 式を解いて得られた U_b^m をセル中心に空間内挿した U_c^m を用いて、次式より $(u^i)^{n+1}$ が求められる。

$$(u^i)^{n+1} = u_c^i + \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^m} (U_c^m)^{n+1} - \frac{\partial x^i}{\partial \xi^m} (U_c^m)^n \right] \quad (12)$$

4. 解析手法の適用性

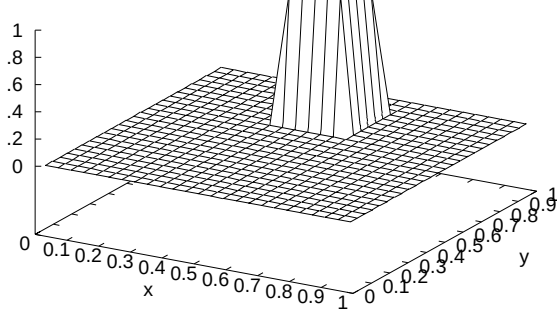
4.1 2次元移流問題への適用

QSI スキーム、5 次風上差分、3 次風上差分³を用いて剛体回転流速場における pure advection 問題を解析した。流速場は既知のものとして、これにステップ状の初期のスカラー分布を与え、1 回転後における分布状況を計算した。その結果、Fig.3 に示すように、初期のスカラー量のピーク値の低下や数値拡散の状況から、QSI スキームでは、5 次風上差分法より良好な解析結果が得られることが示された。なお、これらの計算では、時間差分に 2 次精度の Adams-Bashforth 法を用い、すべての計算に MMT フィルタ⁴を適用した。

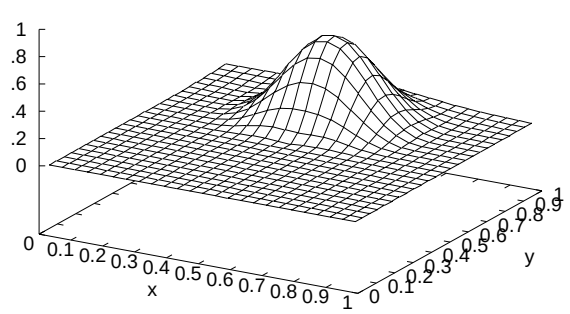
4.2 正方形キャビティ内流動への適用

本報の流体計算手法を正方形キャビティ内の流れ⁵に適用した。比較的粗い等間隔格子 (50×50) を利用した結果、Fig.4 (a), (b) に示すように、QSI スキームを用いた場合には、5 次風上差分より精度の高い結果が得られることが確認された。

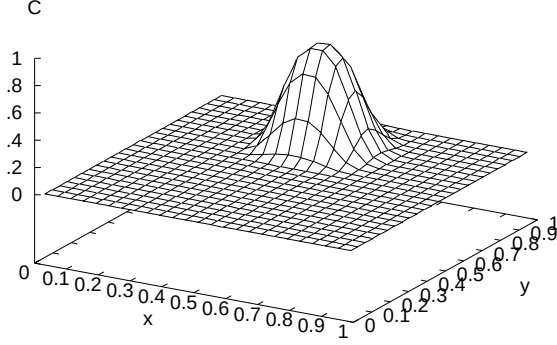
なお、格子点を壁面近傍に密に配置した場合には、Fig.4 (c), (d) に示されるように、QSI スキームではより少ないメッシュ数 (42×42) でも Ghia⁵ の結果と一致する解が得られた。



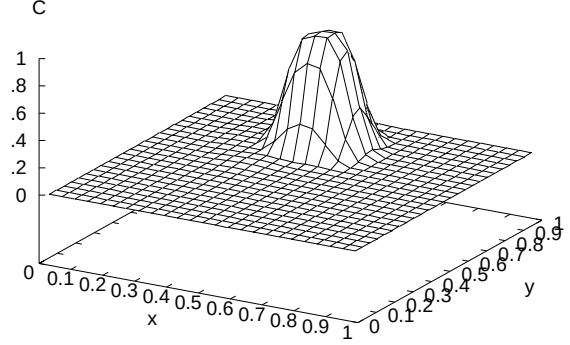
(a) initial distribution



(b) third-order upwind difference

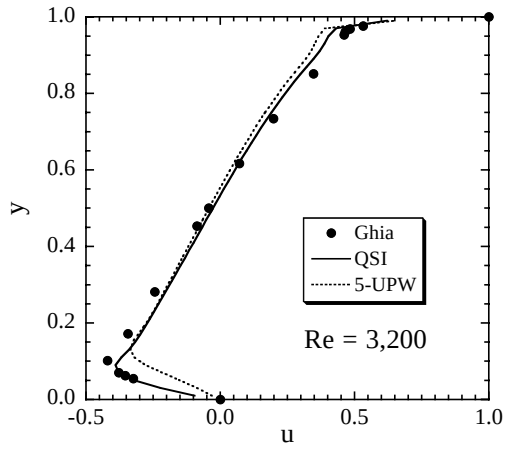


(c) fifth-order upwind difference

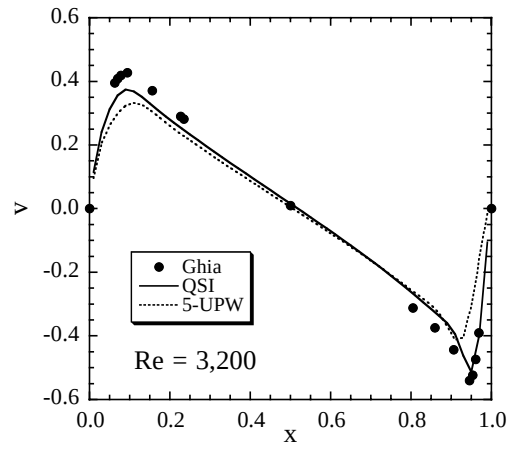


(d) QSI scheme

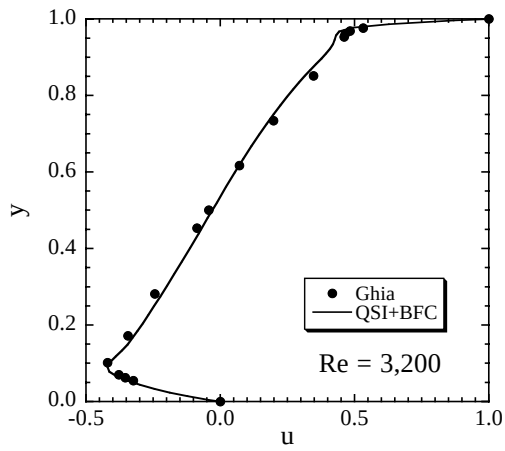
Fig. 3: Predicted scalar distributions after one rotation



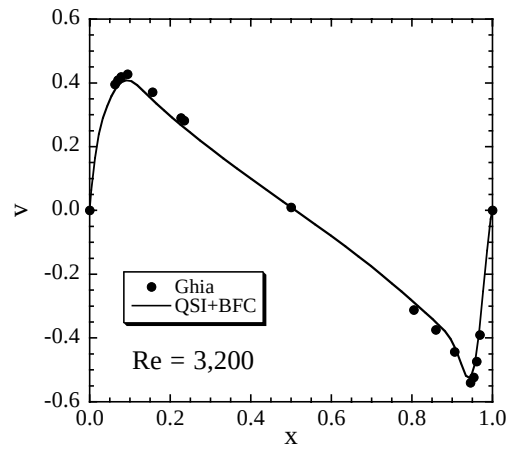
(a) u (50×50 uniform grid)



(b) v (50×50 uniform grid)



(c) u (42×42 non-uniform grid)



(d) v (42×42 non-uniform grid)

Fig. 4: Comparison of velocity distributions in a square cavity

次に, Fig.5 に示される polar キャビティ内の流れに本計算手法を適用した. Fig.6 に生成したメッシュ分布 (42×42) を示す. Fig.6 では, Fig.2 (a) 中の破線に相当する格子線も合わせて示されているため, セル中心の格子点数より多くの格子点が表示されている.

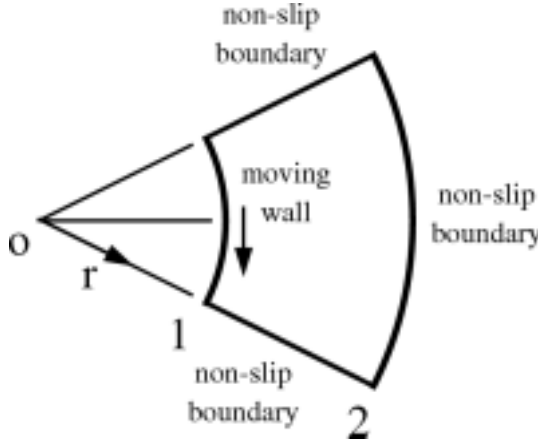


Fig. 5: Polar cavity

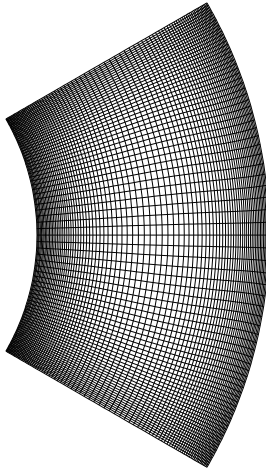


Fig. 6: Generated grid

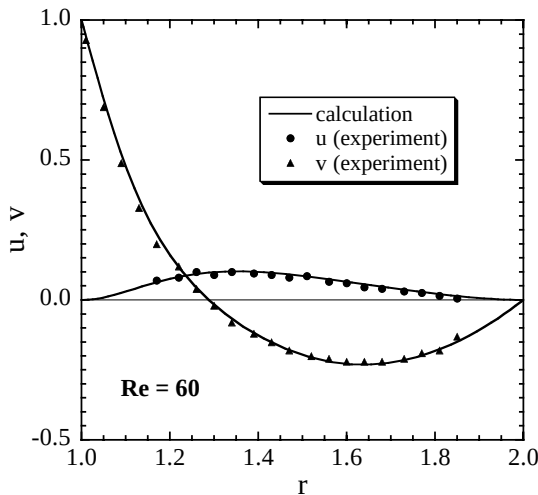


Fig. 7: Comparison of velocity distributions (Re=60)

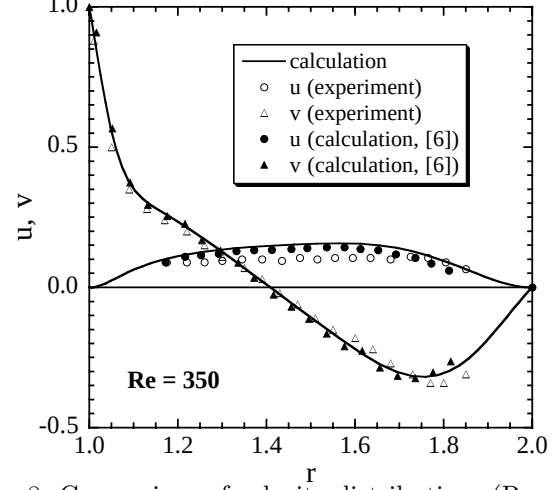


Fig. 8: Comparison of velocity distributions (Re=350)

計算の結果, Fig.7 に示すように, $Re=60$ の条件では実験結果⁶とよく一致する解が得られた. 図に示された結果は, 円周方向に中央の位置における半径方向の分布である. ここで, u は半径方向, v は円周方向の流速成分である.

$Re=350$ の場合には, Fig.8 に示すように, 実験結果との相違がわずかに見られる. これは, Fuchs ら⁶ が指摘するように, 実験では流れに 3 次元性が現れるためと考えられる. 本報の計算結果は, Fuchs ら⁶ の 2 次元計算の結果とおおよそ一致するものとなった.

5. おわりに

本研究では, 計算格子点上で離散化された変数の分布を 5 次スプライン関数を利用して 4 階微分まで連続な関数として近似し, 基礎方程式中の移流項をその微分量から求める QSI スキームを提案した.

QSI スキームを用いて 2 次元 pure advection 問題, 正方形および polar キャビティ内の流れの計算を行った. その結果, QSI スキームは 5 次風上差分法よりも高い精度を有し, コロケート配置と一般曲線座標系を利用することで, 広範な工学問題へ適用できる高精度の流体解析手法が得られることが示された.

参考文献

1. John G. Herriot and Christian H. Reinsch. Procedures for quintic natural spline interpolation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2(3):281–289, 1976.
2. C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21:1525–1532, 1983.
3. T. Kawamura and K. Kuwahara. Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness. *AIAA Paper*, 84-0340, 1984.
4. S. Koshizuka, Y. Oka, S. Kondo, and Y. Togo. Interpolating matrix method : A finite difference method for arbitrary arrangement of mesh points. *J. Comput. Phys.*, 75:444–468, 1988.
5. U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. Comput. Phys.*, 48:387–411, 1982.
6. L. Fuchs and N. Tillmark. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 5:311, 1985.