結合コンパクト差分スキームを用いた流れの計算 II

Flow simulation using CCD scheme

石井 克哉, 名大工, 464-8603 名古屋市千種区不老町, ishii@cse.nagoya-u.ac.jp
二瓶 友典, 名大工, 464-8603 名古屋市千種区不老町, nihei@fluid.cse.nagoya-u.ac.jp
養祖 隆, 名大工, 464-8603 名古屋市千種区不老町, youso@fluid.cse.nagoya-u.ac.jp
Katsuya Ishii, Dept. CSE Nagoya Univ, 464-8603 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya
Tomonori Nihei, Dept. CSE Nagoya Univ, 464-8603 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya
Takashi Youso, Dept. CSE Nagoya Univ, 464-8603 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya

The flow simulations of the global atmospheric problem need high accuracy and high resolutions. We improve the 3-point Combined Compact Difference (CCD) Scheme proposed by Chu and Fan(1998). This new scheme has the eighth-order accuracy and spectral-like resolution for first derivatives. Using this scheme, we analyze the shallow water problems on the sphere, which are proposed as the test set by Williamson et al.(1992). The simulations show the new scheme give excellent results compare with the previous spectral methods. In addition, we discuss the application for the general compressible flow problem.

１．はじめに

気象などの数値計算で様々な波の伝播を長い時間扱うときには、波の分散を考慮しなければならない。このため、地球などを想定した球面上の数値計算を行う場合は球面調和関数法が、従来、主に用いられている。しかし、球面調和関数法は精度が高いが、フーリエ変換の場合で用いられる FFT のようなスキームは知られていないため、効率が良くない。近年、大規模計算の必要性が高まる中で、異なる数値計算法を探す様々な試みがなされている。

一般に流体計算に使用される差分法はスペクトル法に比べ、精度（解像度）が低いが、計算効率は高い。特に、波の伝播の際生じる位相誤差が波の波数により異なるため、高波数の波の制御は難しい。しかし、Lele[(1)]は差分法の中でコンパクト差分法のある種類のものは波の分散性を小さくすることを示し、スペクトル的コンパクト差分と名付けた。しかし、彼らの方法では分散性を押さえるためには、格子点は７点使用する必要があり、精度も４次精度とあまりよくない。最近、Chu&Fun[(2)]はより少ない格子点（３点）を使用した結合コンパクト差分法を提案している。昨年は、主に圧縮流体への適用を示したが、今回は、Chu&Fun らの結合コンパクト差分法を改良し、さらに高波数まで位相誤差を生じないスペクトル的結合コンパクト差分を示す。この方法のテストとして Williamson ら[(3-4)]の浅水方程式テスト問題 1-3,5,6 を解き結果を示す。

２．結合コンパクト差分

一次元の関数の差分法を考える。ある周期関数の空間微分を取るとき、微分係数はもとの周期性を維持するがその値は周期が短くなるとずれる。たとえば、一次元の等間隔格子（x_1、x_2、x_3、x_4、…）を考え、間隔を h とする。各点での一階微分を差分値を u'_i、をもとの関数値を u_i とし、ベクトル $\mathbf{u}=^t(u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots)$ $\mathbf{u'}=^t(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, \ldots)$を定義する。このとき、差分は M_L、M_R の係数行列を使って

$$M_L u' = M_R u$$

と書ける。たとえば、M_L が単位行列ならば、普通の差分であり、$(M_R)_{ii+1}=1/2h$, $(M_R)_{ii-1}=-1/2h$ でそれ以外の成分が $(M_R)_{ij}=0$ となるときは二次の中心差分となる。また、M_L が適当な値を持つとパデ差分の形の陰的な差分式となる。ここでもとの関数が周期関数とし、

$u(x)=e^{-ikx}$を代入すると、$k' = i\dfrac{(M_R\mathbf{u})_k}{(M_L\mathbf{u})_k}$

となる。波数 k と差分で求めた波数 k'の関係が周期関数に関する差分の正確さを示す。これは精度と異なる概念なので、差分の解像度と呼ばれる。図１に様々な差分の解像度を示す。

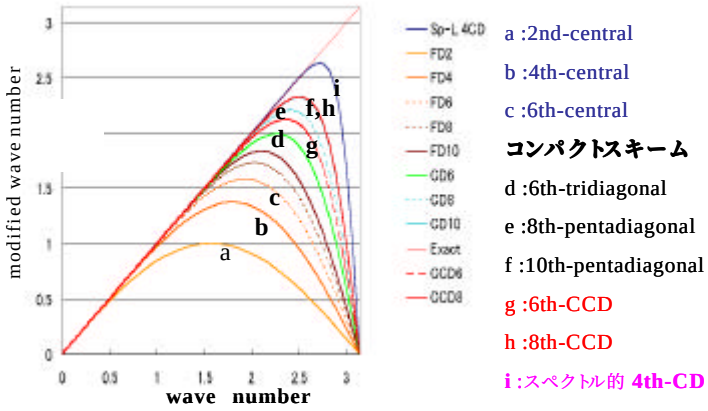

Fig.1. Resolution (to 10-th order accuracy)
a- **c** : Central Difference, d-f: Compact Difference,
g,h:Combined Compact difference
e: spectral-like Compact Difference

普通の中心差分は１０次精度までで kh=1.5 程度までの波数がほぼ正しい微分値を示すが、コンパクトスキームは６次精度以上にすると kh=1.6 程度、１０次精度になると kh=2.2 程度の波数まで正しい微分値を与える。しかし、Lele は１０次精度を与える M_L,M_R の係数をつかって、精度を４次精度に落とすことで得られた３つの自由に決められるパラメータを適当に決め、kh=2.6 程度まで正しい微分値を与えるコンパクトスキームを与えている。

一方、結合コンパクト差分は求める点に隣り合う３点の１階微分、２階微分、３階微分値などを変数として、連立方程式を作り、解くことにより、高精度の１，２，３階微分などを求める。これは、ブロック三重対角行列を解くことになり、比較的容易に解くことができる。二階微分までを使った時は１階微分、２階微分で６次精度までの差分値が求められ、3 階微分までを使うと１階微分、２階微分が 8 次、３階微分の精度が６次の精度を得る。図１に示したように、これは g,h の解像度であり、６次は kh=1.7 程度、８次は kh=2.2 程度までの精度を示す。

しかし、Lele のように８次精度の高階微分の精度を落とし、２階微分、３階微分の精度を６次、４次にすること２つの自由なパラメータを作れ、i とほぼ程度の波数まで正確な８次精度の１階微分が得られる。

具体的には、周期境界の場合、

$$x_i=\begin{pmatrix} u_i''' \\ u_i'' \\ u_i' \end{pmatrix},\quad d_i=\begin{pmatrix} -\dfrac{105}{16h^3}(u_{i+1}-u_{i-1}) \\ \dfrac{4}{h^2}(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i) \\ \dfrac{35}{32h}(u_{i+1}-u_{i-1}) \end{pmatrix}$$

とすると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_i \\ \vdots \\ \mathbf{d}_N \end{pmatrix}$$

となり、B は３行３列の単位行列

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{h}{8} & \frac{h^2}{96} \\ \frac{15-11d_2}{8h} & \frac{7-3d_2}{16} & \frac{3-d_2}{48}h \\ \frac{d_3}{h^2} & \frac{15+8d_3}{20h} & \frac{15+4d_3}{60} \end{pmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{-h}{8} & \frac{h^2}{96} \\ \frac{-15+11d_2}{8h} & \frac{7-3d_2}{16} & \frac{-3+d_2}{48}h \\ \frac{d_3}{h^2} & \frac{-15-8d_3}{20h} & \frac{15+4d_3}{60} \end{pmatrix}$$

である。今回は 0<kh<2.6 で二乗ノルムが最小となるよう d_2=19.4444，d_3=-4.8131 とスペクトル的解像度を得た。

３．空間ローパスフィルター

上のスキームを使って空間微分を行い、球面状の問題を解く。しかし、格子サイズが異なる様な場合、特に、極付近で、ヤコビアンが小さくなるとき、高精度のための不安定性が発生する。これを防ぐため、空間ローパスフィルターを使う必要がある。また、非線形項の計算の際現れるエリアジングエラーは、波数がπ/h の時微分値は０となるので、スペクトル法ほどは深刻でないが高解像度の場合は取り除く必要がある。このため、高波数を落とすローパスフィルターを使う必要がある。以前は Lele の提案したものを簡単化した、Shang の提案する３重対角行列を使ったフィルターを使用していたが、極付近の振動の除去が不十分であるため、今回は Lele の提案する形の５重対角行列の反転法を用いた。しかし、Lele が提案した方法では、波数によって振動が発生しフィルターの選択がうまく行えないため、フィルターの単調減少を課し、値が半減する点を選んでフィルターのパラメータを選ぶことにした。フィルターをかける前の値を u、フィルター後の値を U とすると、フィルターは

$$b(U_{i+2}+U_{i-2})+a(U_{i+1}+U_{i-1})+U_i$$
$$=au_i+\frac{b}{2}(u_{i+1}+u_{i-1})+\frac{c}{2}(u_{i+2}+u_{i-2})$$
$$+\frac{d}{2}(u_{i+3}+u_{i-3})$$

と表され、半減する波数の値を k_c としたとき、経度方向には

$$k_c=\{1-0.75(1-\cos q)^5\}k_M, k_M=0.952p$$

緯度方向には $k_c=k_M$ となるように係数を選んである。

これらの係数により Williamson[3)]が提案している浅水波方程式のテスト問題を行った。

４．Williamson のテスト問題

4.1 浅水波方程式

球面状での浅水波方程式は、経度 $l(-p<l\le p)$、緯度 $q(-p/2\le q\le p/2)$ を使って、その方向の流速（u,v）、流体の深さ h*に対して、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla u-(f+\frac{u}{a}\tan q)v+\frac{g}{a\cos q}\frac{\partial h}{\partial l}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla v-(f+\frac{u}{a}\tan q)u+\frac{g}{a}\frac{\partial h}{\partial q}=0$$
$$\frac{\partial h^*}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla h^*+\frac{h^*}{a\cos q}(\frac{\partial u}{\partial l}+\frac{\partial v\cos q}{\partial q})=0$$

と書くことができる。ここで、f はコリオリパラメータであり、流体の高さは h=h*+hs と、底面の地形の高さ hs と深さ h*の和で表される。

4.2 計算法

ここでは、4.1 の形の微分を２節の結合コンパクトスキームで評価し、時間発展は 4 次のルングクッタ法で行った。また、極点での値の使用をさけるため、緯度方向の格子は $q_1=-p/2+\Delta q/2$ として Δq の等間隔格子とし、経度方向の格子は偶数個として、$l, l+p$ の格子点を使用することにより θ を $-p/2<q\le 3p/2$ と拡張して、周期関数を考え緯度方向の微分を考えた。ただし、ベクトル成分の微分の時は極を過ぎたときの方向性を考慮する必要がある。極での極座標のベクトル値は使わないが、自動的に０となっている。格子点は 64x32 を使用した。

4.3 テストケース 1

テスト１は移流の問題であり、速度を与え、cosine 型の水面の盛り上がりが形を変えず、球面を一周する問題である。ただし、格子の軸と回転軸は一致することは要求せず、極を過ぎる流れも考える。当然ながら回転軸と座標軸が一致した場合が誤差は一番少ない。回転軸が赤道にある場合は誤差が大きくなるが、対称性があるため、一番多い場合ではなく、

盛り上がりの一部が極を通過するとき、誤差は、一番悪くなる。このときの一周後の相対誤差L_1, L_2, L_∞を様々なスキームについて表１に示す。使用した格子点は 64x32 であり、時間ステップは８１０秒である。

表１

	FD2	FD4	FD6	スペクトル的 CD4	スペクトル的 CCD6	CCD8	スペクトル的 CCD8	SH
l_1	5.900	2.571	1.251	0.065	0.107	0.117	0.063	0.047
l_2	1.232	0.610	0.315	0.024	0.029	0.032	0.022	0.013
l_∞	0.645	0.426	0.196	0.015	0.016	0.017	0.010	0.009

FD2,4,6 で示した２次、４次、６次の中心差分はいずれもあまりよくないが、高解像度を持つものはそれなりに小さな誤差となっている SH は球面調和関数法(T31)の結果をしめしている。Lele のスペクトル的コンパクト４次 CD4、スペクトル的結合コンパクト８次 CCD8 は SH と比べL_1, L_2ではほぼ同程度の誤差を示している。各点での値の差の最大値を示すL_∞がスペクトル的コンパクト４次で誤差が大きいのは精度の反映だと考えられる。座標軸と回転軸が一致する場合、誤差は一桁以上小さくなる。

4.4 テストケース２

これはケース１で用いた定常流のテストであり、非線形な浅水方程式を解く。特に悪いのは、ケース１と同様に回転角が座標の軸と$a = p/2 - .05$の場合であり、図２に時間的な誤差の発展を示す。

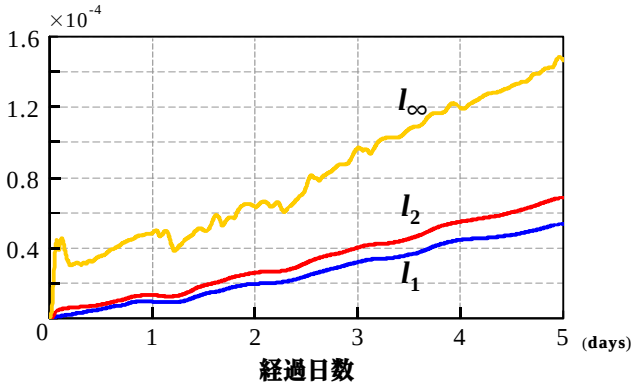

図２、定常流による極付近の非線形項の誤差のチェック

誤差は少しずつ大きくなっているが、５日で10^{-4}程度の結果であり、スペクトル法と比べてもそれほど悪くはない。

4.5 テストケース３

ある範囲だけに流れがある場合であり、流れはある軸の周りに帯状にある。この場合も座標系の軸と流れの軸は一致していない。また、流れは極を通過している。軸の傾きはこのとき$a = p/3$である。図３に５日後の流体表面の高さの等高線を示す。格子は 64x32 であり、時間刻みは１２０秒である。

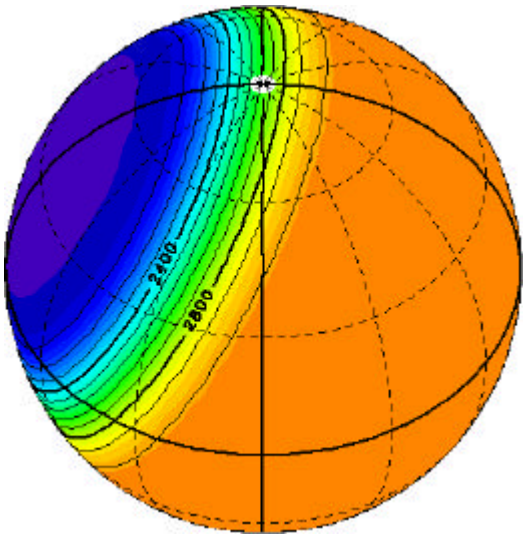

図３，ゾーナル流の時間発展．５日後の流体表面の等高線．（８０m間隔）

このときの誤差の時間発展は図４に示す。

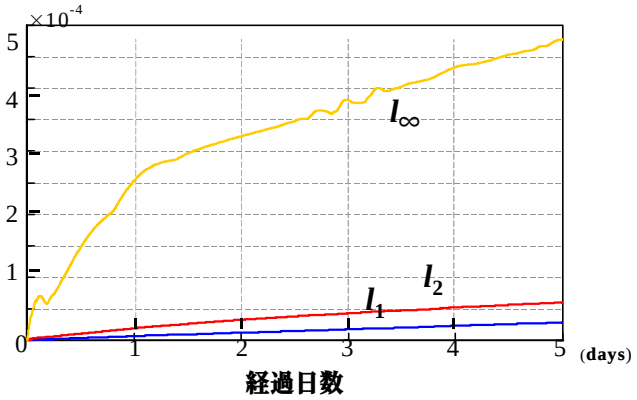

図４：帯状流れの誤差の時間発展

この誤差も流れが極を通っているにも関わらず10^{-4}程度となっている。

4.6 テストケース５

テストケース４はフォーシングの定常問題であるので、非定常な問題であるテストケース５の結果を示す。５は中緯度に高い山を置き、それを過ぎる流れの時間発展を追う問題である。厳密解はなく、格子点を増やした結果をみることになる。また、エネルギーなどの保存量のチェックも課題となっている。ここではより大きな球面調和関数法の結果と比較を行った。図５に１５日後の流体表面の高さの等高線を示す。ただし、球でなく、lq座標で示した。

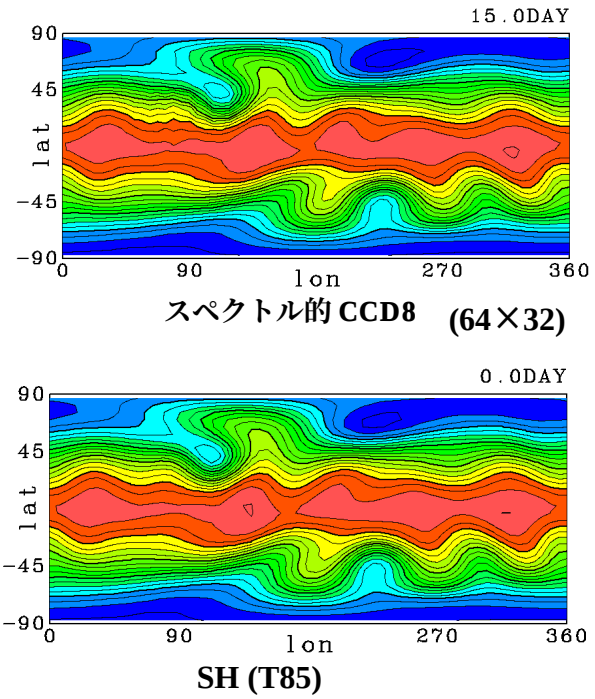

図５、流体表面の等高線図 50m 間隔

T85 は 256x128 の格子数に対応する。粗い格子にも関わらず両者の一致はよい。また、エネルギーの時間発展は図６に示す。

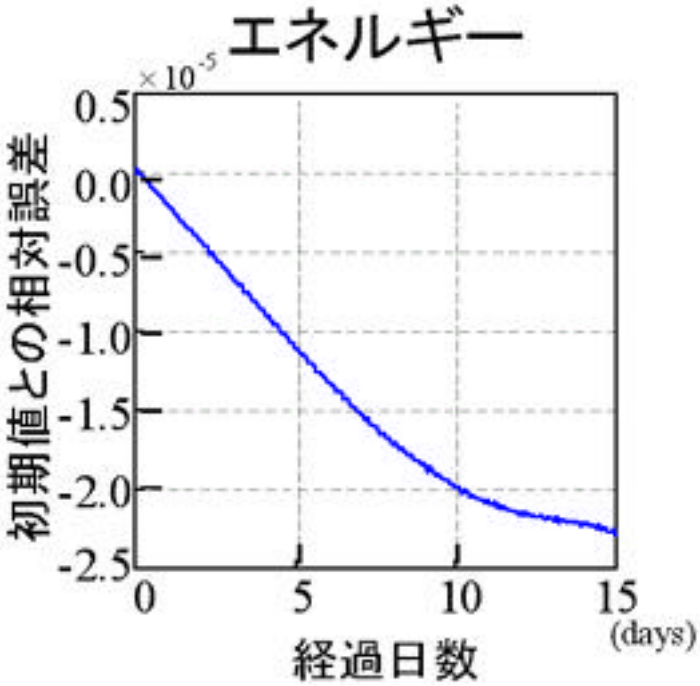

図６

１５日後でも 10^{-5} の程度の誤差にとどまることがわかる。また、他の質量、エンストロフィーについても同様の程度である。１５日後のエネルギーは球面調和関数法 T42(対応格子 128x64)では-2.3 x 10^{-5} であり、これに比べても、保存形を使用しないにも関わらず高解像度結合差分法の結果はよい。ただし、質量については球面調和関数法では保存スキームを使用しているので、丸め誤差程度にとどまっている。

4.7 テストケース６

Rossby-Haurwitz wave 時間発展を追っている。流体表面の等高線は図７で示す。この波は時間的に移動する。１４日後も位相誤差はほとんど現れない。

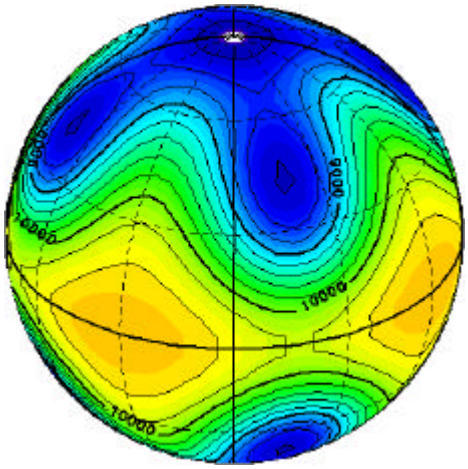

図７、流体表面の等高線。200m 間隔。

また、エネルギーなどの保存性もテスト５と同様な結果である。

３．まとめ

浅水方程式をとり、空間微分にスペクトル的高解像度の差分を適用した場合の解の誤差などを調べた。このとき、不均一格子となるため、極付近での格子集中によるエリアジングエラーなどの誤差を押さえるため、ローパス差分フィルターにより、高波数の関数の変動を押さえる。これらの処置をした後の結果は、保存性を考慮しないスキームの使用にもかかわらず２週間程度後の結果、球面調和関数法の誤差に比べて、エネルギーなどの保存性は同じ程度となる。また、計算速度も、一方向の格子点数が数百以上になると球面調和関数法より速く計算できることがわかり、球面調和関数法が一方向の格子数Nにたいし $O(N^3)$で増加するのに対し、$O(N^2)$で増加する。微分を求める際の係数行列は最初に処理し、被微分値の演算のみを各ステップで行うので、微分の計算は通常の数倍である。このため、高精度の計算をする際、高解像度コンパクト差分法は有効だと考えられる。現在の計算は４次のルンゲクッタ法を用いたが、時間精度を２次程度に落とすならば、いくつかの陰解法も考えられる。

こうした方向性として、一般の二次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対し、デルタフォームを使うことにより、陰部に６次のコンパクト差分、陽部に結合コンパクト差分を使用することにより、精度のよい結果も得ている。また、このとき、計算時間の増加はベクトル計算機では通常の計算時間に比べあまり増加しない。

参考文献

(1)S.K.Lele; J.Comput.Phys **103**(1992), 16-42.
(2)P.C.Chu and C.Fan; J.Comput.Phys **190**,(1998), 370-399.
(3)D.L.Williamson et.al; J.Comput.Phys.**102**(1992), 211..
(4)R.Jakob-Chen,J.J.Hanck, and D.L.Williamson; J.Comput.Phys. **119**(1995)164-187