多重格子法におけるルンゲ・クッタ法の比較

Comparative study of Runge-Kutta Method for Multigrid

○ 辰村　俊司, 京工繊大 大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: tatumura@fe.mech.kit.ac.jp
森西　晃嗣, 京工繊大 工芸学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: morinisi@ipc.kit.ac.jp
里深　信行, 京工繊大 工芸学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: satofuka@ipc.kit.ac.jp
Shunji TATSUMURA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
Koji MORINISHI, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN
Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

Multigrid scheme was incorporated into Rational Runge-Kutta method, to reduce long wavelength components of residuals with calculations on coarse grids. In order to improve the efficiency of Multigrid, the time step on coarse grids was made larger. Some free parameters in 2-stage Rational Runge-Kutta method had changed to obtain a larger Courant number on coarse grids. Next, Embedded 3-stage Rational Runge-Kutta method was introduced as a coarse grid time integration to extend the stability region. Either of these case, the iteration to a steady state had few changed and the computation time wasn't reduced.

1.　序論

流体力学の新しい分野の一つとして、近年のコンピュータの発達に伴って、計算流体力学 (Computational Fluid Dynamics : CFD) が確立されつつある。計算流体力学は、数値解析法を利用することで流体の基礎方程式を解き、流れの現象を解析しようとする学問である。新しい学問分野であるため、その進歩は著しいが、一方で多くの課題を抱えている事も事実である。適用性、信頼性、そして計算効率の向上はこれらの課題の重要なテーマである。

航空宇宙工学における流れの現象には高速気体の流れ場が多く見られる。流速が音速と同じオーダーになれば、圧縮性を考慮した基礎方程式に基づいた解析をする必要がある。これは圧縮性すなわち密度や圧力の変化が有限速度で流体中を伝播するという性質によって、流れの現象が低速流れと比べ著しく異なるためである。対象とする流れ場の全領域において、音速に達しない流れを亜音速、音速を超える領域を一部含む流れを遷音速、音速以上の流れを超音速の流れといい、これらの流れでは流体の圧縮性を考慮する必要がある。現在利用されている民間用旅客機の多くは、およそマッハ数 0.8 の巡航速度で運用されている。巡行状態における旅客機の流れ場は、およそ遷音速定常問題と仮定する事が可能であり、定常流を解析するにあたって計算効率の面では定常解への収束の速い数値解析法を確立する事が重要である。ところが粘性を無視できるとしたときの流動現象を記述する定常オイラー方程式は、超音速流で双曲型、亜音速で楕円型の偏微分方程式であるため、遷音速流では両者の境界が予めわかっていなければ解析は困難となる。そこで現在では、定常問題を扱う場面でも非定常流に対する方程式に適当な初期条件を与え、長い時間経過後の極限として定常解を得る双曲型の時間発展型方程式を用いた計算が一般に多く行われている。

時間積分法には大別して陽解法と陰解法がある。陽解法は未知の値を既知の値から直接求めるためタイムステップ当たりの演算回数は少なくてすむが、数値計算を安定に進めるために時間刻み幅が制限されるため、定常解を得るまでに多くの時間段階の繰り返しが必要となる。一方陰解法は時間刻み幅の制限は緩和されるが、未知の値を連立方程式の解として求めるためタイムステップ当たりの演算回数は多くなるという欠点がある。したがってより演算回数の少ない陰解法、あるいはより収束率の速い陽解法を構築することが要求されている。

本論文では計算流体力学の分野で高速解法として注目されているベクトル演算、パラレル演算への応用が比較的容易である陽解法を対象とする。陽解法の収束率を速める収束加速法として、残差平均法 (Rsidual Averaging : RA 法) と多重格子法 (Multi-Grid : MG 法) がある。空間の離散化には中心差分法を、時間積分には有理ルンゲ・クッタ法（Rational Runge-Kutta Method：RRK 法）を用いた陽的差分法に、残差平均法と多重格子法を組み込んだ、多重格子有理ルンゲ・クッタ法でも同様の収束加速性が確認されている。多重格子法は、減衰の遅い残差の長波長成分をすばやく減衰させるために格子幅を大きくした粗格子上でもとの方程式を解きその修正値を利用する収束加速法である。本論文では多重格子の粗格子における時間刻み幅をさらに大きくとることで、収束の加速を試みる。粗格子上での時間刻み幅を大きくとるために有理ルンゲクッタ法を用いる。最初に有理ルンゲクッタ法に含まれる任意のパラメータを変化させることで収束性への影響を調べる。次に有理ルンゲクッタ法を 3 段階にすることでその計算効率について 2 段階の場合と比較する

2.　基礎方程式

圧縮性非粘性流体の 2 次元流れは、次のオイラー方程式によって記述される。デカルト座標上で保存系ベクトルで表すと以下のように示される。

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \hat{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \hat{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

ここで、p、ρ、u、v は、それぞれ流体の圧力、密度、X および Y 方向の速度成分で、e は単位体積あたりの全エネルギで、流体を比熱比 γ の完全気体と仮定すると次式で与えられる。

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \tag{2}$$

任意形状の物体周りの流れ場の計算をするために、一般座標系 $\xi(x,y)$、$\eta(x,y)$ を用いて次のように表される。

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial \eta}=0 \tag{3}$$

$$\vec{q}=J\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\vec{E}=\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho uU+y_\eta p\\ \rho vU-x_\eta p\\ (e+p)U\end{bmatrix}, \vec{F}=\begin{bmatrix}\rho V\\ \rho uV-y_\xi p\\ \rho vV+x_\xi p\\ (e+p)V\end{bmatrix}$$

J は座標変換に伴うヤコビアンで次式で定義する。

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \tag{5}$$

U,V は、反変速度成分と呼ばれ一般座標上での座標軸に沿った流速を表し、それぞれ次式のように示される。

$$U=y_\eta u-x_\eta v \quad , \quad V=-y_\xi u+x_\xi v \tag{6}$$

ただし、添え字は偏微分を表す。

3. 数値計算法

数値計算法は線の方法に基づくものとする。つまり基礎方程式を解くために、最初に空間微分項を計算し、その後時間微分項について計算を行う。ここでは、空間微分項については２次精度の中心差分法で計算する。ただし中心差分による離散化に伴う非線形不安定性により生じる解の振動の防止や、衝撃波を適切に計算するために、人工粘性項を加える。時間積分法については、有理ルンゲ・クッタ法 [1] を採用する。定常問題において収束加速法として、局所時間刻み幅法、残差平均法および多重格子法を用いる。

3.1 空間差分法と人工粘性項

オイラー方程式の空間微分項を中心差分で計算するとき次のように表される。

$$\frac{\partial \vec{q}_{i,j}}{\partial t}=-\frac{\vec{E}_{i+1,j}-\vec{E}_{i-1,j}}{2\Delta\xi}-\frac{\vec{F}_{i,j+1}-\vec{F}_{i,j-1}}{2\Delta\eta} +\vec{D}_\xi+\vec{D}_\eta \tag{7}$$

ここで、添え字 i、 j はそれぞれ ξ 方向、 η 方向の格子番号を示し、$\vec{D}_\xi$、 $\vec{D}_\eta$ は人工粘性項である。これら人工粘性項の計算は、Jameson と Baker[2] に従って以下のように行われる。ここでの説明ではベクトル量の記号 $\vec{}$ を簡略化のため省略する。例えば D_ξ の計算手順を示す。

$$D_\xi=d_{i+1/2,j}-d_{i-1/2,j} \tag{8}$$

d は人工粘性流速項で、次式で計算される。

$$\vec{d}_{i+1/2,j}=\frac{\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j}\Delta_\xi q_{i,j}-\varepsilon^{(4)}_{i+1/2,j}\Delta^3_\xi q_{i-1,j}}{(\Delta t_\xi)_{i+1/2,j}} \tag{9}$$

Δt_ξ は ξ 方向のクーラン数を１とする時間刻み幅で式 (33) で定義される。$(\Delta t_\xi)_{i+1/2,j}$ は以下の式で計算する。

$$(\Delta t_\xi)_{i+1/2,j}=\frac{(\Delta t_\xi)_{i+1,j}+(\Delta t_\xi)_{i,j}}{2} \tag{10}$$

Δ_ξ、 Δ^3_ξ はそれぞれ前進差分演算子で、次式で計算する。

$$\begin{aligned}\Delta_\xi q_{i,j}&=q_{i+1,j}-q_{i,j}\\ \Delta^3_\xi q_{i-1,j}&=q_{i+2,j}-3(q_{i+1,j}-q_{i,j})-q_{i-1,j}\end{aligned} \tag{11}$$

係数 $\varepsilon^{(2)}$、 $\varepsilon^{(4)}$ は、それぞれ次のように計算される。

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j}&=\omega^{(2)}max(\nu_{i+1,j},\nu_{i,j})\\ \varepsilon^{(4)}_{i+1/2,j}&=max(0,\omega^{(4)}-\varepsilon^{(2)}_{i+1/2,j})\end{aligned} \tag{12}$$

$\nu_{i,j}$ は、衝撃波を感知する値で、次式で定義される。

$$\nu_{i,j}=\frac{|p_{i+1,j}-2p_{i,j}+p_{i-1,j}|}{p_{i+1,j}+2p_{i,j}+p_{i-1,j}} \tag{13}$$

$\omega^{(2)}$、 $\omega^{(4)}$ は補正係数で次のように決める。

$$\omega^{(2)}=3 \quad , \quad \omega^{(4)}=\frac{1}{32} \tag{14}$$

3.2 有理ルンゲ・クッタ法

時間積分には、有理ルンゲ クッタ法 [3)4)](Rational Runge-Kutta) を用いる。式 (7) は次のような連立常微分方程式として扱うことができる。

$$\frac{d\vec{q}}{dt}=\vec{W}(\vec{q}) \tag{15}$$

RRK を用いて常微分方程式を離散化すると、次のように表される。

$$\frac{q^{n+1}-q^n}{\Delta t}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i}w_{ij}g_ig_j}{\displaystyle\sum_{k=1}^{s}b_kg_k} \tag{16}$$

$$g_i=W(q^n+\Delta t\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}g_j)$$

式 (16) の右辺は、Wambecq によって提案されたルンゲクッタ法の非線形表示である。

２段階有理ルンゲクッタ法

s=2 のとき式 (16) は２段有理ルンゲクッタ法（RRK2）となり次のように表される。

$$\frac{q^{n+1}-q^n}{\Delta t}=\frac{w_{11}g_1g_1+w_{21}g_1g_2+w_{22}g_2g_2}{b_1g_1+b_2g_2} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}g_1&=W(q^n)\\ g_2&=W(q^n+a_{21}g_1)\end{aligned}$$

このときパラメータ w_{ij},b_k,a_{ij} は次の必要条件を満足する必要がある。

$$w_{11}+w_{21}+w_{22}=b_1+b_2 \tag{18}$$

$$w_{21}c_2 + 2w_{22}c_2 = b_2c_2 + \frac{b_1 + b_2}{2} \tag{19}$$

ここで c_2 は、次式より求められる。

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \tag{20}$$

したがって、2段階の場合は次のようになる。

$$c_2 = a_{21} \tag{21}$$

ここで c_2 は上記の範囲で選択される。

$$0 < c_2 \le 1 \tag{22}$$

また、次式より1次精度が維持される。

$$b_1 + b_2 = 1 \tag{23}$$

2stageのとき、次式の条件から係数が決められる。

$$w_{ij} = 0 \quad (i + j > 2) \tag{24}$$

$$w_{21} = w_{22} = 0 \quad , \quad w_{11} = 1$$

よって、式(17)は次のように書き換えられる。

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} = \frac{g_1 g_1}{g_3} \tag{25}$$

$$g_3 = b_1 g_1 + b_2 g_2$$

式(25)を連立方程式に適用すると、g_i はベクトル量となるので次式を用いて計算する。

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{d}} = \frac{\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{d}) + \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{\|\ \vec{d}\ \|^2} \tag{26}$$

$$\vec{q}^{n+1} = \vec{q}^n + \Delta t \ \frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1\cdot\vec{g}_3) - \vec{g}_3(\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1)}{(\vec{g}_3\cdot\vec{g}_3)} \tag{27}$$

ここで $(\vec{g}_i\cdot\vec{g}_i)$ は計算領域にわたる内積の和である。さらに $b_2c_2 = -0.5$ とおくことでＲＲＫ２は2次精度となる。

3段階有理ルンゲクッタ法

多段階有理ルンゲクッタ法は良い精度で計算されるが効率が良くない。また、例えば4段階ルンゲクッタ法（ＲＫ４法）の計算を2段目で終わらせてもＲＫ２とは一致しない。そこでＲＲＫ２に付加的な3段目の計算段階を設けることで3次精度で計算される挿入(Embedded)有理ルンゲクッタ法 [4)8)] を利用することができる。それは式(15)に対して次のように表される。

$$\vec{q^1} = \vec{q^n} + c_2\vec{g}_1 \qquad \vec{g}_1 = \Delta t W(\vec{q^n}) \tag{28}$$

$$\vec{q^2} = \vec{q^n} + \frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1\cdot\vec{g}_3) - \vec{g}_3(\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1)}{(\vec{g}_3\cdot\vec{g}_3)} \tag{29}$$

$$\vec{g}_2 = \Delta t W(\vec{q^n} + c_2\vec{g}_1)$$
$$\vec{g}_3 = b_1\vec{g}_1 + b_2\vec{g}_2$$

$$\vec{q^{n+1}} = \vec{q^n} + \alpha_1\vec{g}_1 + \alpha_2\vec{g}_2 + \alpha_3\vec{g}_4 \tag{30}$$

$$\vec{g}_4 = \Delta t W(\vec{q^2})$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \tag{31}$$

3.3 局所時間刻み幅法

流速や音速または格子間隔が変化する場合、通常は安定条件を満たす最適な時間刻み幅を最小格子幅より算出し、その値を全計算領域の時間刻み幅として用いる。しかし収束加速法の１種である局所時間刻み幅法は、定常解を求めるのにすべての格子点で Δt が同一である必要はないことに注目し、格子点ごとにクーラン数が一定となるように、時間刻み幅 Δt は格子点上で異なった値を次のように定義する。

$$(\Delta t)_{i,j} = C_N \min(\ \Delta t_\xi\ ,\ \Delta t_\eta\ )_{i,j} \tag{32}$$

C_N はクーラン数で、Δt_ξ、Δt_η は次式で与えられる。

$$(\Delta t_\xi)_{i,j} = \frac{J}{|U| + cS_\eta}\ ,\ (\Delta t_\eta)_{i,j} = \frac{J}{|V| + cS_\xi} \tag{33}$$

ただし、ｃは局所音速、S_ξ、S_η は次式で与えられる。

$$S_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}\ , \quad S_\eta = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2} \tag{34}$$

3.4 残差平均法

残差平均法は各点における残差をその周りの点の残差の平均値で置き換えることにより安定性を良くし定常解への収束を加速する方法である。式(27)を残差ｒを用いて次のように書き換えることができる。

$$\vec{q}_{i,j}^{n+1} = \vec{q}_{i,j}^{n} + \vec{r}_{i,j} \tag{35}$$

この残差をJamesonとBaker[1)]に従って、次式で示される陰的残差平均 $\bar{r}$ で置換する。

$$(\ 1 - \varepsilon_\xi\delta_\xi^2\ )(\ 1 - \varepsilon_\eta\delta_\eta^2\ )\bar{r}_{i,j} = r_{i,j} \tag{36}$$

ここで δ^2 は、次のような2階差分演算子である。

$$\delta_\xi^2 r_{i,j} = r_{i+1,j} - 2r_{i,j} + r_{i-1,j}$$
$$\delta_\eta^2 r_{i,j} = r_{i,j+1} - 2r_{i,j} + r_{i,j-1} \tag{37}$$

有理ルンゲ・クッタ法に残差平均法を組み込むとき ε には最適値が存在し ε が大きければ安定性が良くなるが、収束性が一様に改善されない。係数 ε は次式で計算する。

$$(\varepsilon_\xi)_{i,j} = \max\left[\ \frac{1}{4}\left[\ \left(\frac{\Delta t}{\lambda\Delta t_\xi}\right)^2 - 1\ \right]\ ,\ \varepsilon_{min}\ \right] \tag{38}$$

$$(\varepsilon_\eta)_{i,j} = \max\left[\ \frac{1}{4}\left[\ \left(\frac{\Delta t}{\lambda\Delta t_\eta}\right)^2 - 1\ \right]\ ,\ \varepsilon_{min}\ \right] \tag{39}$$

ただし

$$\lambda = 1.25\ , \quad \varepsilon_{min} = 0.2 \tag{40}$$

とする。

3.5 多重格子法

ここでは、２段階有理ルンゲ・クッタ法に残差平均法を組み込んだ Jameson の多重格子法[1)] を応用する。多重格子法は、格子間隔ｈの細かい格子網に間隔が２ｈ、４ｈ，８ｈ…の粗い格子網を、重ね合わせた多重格子を用い、それぞれの格子網で緩和計算を行うものである。粗い格子で得られた予想値で順次補正することにより多大な収束加速が可能である。多重格子法の原理は基本格子上での方程式を解き、そこで短波長の誤差を減衰させると共に、制限補間することで残差の修正方程式を粗格子上に構成し、長波長の誤差を速やかに減衰させるという手法である。

最初に基本格子上で得られた保存変数を、粗格子上の保存変数となるように制限補間を行う。粗格子上の保存量を基本格子上のその点周りの重み付きの相加平均として次のように求める。

$$\vec{q^{(0)}}_{2h} = I_h^{2h} J_h \vec{q}_h / J_{2h} \tag{41}$$

$$I_h^{2h} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

添え字ｈ、２ｈは格子幅で表した格子レベルである。平均化演算子 I_h^{2h} によって物理量は保存される。粗格子上でＲＲＫ法は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \Delta t \left[\vec{W}_{2h}(\vec{q}_{2h}^{(0)}) + \vec{P}_{2h} \right] \\ \vec{g}_2 &= \Delta t \left[\vec{W}_{2h}(\vec{q}_{2h}^{(0)} + c_2 \vec{g}_1) + \vec{P}_{2h} \right] \end{aligned} \tag{43}$$

$$\vec{q}_{2h} = \vec{q}_{2h}^{(0)} + \frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1, \vec{g}_3) - \vec{g}_3(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_3, \vec{g}_3)} \tag{44}$$

ここで $\vec{P}_{2h}$ は、求める解が基本格子上での精度を保存するように加えられる強制項で、次式で定義される。

$$\vec{P}_{2h} = I_h^{2h} \vec{W}_h(\vec{q}_h) - \vec{W}_{2h}(\vec{q}_{2h}^{(0)}) \tag{45}$$

粗格子上で得られた予想値を用いて基本格子上での保存量が修正される。

$$\vec{q}_h^{new} = \vec{q}_h + I_{2h}^h(\vec{q}_{2h} - \vec{q}_{2h}^{(0)}) \tag{46}$$

予想値 q_{2h}、 $q_{2h}^{(0)}$ との差が修正量として基本格子上へと延長補間が行われる。ここでは、延長補間として線形内挿演算子 I_{2h}^h を用いる。

同様の計算を３層以上にわたって順次繰り返すことで定常解への収束を加速する。

3.6 収束判定基準

収束の判定には、計算領域内の平均自乗残差を用いる。この残差が初期の最大値から 6 桁落ちたならば定常解に達したと考えることにする。計算領域での平均自乗残差を次式で定義し、収束判定基準とする。

$$L_2 - Residual = \left[\frac{\sum_{i=2}^{imax-1} \sum_{j=2}^{jmax-1} \left[\vec{W}(\vec{q}_{i,j}) \right]^2}{(imax-2)(jmax-2)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{47}$$

4. 検定問題への適用

検定問題として NACA0012 型翼周り流れを採用する。

4.1 翼周り流れの計算領域

計算領域は翼弦長を１とし、前縁から外部境界までを 15、後縁から流出境界までを 20 とする。計算格子 257×65(翼面上 129 点) を用いる。

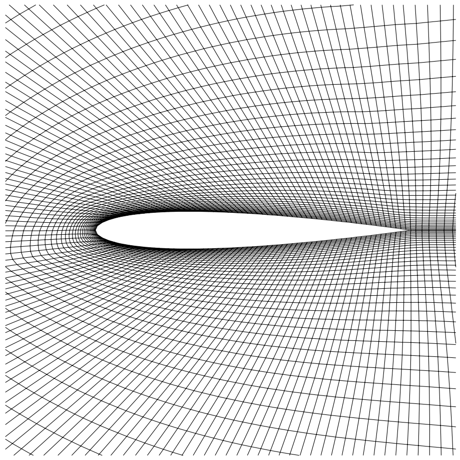

Fig. 1: 計算格子 257×65

4.2 初期条件

流入マッハ数を 0.8 とする。全計算領域で一様流の値を与える衝撃出発とする。

4.3 境界条件

１　流入境界

流入面では亜音速流れであるから、物理量の全成分のうち１つは下流方向から決定される。ここでは圧力を計算領域から外挿して、エントロピおよび全エンタルピを一様流で固定することで速度を求める。

２　流出境界

流出面では無限下流側から物理量の１成分が決定される。ここでは静圧を流出境界条件として指定し、速度成分、エントロピを計算領域から外挿する。

３　壁面境界

非粘性流れにおいて物体面上の速度成分は、法線速度成分を０とし接線速度成分は外挿より求める。エントロピも外挿して計算する。圧力は壁面上で次の法線方向の運動方程式を解くことで求められる。

$$(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)P_\xi - (x_\xi^2 + y_\xi^2)P_\eta = \rho U(-y_\xi u_\xi + x_\xi v_\xi) \tag{48}$$

5. 実験方法と計算結果

定常問題を扱うとき解の精度は空間の離散化のみに依存し、時間方向の精度は問われない。そこで本研究の目的は多重格子有理ルンゲクッタ法において、粗格子内の時間積分法を変化させることで収束の加速を試みた。本報告では次の 2 例について調べた。

1) RRK2 を用いて、基本格子上では 2 次精度を維持するように時間を進め、粗格子上で後退オイラー法と一致するような係数を用いることで、時間刻み幅を大きくし収束加速を試みた。

2) 粗格子の時間積分法に RRK3 を用い時間刻み幅を大きくとった。

数値計算の計算結果としてマッハ線図を描くといずれの場合も Fig2 のような結果となった。

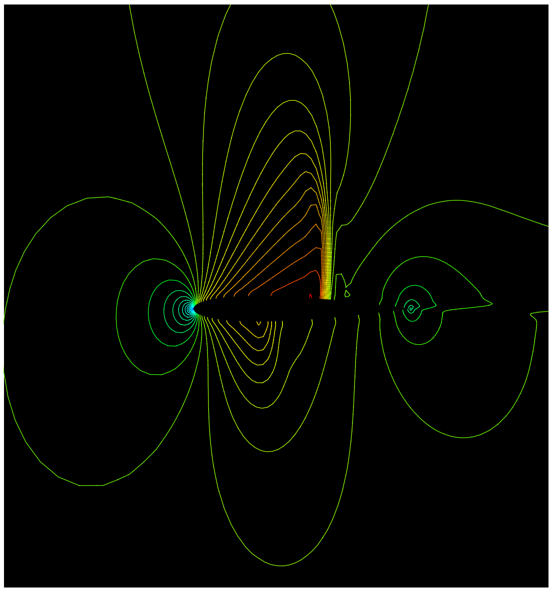

Fig. 2: 等マッハ線図

5.1 RRK2 の係数変化

後退オイラー法との一致

$b_2 c_2 = -1$、$c_2 = 1.0$ として RRK2 を常微分方程式 $y' = \lambda y$ に適用させるとそれは後退オイラー法と一致する。一般に後退オイラー法は陰解法であるためクーラン数を大きくとることができる。そこで粗格子内でこの係数条件においてクーラン数を大きくとることで収束の加速を試みた。その結果を Fig3 と Tab1 に示す。粗格子のクーラン数を 0.5 刻みで変化させたが収束に至るまでの計算回数は増加し計算時間も増加した。

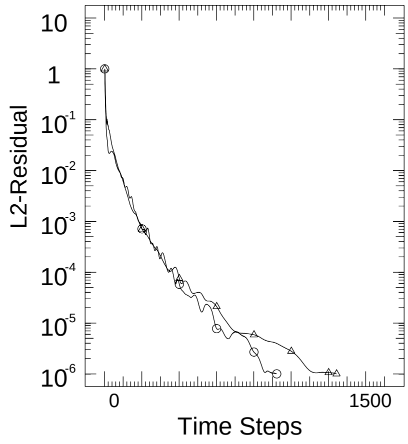

Fig. 3: 後退オイラー法との一致

Tab. 1: クーラン数と計算時間

時間積分法	$RRK2$	$RRK2(B.E.)$
(図中記号)	◯	△
基本格子 C_N	3.0	3.0
粗格子 C_N	3.0	5.0
計算回数	923	1244
計算時間	1105.6	1472.7

5.2 RRK3 の導入

粗格子の時間積分に RRK3 を用いた。係数 α_1、α_2、α_3 を任意に選択し、クーラン数を変化させて収束の加速を試みた。任意係数を α_1=0、α_2=1、α_3=2 とするとき Fig4 と Tab2 で示されるように反復回数にわずかな減少があったが収束解を得るまでの計算時間は短縮されなかった。

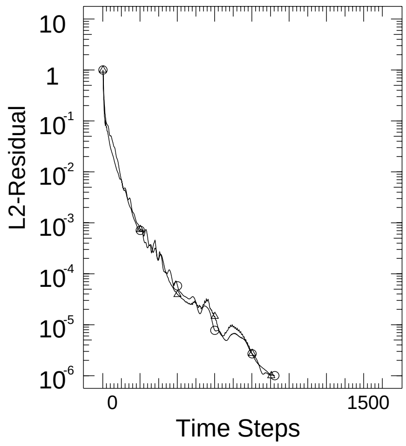

Fig. 4: 粗格子内の RRK3 の効果

Tab. 2: クーラン数と計算時間

時間積分法	$RRK2$	$RRK3$
(図中記号)	◯	△
基本格子 C_N	3.0	3.0
粗格子 C_N	3.0	4.0
計算回数	923	904
計算時間	1105.6	1114.8

6. 考察

多重格子法の粗格子上での計算は収束を加速させるためにあり、そこでの目的は残差に含まれる長波長成分をすばやく減衰させることである。したがって粗格子内では時間精度よりも計算効率を向上させたい。RRK2 に含まれる係数を後退オイラー法と一致するように変化させることでクーラン数を大きくとり収束の加速を試みたが収束回数は増加し計算時間も増加した。RRK2 の係数で $b_2 = -1$、$c_2 = 1$ とするとき線形常微分方程式に対しては後退オイラー法と一致するがここで扱った 2 次元圧縮性方程式に対してはクーラン数を大きくしてもその効果は得られないことがわかった。一方、粗格子内で RRK2

をRRK3に置き換えることで3次精度となり安定領域が拡大するのでクーラン数を大きくすることができる。実験結果では収束までの計算回数は減少し、クーラン数を大きくとった効果が現れたが、計算過程の増加により計算時間は増加し、最終的には収束が加速されたとは言い難い。今後他の収束加速法の係数との関連を調べる必要がある。

7. 結論

圧縮性非粘性流の定常解を陽解法を用いて求めるとき、収束加速法として用いる多重格子法の粗格子のクーラン数は、基本格子のクーラン数と一致させることで最も速く定常解に至る。

参考文献

1) Koji Morinishi, Nobuyuki Satofuka , Convergence Acceleration of The Rational Runge-Kutta Scheme for The Euler and Navier-Stokes Equations , Computers-Fluids. Vol.19 , No.3/4 , pp.305-313 , 1991

2) Jameson,A., Baker,T. , Mutigrid Solution of The Euler Equation for Aircraft Configuration. AIAA Paper84-0093 (1984)

3) Wambeq,A. , Rationl Runge-Kutta Method for Solving Systems of Ordinary Differential Equations , Computing 20, 333-342 , (1978)

4) Wambeq,A. , Solution of The Equations Associated with Rational Runge-Kutta Methods of Orders up to Four , Journal of Computational and Applied Mathematics vol.6 , no.4 , 1980

5) E.Hairer , Nonlinear Stability of RAT An Explicit Rational Runge-Kutta Method , BIT 19 (1979), 540-542

6) E.Hairer , Unconditionally Stable Explicit Methods for Parabolic Equations , Numerische Mathematik 35,57-68 (1980)

7) M.Calvo , On the Stability of Rational Runge-Kutta Methods Journal of Computational and Applied Mathematics vol.8 , no.4 , 1982

8) 中島　資博、3段階有理ルンゲクッタ法による2次元非粘性圧縮性流の数値計算、京都工芸繊維大学卒業論文、昭和63年