新しい渦要素導入法に関する研究

A Study on a New Introduction of Vortex Element

○太田聖子　横浜国立大院　〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5 E-mail: d00ja002@ynu.ac.jp
亀本喬司　横浜国立大　〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5 E-mail: kame@post.me.ynu.ac.jp
祝　宝山　横浜国立大　〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5 E-mail: zhu@post.me.ynu.ac.jp
小島　成　横浜国立大院　〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5 E-mail: d98ja001@ynu.ac.jp

Satomi OTA, Yokohama National University, 79-5 Tokiwadai Hodogaya-ku Yokohama Japan
Kyoji KAMEMOTO, Yokohama National University, 79-5 Tokiwadai Hodogaya-ku Yokohama Japan
Baoshan ZHU, Yokohama National University, 79-5 Tokiwadai Hodogaya-ku Yokohama Japan
Akira OJIMA, Yokohama National University, 79-5 Tokiwadai Hodogaya-ku Yokohama Japan

In this paper, a new scheme of introduction of vortex elements is proposed, which is to consider the effects of convection and viscous diffusion in a vortex method. And it was examined in the calculation of a starting flow around a two-dimensional circle cylinder. It was found that the new scheme introduction of the vortex elements is effective for improvement of calculation resolution.

1. 緒言

渦度輸送方程式を基礎式とする渦法は、渦要素の持つ渦度をラグランジュ的に追従し、時間発展を解析する手法である。流れ場に生成される渦度を離散的に取り扱い、適切に表現する研究は以前より行われており、多くの成果が蓄積されている。亀本[1]は、境界近似などから導入法をいくつかに分類し、解析対象や計算条件によって導入法を使い分けてきた。その中でも、Kamemoto and Miyasaka[2]は物体上からある高さにパネルを設け、物体とで囲まれた領域において速度勾配を直線勾配と近似することにより、連続の条件を用いて流れ場に放出する渦要素の持つ渦度を算出し、解析を行った。

そこで、本報において、Kamemoto and Miyasaka[2]によって用いられた循環量の算出方法をさらに厳密に発展させた新しい渦要素導入法を提案する。さらに、この手法を用いて一様流中における二次元円柱まわり流れを解析し、とくに初期において後方に形成される出発渦に注目し、その精度を解析、検証し、手法の有効性を示す。

2. 計算方法

非圧縮流れ Navier-Stokes 方程式および連続の式は一般に次のように示される。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\frac{1}{r}\nabla p+n\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$div\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

本解析で用いる渦法は、式(1)の回転をとり式(2)を考慮することによって得られる渦度輸送方程式を基礎方程式としている。二次元流れより$(w\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=0$を考慮すると二次元渦度輸送方程式は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial w}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)w=n\nabla^2 w \tag{3}$$

$$w=rot\boldsymbol{u} \tag{4}$$

ここで式(4)は渦度の定義式を示している。さらに式(1)の発散をとることによって得られる圧力 Poisson 方程式が圧力の基礎方程式となる。

$$\nabla^2 p=-div(\boldsymbol{u}\cdot grad\boldsymbol{u}) \tag{5}$$

流れ場に存在する渦要素および物体からの誘起速度は式(4)に示す渦度の定義式を積分することによって得られる、一般化された Biot-Savart の式を用いて算出することができる[3]。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=\int_V w\times\nabla G dv+\int_S\left[(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{u}_0)\cdot\nabla G-(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{u}_0)\times\nabla G\right]ds \tag{6}$$

ここでG は Laplace 方程式の基本解を表しており、二次元のときその値は次のようになる。

$$G=-\frac{1}{2p}\ln R \tag{7}$$

ここで、

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$$

$$R=|\boldsymbol{R}|$$

また $\boldsymbol{n}_0$ は境界面から内側方向の法線ベクトルを表し、式(6)右辺第一項は空間に存在する渦度、第二項は境界上に分布する吹き出しおよび渦分布をそれぞれ示しており、空間に存在する渦度が既知ならば任意の位置での速度を求めることができる。さらに渦法では流れ場に存在する渦要素を blob モデルを用いて離散化する。渦度は Gauss 分布を持つ渦粒子の集合として表され、ラグランジュ的に追従することによって時間発展を表すことができる。そして、式(3)の二次元渦度輸送方程式に従い、粘性拡散の影響を受けて渦度は変化する。本報においてその粘性拡散を考慮する方法として Core-Spreading 法を用い、blob のコア半径の時間変化をラグランジュ的に捉える。

また、渦要素の移動には二次精度の Adams-Bashforth 法を用いて解析している。

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\{1.5\boldsymbol{u}(t)+0.5\boldsymbol{u}(t-\Delta t)\}\Delta t \tag{8}$$

3. 圧力解析

圧力解析には Uhlman[4]によって定義された圧力 Poisson 方程式を解く手法に、ベルヌーイ関数を導入して得られた境界積分方程式を用いる。

Copyright © 2000 by JSCFD

$$bH + \int_S H \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} ds$$
$$= -\left[\int_V \nabla G (\boldsymbol{u} \times w) dv + \int_S G \cdot \boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} ds + n \int_S \boldsymbol{n} (\nabla G \times w) ds \right] \quad (9)$$

ここで流れ場においてβ=1、境界上においてβ=1/2 となる。またn は動粘性係数、G は Laplace 方程式の基本解を表しており、式(7)で与えられる。またベルヌーイ関数H を以下のように定義する。

$$H = \frac{p}{r} + \frac{u^2}{2} \quad (10)$$

ここで$u = |\boldsymbol{u}|$である。

4. 渦要素導入法

本報では、図 1 に示すように物体を一定吹き出しで表現する。物体上では non-flux を考慮し、境界要素法を用いて吹き出しの強さを決定する。さらに、循環定理を満たすように渦パネルを一定分布させる。物体近傍で生成される渦を的確に考慮するために、物体からd_i の位置に速度参照点を設け、$A_1B_1C_1D_1$ で囲まれた領域Ⅰ、$A_2B_2C_2D_2$ で囲まれた領域Ⅱを設ける。Biot-Savart の式より速度を算出し、領域内における速度分布を直線勾配と近似し、その領域内では一定渦度分布として解析する。従来、多くの研究で用いられていた導入法では領域Ⅰを形成するだけにとどまっていた。しかし、二つの領域を設けることによって、直線勾配で表されていた速度分布をさらに精密に近似することができる。また粘性拡散の影響を考慮する際に、この領域を設けるという概念が大きく関わってくることになる。その方法を以下に説明する。

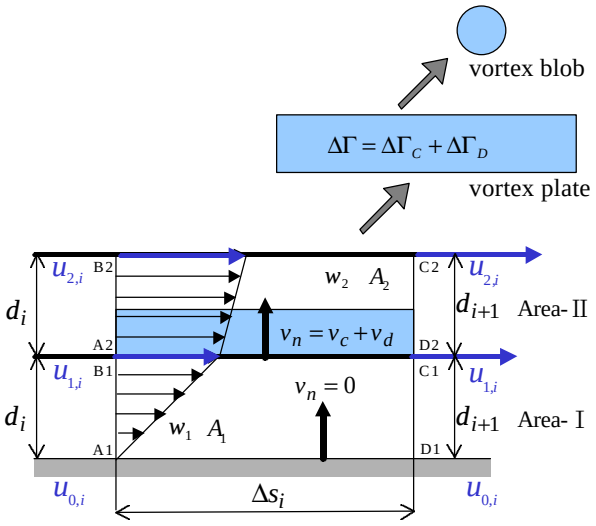


Fig.1 Introduction of nascent vortex elements

流れ場に導入される渦要素の持つ循環量を算出するために式(3)を$0 \le y \le d$ 領域で積分する。

$$\int_0^d \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy = n \int_0^d \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y} \right) dy \quad (11)$$

ただし、

$$d = \frac{1}{2}\left(d_i + d_{i+1}\right)$$

ここで、渦度の定義式(4)から

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \approx -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (12)$$

を式(11)に考慮し積分すると、式(11)左辺の移流項は

$$\int_0^d \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_c{}^2}{2} \right) + w_c v_c \quad (13)$$

また式(11)右辺の粘性拡散項は

$$n \int_0^d \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y} \right) dy = n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=d} - n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (14)$$

となる。ここで、γ、w_c、および(u_c, v_c)はそれぞれ循環量の変化量、渦度、および流速、添字[c]は移流によって算出されることを示している。さらに式(13)右辺第一項は循環量の時間変化、第二項は領域Ⅰから流れ方向に流入流出する循環量の変化量、第三項は領域Ⅰから法線方向に流入流出する単位幅あたりの循環量をそれぞれ表している。また式(14)右辺第一項は $y = d$ における粘性拡散項、第二項は $y = 0$ における粘性拡散項である。よって式(13)および(14)から

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_c{}^2}{2} \right) + w_c v_c = n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=d} - n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (15)$$

が成立する。領域Ⅰから法線方向に流入流出する単位時間、単位幅あたりの循環量は式(15)左辺第三項および右辺第一項であり

$$w_c v_c - n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=d} = -\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_c{}^2}{2} \right) - n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (16)$$

となる。よってΔt 間に領域Ⅰから生成される循環量$\Delta\Gamma$ を次ように定義する。

$$\Delta\Gamma = \left\{ w_c v_c - n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=d} \right\} \Delta s_i \Delta t \quad (17)$$

$$= \left\{ -\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_c{}^2}{2} \right) - n \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \right\} \Delta s_i \Delta t \quad (18)$$

式(17)、(18)を用いて移流項および粘性拡散項の影響を的確に考慮することで、渦要素の持つ循環量を算出することができる。さらに領域の中の速度分布を直線勾配と仮定したことにより、移流および粘性拡散の影響をそれぞれ独立に考えることができる。

そこでまず、移流によって算出される循環量$\Delta\Gamma_C$について考える。式(17)、(18)より

$$\Delta\Gamma_C = w_c v_c \Delta s_i \Delta t \quad (19)$$

$$= \left\{ -\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_c{}^2}{2} \right) \right\} \Delta s_i \Delta t \quad (20)$$

となり、式(19)に示す法線方向に算出される循環量は、式(20)に示す循環量の時間変化量および流入流出量とで表すことができる。また移流速度v_c は連続の条件と境界条件における

Copyright © 2000 by JSCFD

non-slip 条件から以下のように算出される。

$$v_c = \frac{1}{\Delta s_i}\left(\frac{d_i u_{1,i}}{2} - \frac{d_{i+1} u_{1,i+1}}{2}\right) \tag{21}$$

同様に、粘性拡散によって算出される循環量$\Delta\Gamma_D$は式(17)より

$$\Delta\Gamma_D = -n\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=d} \Delta s_i \Delta t \tag{22}$$

となり、式(22)は$y=d$における拡散項である。ここで、渦度の勾配を次のように定義する。図1に示すように$y=d$における渦度の勾配は領域Ⅰ、Ⅱにおける渦度をそれぞれw_1、w_2とするとそれらの渦度を差分的に取り扱って以下のように表すことができる。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=d} = \frac{w_2 - w_1}{d} \tag{23}$$

ただし、渦度の代表点は領域の中心をとっている。また拡散速度v_dは式(16)を変形することによって

$$v_d = -\frac{n}{w_d}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=d} \tag{24}$$

が得られる。ここでw_dは粘性拡散によって考慮される渦度であり、領域Ⅰ、Ⅱの平均をとることによって

$$w_d = \frac{w_1 + w_2}{2} \tag{25}$$

と定義する。実際に流れ場に放出される渦要素は以上で与えられた移流および粘性拡散の組み合わせによって算出することができる。また $y=d$ において移流速度v_cおよび拡散速度v_dをあわせた法線方向速度v_nが正、すなわち

$$v_n = v_c + v_d > 0 \tag{26}$$

のとき、渦要素を矩形要素として流れ場に導入し、物体からの位置が$2d$までに到達したら渦度の等価なblobに変換する。

5. 計算条件

本報では、一様流体中における二次元静止円柱まわりの出発渦流れを解析する。円柱を100個の線要素で近似し、一様流速U_∞、円直径Dをそれぞれ代表速度、代表長さとして定義したレイノルズ数$\mathrm{Re} = U_\infty D/n = 1000$において解析する。時間間隔は$\Delta t = 0.05$とし、これらはすべての場合において同一条件とする。また本解析においては速度参照点高さdを物体から一定に設置し、排除厚さd^*

$$d^* = 1.136\sqrt{n\Delta t} \tag{27}$$

との比によって$d/d^* = 3.0$、4.0、5.0の関係で変化させる。また、移流および粘性拡散の影響がそれぞれどれだけ的確に算出されるか検証するため、導入する循環量$\Delta\Gamma$を以下の三条件にわけ、解析した。

① $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_C$ (移流を考慮)

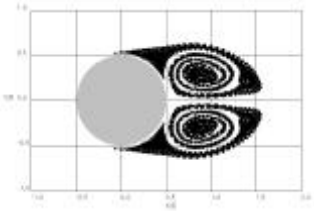
② $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_D$ (粘性拡散を考慮)

③ $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_C + \Delta\Gamma_D$ (移流と粘性拡散を考慮)

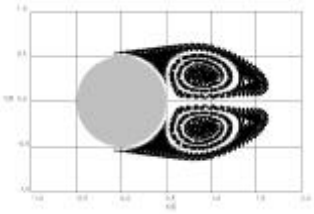
6. 解析結果

6.1 移流を考慮

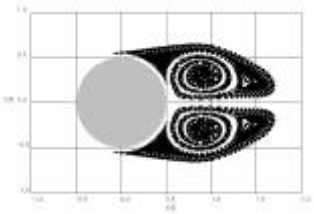
まず移流項を考慮した結果について述べる。図2は無次元時間$T = 5.0$のときのflow patternを示している。d/d^*が変化しても基本的な双子渦構造にはっきりとした違いは見られなかった。また、図3でd/d^*が変化しても循環量$\Delta\Gamma_C$の算出量に大きな違いは現われなかった。このことからd/d^*の変化とともに速度が変化し、それによって$\Delta\Gamma_C$が一定の値を保ち続けるということがわかる。その結果、d/d^*が変化しても図2および図3には顕著な差異が現われなかった。また、図4に抗力係数C_Dを示す。d/d^*が大きくなるにつれてC_Dは小さくなっていくが、その時間変動の傾向はd/d^*によらずほぼ一致する。



(a) $d/d^* = 3.0$



(b) $d/d^* = 4.0$



(c) $d/d^* = 5.0$

Fig.2 Flow patterns $T = 5.0$
(convection affection)

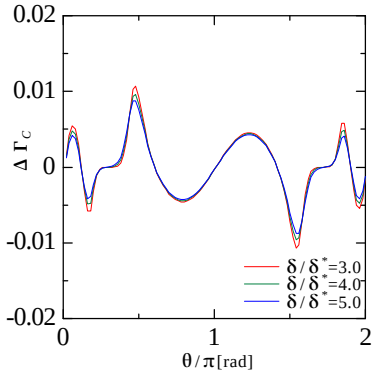


Fig.3 A circulation of convection $T = 5.0$
(convection affection)

Copyright © 2000 by JSCFD

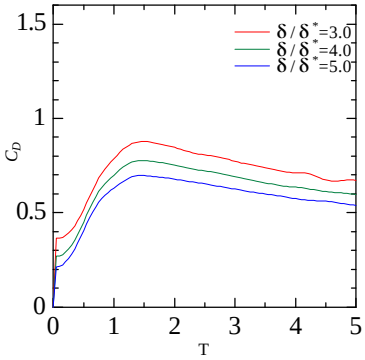


Fig.4 A drag coefficient
(convection affection)

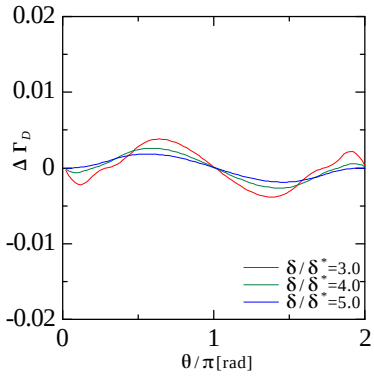


Fig.6 A circulation of diffusion $T = 5.0$
(viscous affection)

6.2 粘性拡散を考慮

粘性拡散項を用いた場合について解析した結果について述べる。図 5 は無次元時間$T = 5.0$のときの flow pattern を示している。d/d^*が大きくなるにつれて後流構造に変化が現われ、徐々に双子渦が形成されなくなる。さらに図 6 からもわかるように、d/d^*が大きくなるにつれて循環量$\Delta\Gamma_D$の生成が減少し、粘性拡散の影響が徐々に小さくなっていくことがわかる。図 5 および図 6 の結果から粘性拡散の特徴が的確に捉えられていることがわかる。また図 7 は抗力係数C_Dを示している。d/d^*が大きくなるにつれてC_Dの値は減少するが、時間の経過とともにC_Dに大きな変動は現われず、安定した解に収束する傾向を示している。

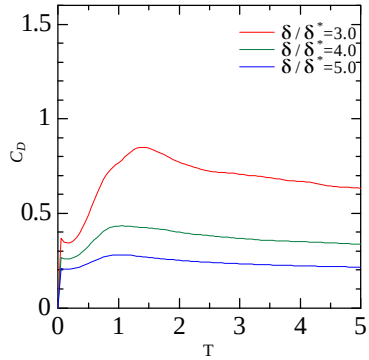
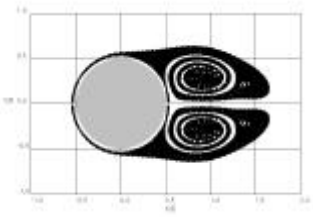
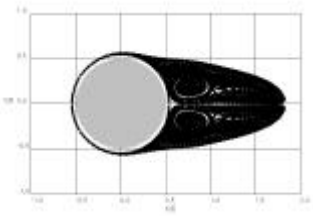


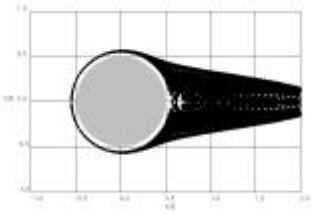
Fig.7 A drag coefficient
(viscous affection)



(a) $d/d^* = 3.0$



(b) $d/d^* = 4.0$

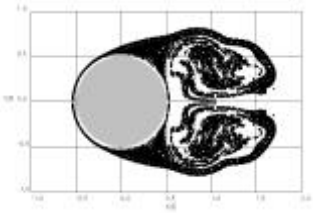


(c) $d/d^* = 5.0$

Fig.5 Flow patterns $T = 5.0$
(viscous affection)

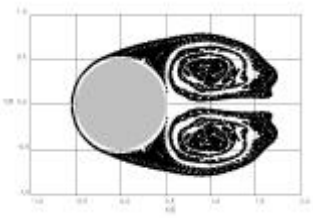
6.3 移流と粘性拡散を考慮

最後に移流項および粘性拡散項を考慮した結果について報告する。図 8 は無次元時間$T = 5.0$のときの flow pattern を示している。図 8(a)では算出量が過度になり、後流構造に若干の違いが見られるものの、図 8(a)(b)および(c)を比較してみるとd/d^*の値が変化しても flow pattern に顕著な差異は現われなかった。また、図 9 はd/d^*が大きくなるにつれて移流効果が大きく影響し、逆に図 10 はd/d^*小さくなるにつれて粘性拡散効果が大きく影響している。よって相互作用を考慮することで、流れ場に導入される循環量が適切に算出されていることがわかる。また、図 11 は抗力係数C_Dを示している。図 4 と図 7 に示すように、移流と粘性拡散をそれぞれ独立に考慮した場合、C_Dは小さい値を示していたが、両方を考慮することによってC_Dを適切に算出することができた。

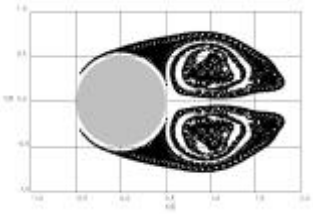


(a) $d/d^* = 3.0$

Copyright © 2000 by JSCFD



(b) $d/d^* = 4.0$



(c) $d/d^* = 5.0$

Fig.8 Flow patterns $T = 5.0$
(convection and viscous affections)

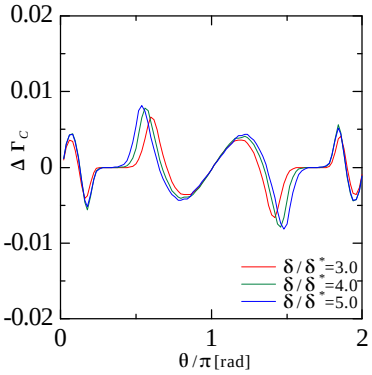


Fig.9 A circulation of convection $T = 5.0$
(convection and viscous affections)

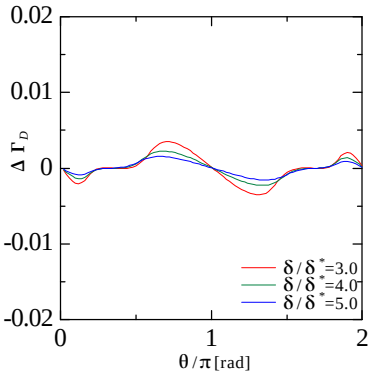


Fig.10 A circulation of diffusion $T = 5.0$
(convection and viscous affections)

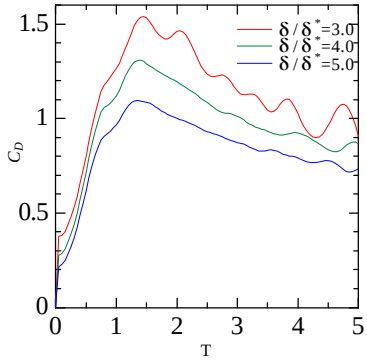


Fig.11 A drag coefficient
(convection and viscous affections)

7. 結論

まず循環量を生成する際に、移流および粘性拡散の影響をそれぞれ独立に考慮して解析を行った。移流だけを考慮した場合、速度参照点の高さ d を変化させても生成される循環量に顕著な差異は見られなかった。すなわち、d とともに速度が変化し、循環量を一定に保つ作用が働くということである。また粘性拡散だけを考慮した場合、d の値が大きくなるにつれて徐々に渦度の生成は減少し、その影響を的確に表現できたと考えられる。最後に相互作用を考慮した結果を比較検討してみると、d の変化によらずほぼ同様の現象を示す結果となった。以上より、この手法は、移流および粘性拡散の相互作用が働き、d に見合った循環量を算出することができるということである。よって解析手法としての有効性を示すことができ、またこれらの方法では三次元解析への拡張が容易であることから、さらなる手法の確立が期待される。

8. 参考文献

[1]亀本 数値流体力学, 2-2, (1994), 28

[2] Kamemoto K. and Miyasaka T., “Development of a vortex and heat elements method and its application to analysis of unsteady heal transfer around a circular cylinder in a uniform flow,” Selected Paper of 1st. Int. Conf. on Vortex Methods, Kobe, Nov.4-5, (1999), pp.135-144.

[3] Wu, J.C. and Thompson, J.E., “Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier-Stokes Equation using an integro-differential formulation,” Computers and Fluids 1, (1973), pp.197-215.

[4] Uhlman, J.S., “An integral equation formulation of the equation of motion of an incompressible fluid,” Naval Undersea Warfare Center T.R. 10-086, (1990).

Copyright © 2000 by JSCFD