気泡流の疑似乱れのモデリング

Pseudo Turbulence Modeling in Bubbly Flow

○ 杉山 和靖, 東大 IML, 〒 113-8656 東京都文京区弥生 2-11-16, E-mail：sugiyama@fel.t.u-tokyo.ac.jp
高木　周，東大・機械工, 〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail：takagi@mech.t.u-tokyo.ac.jp
松本　洋一郎，東大・機械工, 〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail：ymats@mech.t.u-tokyo.ac.jp
Kazuyasu SUGIYAMA, IML, Univ. of Tokyo, 2-11-16, Yayoi, Bunkyo-ku, Hongo, Tokyo
Shu TAKAGI, Dept. of Mech. Eng., Univ. of Tokyo, 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Hongo, Tokyo
Yoichiro MATSUMOTO, Dept. of Mech. Eng., Univ. of Tokyo, 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Hongo, Tokyo

In a bubbly flow, the translational motion of bubbles enhances the turbulent mixing, which is known as the pseudo turbulence. The mezzo-scale phenomena in the bubbly flow, which are related to the flow structure due to the bubble-bubble interaction, play an important role on the pseudo turbulence. In order to study the mezzo-scale phenomena of the bubbly flow, the DNS are conducted for the multi-bubble system. The two-fluid simulation is also conducted in the same condition as the present DNS. Constitutive equations, where boundary conditions of the pressure and the vorticity on the interface are taken into account, are derived for the averaged equations. The turbulent energy spectrum obtained by the present two-fluid model reproduces the DNS result well, while the result by the conventional two-fluid model, where the boundary conditions on the interface are neglected, show considerable difference with the DNS one.

1. 緒言

気泡流は，原子炉の冷却系統，バイオリアクタ等の工業装置で見受けられ，非常に重要な問題とされている．気泡流では気泡の並進運動に伴い，周囲流体を排除することによって乱れが作り出される．このような乱れは，単相状態の乱れと区別して「疑似乱れ」と呼ばれている．気泡流の数値予測を考えると，気泡流には多様なスケールが存在するため，全てのスケールの影響を考慮して直接計算を行うことは計算資源が莫大となる．工業的な応用を考えると，単相乱流の Large Eddy Simulation(LES) と同様に，二相の保存方程式をフィルタ操作することによって導き出される「平均化方程式」を用いて，粗視化された場を解く方法が有効である．平均化操作により幾つかの構成方程式が必要となるが，従来の気泡流解析では，疑似乱れに対して重要と考えられる SGS(Sub-Grid Scale) 応力や気液界面での境界条件に対する構成方程式が無視されている．本研究では，それらの影響をモデル化し，計算負荷が小さく，信頼性が高い，新たな気泡流予測手法を構築する．

2. 仮定

本研究では，液体が不純であり，気泡体積が十分に小さく，気泡周囲の圧力変動が絶対圧力に対して十分に小さい状況を想定して解析を行う．従って，以下の仮定の下で計算を進める．

(1) 気泡表面での境界条件は速度滑りが 0.
(2) 気泡形状は球形.
(3) 気泡体積の変化はない.

3. 直接数値シミュレーション (DNS)

気泡流の疑似乱れに対する詳細な知見を得るために, 空間的に周期的な領域を上昇する多数の球形気泡群の運動を，DNS によって解析する．

3.1 支配方程式

○ 質量保存方程式:

$$\frac{\partial u_{Li}}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

○ 運動量保存方程式:

$$\frac{\partial \rho_k u_{ki}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{ki} u_{kj}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{-\delta_{ij} p + \mu_k \left(\frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{kj}}{\partial x_i}\right)\right\} + (\rho_k - \rho_L) g_i. \tag{2}$$

○ 気泡の並進運動方程式:

$$\frac{4\pi r_G^3 \rho_G}{3}\frac{du_{Gi}}{dt} = \int_{r=a} dS \left\{-\delta_{ij} p + \mu \left(\frac{\partial u_{Li}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{Lj}}{\partial x_i}\right)\right\} n_j + \frac{4\pi r_G^3}{3}(\rho_G - \rho_L) g_i. \tag{3}$$

○ 気泡の角運動方程式:

$$\frac{8\pi r_G^5 \rho_G}{15}\frac{d\omega_{Gi}}{dt} = \int_{r=a} dS \epsilon_{ijk} r_j \left\{\mu \left(\frac{\partial u_{Lk}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{Ll}}{\partial x_k}\right)\right\} n_l. \tag{4}$$

3.2 計算手法

質量・運動量保存式 (式 (1) (2)) は気泡よりも小さな矩形格子を用いて離散化し，直接解いている．本研究では矩形格子を用いており，気泡表面上での固着条件を満たすための工夫が必要であるが，文献 (1) の方法に従っている．気泡の並進運動や回転運動はニュートンの運動則に基づき，式 (3) (4) から，慣性と重力や表面に働く応力の積分値との釣り合いから計算している．

連続相の空間微分は 4 次精度中心差分によって近似している．また，流体側の時間積分は 4 階 4 次精度の Runge-Kutta 法によって行っている．本研究では各々の気泡表

面上に 2592(36(θ) $\times$ 72(ϕ)) 個のサンプル点を配置し，それらの点上の応力を補間によって算出し，球面上での表面積分を直接行い，気泡に働く力を算出している．圧力と速度勾配の気泡表面上への補間は，各方向 (x,y,z) に対して 5 次精度のラグランジュ補間を適用している．気泡運動の時間進行法は，位置に対して 2 次精度 Crank - Nicholson 法，速度に対して 2 次精度 Adams -Bashforth 法によって行っている．気泡の角速度は，気相密度が液相密度に比べて十分に小さいといった関係を利用し，回転に寄与する応力の表面積分が 0 となるように決定している．気泡の並進運動は，軽い気泡の運動を陽的で安定に解くために，気泡の並進運動の急激な変化に対してポテンシャルの影響による付加慣性力を導入している．さらに，気泡自身の慣性力に関し，気泡と流体との密度比を 0.05 として安定化をはかっている．また，気泡間の流体力学的相互作用は気泡間の格子を介して直接計算されているが，2 気泡の衝突は流体の保存式のみで扱うことができない．本論文では，完全弾性衝突を仮定した計算結果を示す．なお，気泡間反発係数をパラメタとして計算することにより，流体統計量に対する気泡間衝突の影響が十分に小さいことを確認している．

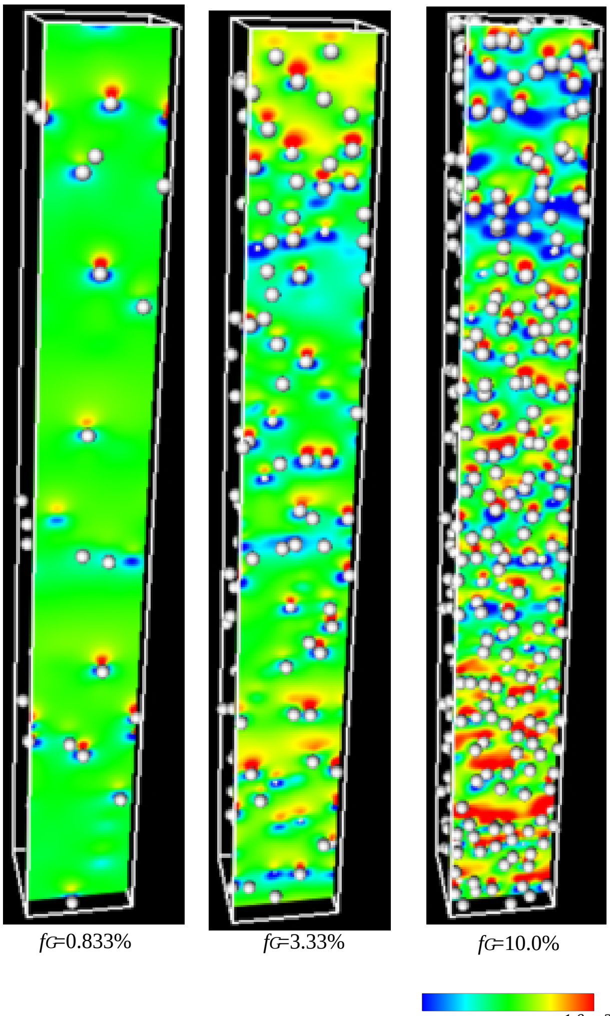


Fig. 1 Instantaneous bubbles and pressure distributions (Case3)

3.3 計算条件

周期領域中で上昇する多数の球形気泡運動について，ボイド率 (f_G) をパラメタとして計算を行う．気泡半径 (a)，動粘性係数 (ν)，重力加速度 (g) は，それぞれ，0.25(mm)，1.0×10^{-6} (m^2/s)，-10 (m/s^2) である．計算領域の大きさと格子点数に対する計算条件は表 1 に示される．

Table 1. Simulation conditions of domain size and number of grid

	Domain size(mm^3)	Number of grid
Case1	$4.0\times4.0\times4.0$	$64\times64\times64$
Case2	$8.0\times8.0\times8.0$	$128\times128\times128$
Case3	$32.0\times4.0\times4.0$	$512\times64\times64$

3.4 計算結果

3.4.1 瞬時の流動構造 図 1 は，case3 の計算領域で計算された瞬時の気泡の位置，圧力分布である．ボイド率 (f_G) は 0.833, 3.33, 10.0(%) である．この図より，気泡の混入量が多いほど，圧力の分布が横方向にゆがんでおり，横方向に働く気泡間の相互作用が強いことがわかる．

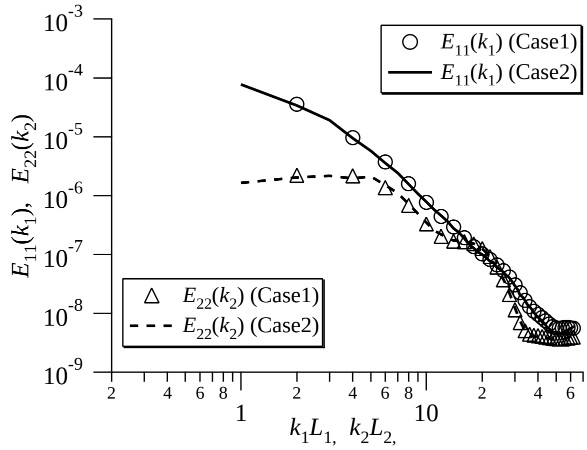


Fig. 2 One-dimensional vertical energy spectrum distribution versus wave number. ($f_G=0.833$ (%), case1 and case2)

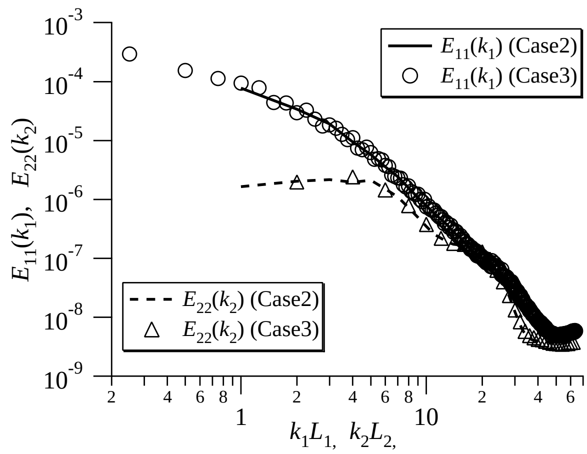


Fig. 3 One-dimensional vertical energy spectrum distribution versus wave number. ($f_G=0.833$ (%), case2 and case3)

3.4.2 エネルギスペクトル 気泡流の疑似乱れの強さや空間的な分布を評価するために，図 2, 3 に $f_G=0.833$(%) における 1 次元縦エネルギスペクトル分布を示す．図 2, 3 には，$E_{11}(k_1)$ (鉛直方向成分)，$E_{22}(k_2)$ (水平方向成分) が示されている．図 2 は case1 と case2，図 3 は case2 と case3 の結果である．また，図中の L_x, L_y はともに 8.0 (mm) である．図 2, 3 から，それぞれの case1, 3(記号) と case2(線) の結果がよく一致している．すなわち，計算領域の大きさの違いに対し，エネルギスペクトル分布の違いは十分に小さい．また，エネルギスペクトルの分

布が波数の増大に対して滑らかに減衰している．このことから，近い波数間の乱れの間には相関があると考えられる．また，低波数域でのエネルギスペクトルの値が鉛直方向成分に比べて水平方向成分の方よりも卓越して大きく，気泡の誘起する乱れは非等方性が強い．

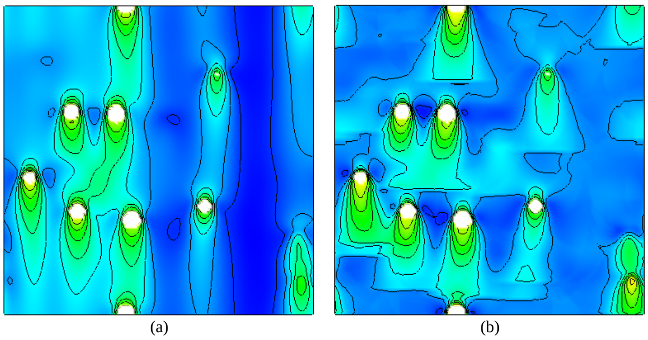


Fig. 4 Instantaneous velocity (u_1) and bubbles. (f_G= 0.833(%)) ((a) DNS; (b) Superimposed velocity reconstructed by the present database of the spherical harmonics/polynomials expansions ($\sum_{\forall \mathrm{Bubbles}} u_i^{(PI)}$)))

3.4.3 気泡周囲の平均速度場の抽出 気泡周囲の平均速度場は，平均化方程式を用いた気泡流解析モデルの高度化に対して有効であると考えられる．ここでは，気泡が誘起する平均速度ベクトル $u_i^{(PI)}$ をデータベース化する手法を示し，気泡近傍の速度場が気泡流の疑似乱れに及ぼす影響を評価する．軸対称性を仮定すると，r 方向成分の速度 $u_r^{(PI)}$ はポロイダルベクトル成分によって，以下のように記述できる [2]．

$$u_r^{(PI)}(r,\theta,Re) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|u_G - u_L^{\infty}| \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \tilde{u}_{nm}^{(r)}(Re) a^m r^{-m} Y_n(\theta). \tag{5}$$

ここで，$|u_G - u_L^{\infty}|$ は周囲流体に対する気泡の相対速度，$\tilde{u}_{nm}^{(r)}$ は球面調和関数/多項式展開の係数である．$\tilde{u}_{nm}^{(r)}$ は気泡レイノルズ数の関数として与えられる．また，Y_n は n 次の球面調和関数であり，Legendre 多項式を用いて以下のように書き表される．

$$Y_n(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos\theta) \tag{6}$$

θ 方向成分の速度 $u_\theta^{(PI)}$ は，連続の式から，式 (5) 中の展開係数 $\tilde{u}_{nm}^{(r)}$ を用いて以下のように書き表される．

$$u_\theta^{(PI)}(r,\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|u_G - u_L^{\infty}| \times \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}} \tilde{u}_{nm}^{(r)} a^m r^{-m} Y_{n1}(\theta). \tag{7}$$

ここで，$Y_{n1}(\theta)$ は n 次 1 階の球面調和関数であり，Legendre 陪多項式を用いて以下のように書き表される．

$$Y_{n1}(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi n(n+1)}} P_n^1(\cos\theta) \tag{8}$$

$\tilde{u}_{nm}^{(r)}$ の算出について，まず，球面調和関数の直交性を利用し，球面調和関数の各モードに対して速度の半径方向成分を展開する．そして，球面調和関数の各モードの展開係数に対し，有限な区間 (本研究では $a < r < 6a$) で最小 2 乗法を利用して，r 方向に展開する．

図 4 は $f_G = 0.833(\%)$ における鉛直方向の速度の分布である．図 4(a) は DNS の結果である．図 4(b) は静止流体中において，球面調和関数/多項式展開 (式 (5)(7)) による平均速度場のデータベースを利用し，各気泡の位置と速度から，ある断面に対して各気泡近傍に速度場を重ね合わせした結果である．ボイド率は 0.833(%) である．白い領域は気泡が存在する部分である．図 4 よりデータベースを利用して重ね合わせした速度場の分布 (図 4(b)) は，DNS 結果 (図 4(a)) よりも，やや水平方向に広がっているものの，気泡近傍の後流の構造がよく捉えられている．

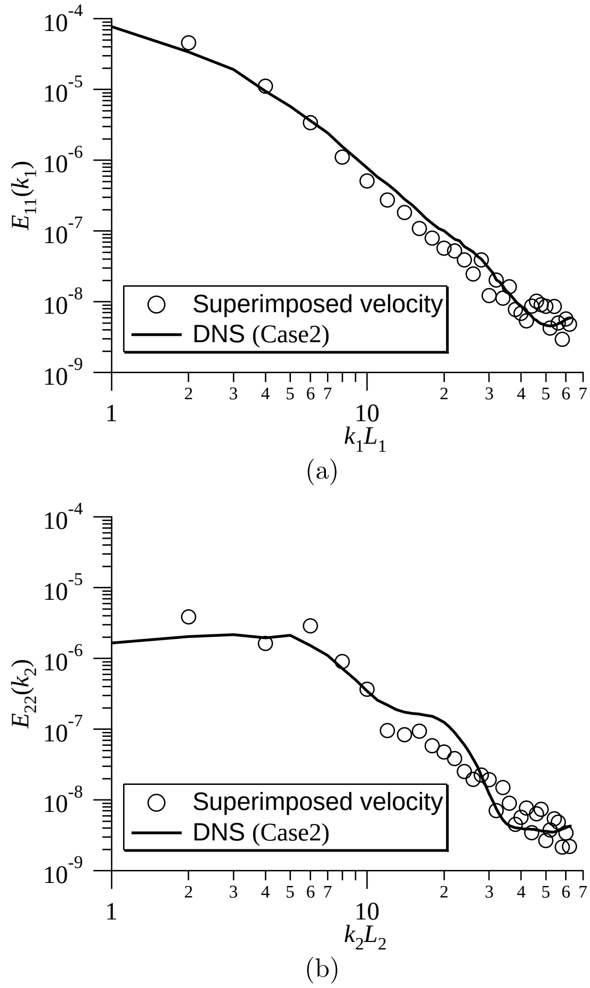


Fig. 5 One-dimensional vertical energy spectrum distribution versus wave number. ((a) Vertical component; (b) Horizontal component) ($f_G = 0.833$ (%), DNS and Superimposed velocity reconstructed by the present database of the spherical harmonics/polynomials expansions)

図 5 は $f_G = 0.833(\%)$ における 1 次元縦エネルギスペクトル分布である．図 5(a) は $E_{11}(k_1)$ (鉛直方向成分)，図 5(b) は $E_{22}(k_2)$ (水平方向成分) が示されている．図 5 には，DNS(実線) とデータベースを利用して場全体に対して重ね合わせした速度場から求めた結果 (記号 ◯) である．データベースを利用した結果は，流体の輸送方程式を解いて求められたものではないため，波数間の乱れのカスケードの影響が考慮されておらず，DNS の結果に比

べて，エネルギスペクトル分布が不連続的である．しかしながら，定量的に両者はよく一致している．図 4, 5 の結果から，気泡流の疑似乱れは，気泡近傍の速度分布が重要であり，気泡周囲の平均速度場の利用が有効である．

3.4.4　気泡が誘起する局所的な SGS 応力　気泡流の数値シミュレーションを用いた研究の多くは，単相乱流の LES と同様に，二相の保存方程式をフィルタ操作することによって導き出される「平均化方程式」が使われている．しかしながら，従来の平均化方程式を用いた解析では，非線形項の平均操作によって派生する SGS 応力が無視されている．筆者らは，単相流の LES で用いられている SGS 応力モデルによって記述されるモデル応力と DNS 結果によって直接計算できる真の SGS 応力との相関を調べている [(1)]．すなわち，気泡流の SGS 応力に対し，いわゆる *a priori* study を行っている．その結果，気泡近傍の平均速度場をデータベース化し，その速度勾配を利用した非線形モデル [(3)] に基づくモデル応力が，Smagorinsky モデル [(4)] やスケール相似則モデル [(5)] によって得られるモデル応力に比べ，真の SGS 応力に対し，高い相関となることを示している．真の SGS 応力 τ_{ij}^* と気泡近傍の平均速度場のデータベースを利用したモデル応力 $\tau_{ij}^{(\mathrm{Model})*}$ は，それぞれ，以下のように書き表される．

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^* &= -\left(\frac{\langle X_L u_i u_j\rangle}{\langle X_L\rangle} - \frac{\langle X_L u_i\rangle\langle X_L u_j\rangle}{\langle X_L\rangle^2}\right)^*, \\ &= -(\overline{u_{Li}u_{Lj}} - \bar{u}_{Li}\bar{u}_{Lj})^*, \end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\tau_{ij}^{(\mathrm{Model})*} \\ &= -\left(\frac{\overline{\Delta}^2}{12}\left(\sum_{\text{All Bub.}}\frac{\partial u_i^{(PI)}}{\partial x_k}\right)\left(\sum_{\text{All Bub.}}\frac{\partial u_j^{(PI)}}{\partial x_k}\right)\right)^*.\end{aligned}\tag{10}$$

ここで，$\langle\cdot\rangle$ は $\overline{\Delta}$ の長さスケールのグリッドによるグリッドフィルタ操作，X_L は液相で 1，気相で 0 の値を持つインディケータ関数，添字*は非一様テンソルを表す．また $\bar{\cdot}$ は，相体積平均操作である．式 (10) 中の速度勾配は，式 (5)(7) に示された平均速度場のデータベースを利用し，以下のように書き表される解析的な速度勾配を座標変換することによって与える．

$$\frac{\partial u_r^{(PI)}(r,\theta)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|u_G - u_L^\infty| \times\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(-m\tilde{u}_{nm}^{(r)}a^m r^{-m-1}Y_n(\theta)\right),\tag{11}$$

$$\frac{\partial u_\theta^{(PI)}(r,\theta)}{\partial r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|u_G - u_L^\infty| \times\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(-\frac{m(m-2)}{\sqrt{2n(n+1)}}\tilde{u}_{nm}^{(r)}a^m r^{-m-1}Y_{n1}(\theta)\right),\tag{12}$$

$$\frac{\partial u_r^{(PI)}(r,\theta)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|u_G - u_L^\infty| \times\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(-\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\tilde{u}_{nm}^{(r)}a^m r^{-m}Y_{n1}(\theta)\right),\tag{13}$$

$$\frac{\partial u_\theta^{(PI)}(r,\theta)}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}|u_G - u_L^\infty| \times\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{m-2}{\sqrt{2n(n+1)}}\tilde{u}_{nm}^{(r)}a^m r^{-m}\frac{\partial Y_{n1}(\theta)}{\partial\theta}\right).\tag{14}$$

式 (10) に基づく SGS 応力モデルの有効性は，次節にて調べる．

4.　平均化方程式を用いた数値シミュレーション (SGS 応力の影響)

DNS と同じ条件によって平均化方程式を用いたシミュレーションを行う．特に，本節では，前節で示された式 (10) に基づく SGS 応力モデルの有効性を調べる．支配方程式や計算手順は，Euler-Lagrange(EL) 法 [(6)] に準じている．気泡の並進運動は，質点として扱ったモデル式を用いている．

4.1　支配方程式

非圧縮性気液二相流において，質量保存方程式に相当する気相と液相の体積率の保存方程式は，それぞれ，以下のように書き表される．

$$\frac{\partial f_G}{\partial t} + \frac{\partial f_G\overline{u_{Gi}}}{\partial x_i} = 0,\tag{15}$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} + \frac{\partial f_L\overline{u_{Li}}}{\partial x_i} = 0.\tag{16}$$

体積率の拘束条件として，以下に示される関係式が成り立つ．

$$f_G + f_L = 1.\tag{17}$$

均一流体としての運動量保存方程式は以下のように書き表される．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_L\overline{u_{Li}}}{\partial t} + \frac{\partial f_L\overline{u}_{Li}\overline{u}_{Lj}}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{\rho_L}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\mu}{\rho_L}\frac{\partial\overline{u_{Li}}}{\partial x_j} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mu}{\rho_L}\frac{\partial\overline{u_{Lj}}}{\partial x_j} - f_G g_1 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j}(f_L\tau_{ij}).\end{aligned}\tag{18}$$

ここでは，$\rho_G/\rho_L << 1$ の関係を用いて，気相の慣性を無視している．また，τ_{ij} は気泡流の SGS 応力であり，式 (9) で与えられる．また，式 (18) の気泡流の粘性係数 μ は Einstein の実効粘性係数 [(7)] によって与えられる．気泡界面が固着条件で与えられる場合，μ はボイド率 f_G の関数として以下のように書き表される．

$$\mu = (1 + 2.5f_G)\mu_L.\tag{19}$$

平均化方程式を用いて気泡流の数値解析を行うには，保存方程式 (式 (15)(16)(18)) のみで閉じていないために，気泡の並進運動を記述する構成方程式が必要となる．気泡の並進運動方程式は気泡に働く力の釣合いによって記述され，気泡に働く力は線形的に分離できるものと仮定する．本研究では，付加慣性力，周囲流体の加速による力，定常抗力，浮力を考慮し，気泡の並進運動方程式を以下のように記述する．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{d\rho_L V_G^{(l)}u_{Gi}^{(l)}}{dt} - \frac{D_L\rho_L V_G^{(l)}\overline{u_{Li}}}{Dt}\right) \\ &= V_G^{(l)}\left\{-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_L\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\overline{u_{Li}} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\overline{u_{Lj}}\right)\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\pi a^{(l)2}\rho_L C_D\left|u_G^{(l)} - \overline{u_L}\right|(u_{Gi}^{(l)} - \overline{u_{Li}}) \\ &\quad -V_G^{(l)}g_1\rho_L\end{aligned}\tag{20}$$

ここで，V_G は気泡の体積であり以下のように書き表される．

$$V_G = \frac{4}{3}\pi a^3. \tag{21}$$

また，添字 (l) は，ラグランジュ的に扱われる個々の気泡の通し番号を表す．式 (20) の右辺第２項における C_D は気泡に働く抗力係数であり，以下のように書き表される単一粒子に対する実験式 [8] を用いる．

$$C_D = \frac{24}{Re_b^{(l)}}\left(1 + 0.15 Re_b^{(l)0.687}\right). \tag{22}$$

ここで，Re_b は気泡レイノルズ数であり，以下のように書き表される．

$$Re_b^{(l)} = \frac{2\rho_L a \left|u_G^{(l)} - \overline{u_L}\right|}{\mu_L}. \tag{23}$$

4.2　計算手法

支配方程式は有限差分法によって離散化する．連続相の時間積分は，２次精度の Adams-Bashforth 法によって行っている．空間微分精度は，４次精度の中心差分法で近似している．また，連続相から分散相への内挿は，５次精度のラグランジュ補間を適用している．気泡運動はラグランジュ的に扱っている．気泡運動の時間進行法は，速度と位置に対して，それぞれ，２次精度 Adams-Bashforth 法，２次精度の Crank-Nicholson 法を適用している．また，ボイド率の算出には，圧力の非物理的な高波数成分の除去に適した，Template Delivery 法 [6] を用いている．

4.3　計算条件

計算領域の立方体中の一辺の長さは 16mm であり，16 分割されている．式 (18) 中の SGS 応力 τ_{ij} について，0 とおいたものと式 (10) によって与えられたものの，2 通りに対して計算を行う．

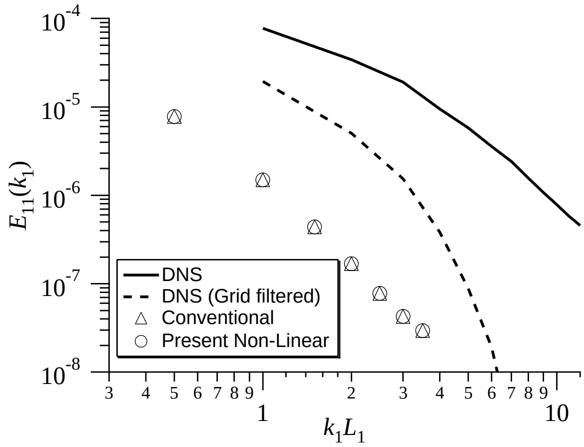


Fig. 6 One-dimensional vertical energy spectrum distribution versus wave number. (Vertical component, $f_G = 0.833$ (%))

4.4　計算結果

気泡流の疑似乱れの強さや空間的な分布について DNS 結果と比較するために，図 6 に，ボイド率 (f_G) が 0.833% の場合における，1 次元縦エネルギスペクトルの鉛直方向成分を示す．図 6 中の 2 つの線は DNS 結果であり，実線は生データから算出されたもの，点線は DNS の結果にフィルタ操作が施されたものである．また，図中の 2 つの記号は平均化方程式を用いた結果であり，△ と ◯ は，それぞれ，SGS 応力項が 0 である従来のモデルによるもの (Conventional)，SGS 応力項が式 (10) によって与えられたもの (Present Non-Linear) である．図 6 の実線と点線から，グリッドフィルタ操作によってエネルギスペクトルが小さくなることがわかる．これは，気泡群が誘起する疑似乱れの分布が局在化しており，グリッドフィルタ操作によって，局在化した乱れの分布が滑らかになるためであると考えられる．気泡流の平均化方程式は NS 方程式にグリッドフィルタ操作を施すことによって導出されるため，平均化方程式を用いた計算結果は点線に一致することが望ましい．図 6 より，Conventional のエネルギスペクトルは DNS 結果 (直線や点線) に比べて非常に過小評価である．すなわち，従来の平均化方程式を用いた数値シミュレーションによって予測される気泡流の疑似乱れは過小評価となることに相当する．また，Conventional と Present Non-Linear には，有意な違いが認められない．筆者らによって行われた *a priori* study によると，Present Non-Linear モデルによって得られるモデル応力は真の SGS 応力との相関が高く，気泡流の SGS 応力モデルとして有効であることが示されている [1]．しかしながら，図 6 より，従来の SGS 応力の影響を無視した平均化方程式を用いた結果 (Conventional) と DNS 結果との違いは，SGS 応力の影響を導入しても改善されないことがわかる．このことから，気泡流の疑似乱れをモデル化するには，SGS 応力以外の影響を考慮しなくてはならない．次節では，従来の気泡流の解析手法の問題点について議論し，解決方法を示す．

5.　従来の気泡流解析手法の問題点と解決手法

5.1　はじめに

本節では，非圧縮性気泡流を対象とし，既存のポイントフォースモデルや，平均化方程式を用いた二相流解析で用いられている数学的な致命的欠陥を式展開によって示すとともに，その解決方法について提案する．

まず，既存の二相流解析の問題点は，大きく分けて以下の２点挙げられる．

1. 分散相界面での境界条件が正しく扱われていない．
2. 非線形性相関項のモデルが不十分．

第 2 の問題点については前節で議論しており，以下，第 1 の問題点について議論する．

5.2　ポイントフォースモデルの問題

ストークス流の場合 ($Re = 0$), ポイントソース法を用いることによって，粒子表面上の境界条件によらず，粒子から離れた速度場は正しく計算される．ポイントソースの影響が考慮された運動量方程式は以下のように書き表される．

$$0 = \nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p). \tag{24}$$

ここで，$\mathbf{f}_p$ は粒子に働く力，$\delta(\mathbf{x})$ は，Dirac のデルタ関数を表す．無限静止流体中を運動する単一粒子について考えると，速度が遠方で 0 に減衰する条件 ($u|_{r\to\infty} \to 0$) と連続の式と式 (24) を満たす速度の解の１つは，$O(r^{-1})$ で減衰するオゼーンテンソルで記述され，以下のように書き表される．

$$u_i = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3}\right) f_{pj}. \tag{25}$$

また，連続の式と式 (24) を満たす速度の同次解は境界条件の影響が反映されるように用いられ，以下のように調和関数で書き表される．

$$u_i^0 = \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5}\right) f_{pj}. \tag{26}$$

この調和関数で記述される速度は，抗力に対して寄与しないため，ポイントフォースモデルでは考慮されていない．しかしながら，遠方において，式 (26) で記述される速度は $O(r^{-3})$ で減衰し，$O(r^{-1})$ で減衰するオゼーンテンソルで記述される速度 (式 (25)) に比べて無視できる．

無限静止流体中のストークス流では，粒子表面上での境界条件に関係なく，粒子に働く力 $\mathbf{f}_p$ と式 (25) で記述される速度場の遠方での振舞いが比例する．応力分布の角度依存性を考えると，式 (25) を用いて記述される応力分布を球面調和関数で展開した場合，1 次のモードのみで記述することができる．まとめると，単一粒子の運動に対してポイントフォースモデルが有効であるためには，以下の 2 つの条件が必要である．

(A) 抗力と遠方での速度分布が比例すること．
(B) 応力分布が球面調和関数の 1 次のモードのみで記述できること．

粒子レイノルズ数が低い低濃度多粒子系の場合，混相流の two-way coupling 法としてポイントフォースモデルが応用されており，例えば Particle-Source-In-Cell (PSIC) モデル [9] が挙げられる．PSIC モデルは，粒子界面での境界条件の影響を考慮しないで，ポイントフォースを導入することによって，流体＝粒子間の相互作用を解くといった計算手法である．$Re << 1$ では粒子運動によって誘起される粒子遠方速度場が妥当に計算できることから，遠方粒子間の相互作用が妥当に計算できる．

しかし中間レイノルズ数 ($Re > O(1)$) では，粒子表面上での境界条件の違い (固着条件・自由滑べり条件など) によって，同じ抗力が粒子に働いているとしても，後流や境界層の構造が異なることによって，遠方の速度分布が異なってくる．また，中間レイノルズ数では，粒子表面上の応力分布を球面調和関数で展開した場合，1 次のモードだけではなく，高次のモードが現れてくる．従って，中間レイノルズ数では，上述した (A)(B) の条件を満たさないため，ポイントフォースモデルは気泡運動によって誘起される遠方場を計算するのに適切でない．

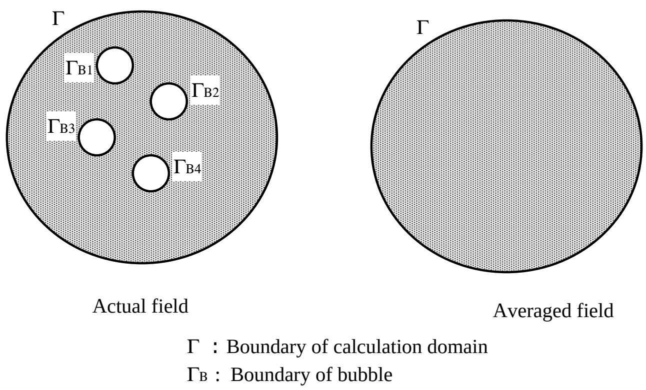


Fig. 7 Schematic of boundaries in actual and two-phase averaged fields

5.3 平均化方程式を用いた解析における境界条件に対する問題

図 7 には実際の気泡流場における境界部 (図左) と，平均化方程式を用いた解析で考慮されている境界部 (図右) が示されている．図中の Γ は計算領域における境界部分，Γ_{Bl} は気泡 l に対する界面 (境界) を表している．DNS の場合を考えると，流体の支配方程式 (質量・運動量保存式) は，図 7 に示された計算領域の境界 Γ と気泡界面での境界 Γ_{Bl} で，適切な境界条件が課せられることによって解かれる．一方，既存の平均化方程式を用いた気泡流のシミュレーションでは，気泡の界面位置 Γ_{Bl} における境界条件が陽に課されずに，支配方程式が解かれる．このような解析でも解が得られるのは，計算領域の境界 Γ における境界条件が満たされていれば，境界値問題として運動量保存式が閉じているためである．しかしながら，気泡界面 Γ_{Bl} の境界の影響は，気泡流の運動量保存式に導入しても，境界条件が冗長になるわけではなく，むしろ，その影響が反映されている方が物理を正しく記述できる．

しかしながら，運動量保存式 (式 (18)) 中に陽に記述されている SGS 応力とは異なり，境界条件の影響は運動量保存式中に陽に現れていない．従って，DNS の結果をそのまま用いることによって境界条件の影響を定式化することはできないため，境界条件の影響をモデル化するには，どの変数をどのような形で記述すればよいのかが問題となる．本論文では，非圧縮性流体の数値解法に適合する気泡流の数値解法を構築することを念頭に置いた上で，既存の気泡流の数値解法における問題点を明らかし，その解決方法を論じる．以下，結論として，境界条件のモデル化には「圧力」と「渦度」の影響を導入することが必要十分であることを数学的に導出する．

5.3.1 圧力に対する問題

式 (17) より以下に示される関係が成り立つ．

$$\frac{\partial(f_G + f_L)}{\partial t} = 0. \tag{27}$$

式 (27) に式 (15)(16) を代入すると，以下の関係が成り立つ．

$$\frac{\partial(f_G\bar{u}_{Gi} + f_L\bar{u}_{Li})}{\partial x_i} = 0. \tag{28}$$

この関係式は，両相の体積流束の和がソレノイダルであることを意味しており，非圧縮性単相流での速度のソレノイダル条件 $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ に相当する．式 (28) より，両相の体積流束の和は Helmholtz 分解を行うことが可能であり，以下のように書き表される．

$$f_G\bar{\mathbf{u}}_{Gi} + f_L\bar{\mathbf{u}}_{Li} = \nabla\phi + \nabla\times\Psi. \tag{29}$$

ここで，ϕ は調和関数 ($\nabla^2\phi = 0$)，Ψ は任意のベクトル関数である．非圧縮性気液二相流では，非圧縮性単相流と同様に，この関係を用いて圧力を算出することができる．

各輸送方程式において，時間に対して離散化したときに，(N) 番目と $(N+1)$ 番目との計算ステップの中間段階を $*$ と書き表す．中間段階 $*$ の時点では，一般に式 (28) の関係が満たされない．そこで，非圧縮性流体と同様に，$(N+1)$ 時刻での両相の体積流束和のソレノイダル条件が満たされるように，以下に示される圧力のポアソン方程式が解かれ，運動量保存式 (式 (18)) の圧力が修正される．

$$\frac{1}{\delta t}\frac{\partial((f_G\bar{u}_{Gi})^{(N+1)} + (f_L\bar{u}_{Li})^*)}{\partial x_i} = \nabla^2 p \tag{30}$$

体積率の輸送方程式 (式 (15)(16)) が陰的に計算される場合，両相の体積率は，以下のように書き表される．

$$f_G^{(N+1)} = f_G^{(N)} - \delta t\frac{\partial(f_G\bar{u}_{Gi})^{(N+1)}}{\partial x_i} = 0. \tag{31}$$

$$f_L^* = f_L^{(N)} - \delta t\frac{\partial(f_L\bar{u}_{Li})^*}{\partial x_i} = 0. \tag{32}$$

式 (30)(31)(32) より，圧力のポアソン方程式は，以下のように書き表される．

$$-\frac{1}{\delta t^2}(f_G^{(N+1)} + f_L^* - 1) = \nabla^2 p \tag{33}$$

式 (30) の $(f_G\bar{u}_{Gi})^{(N+1)} + (f_L\bar{u}_{Li})^*$ はソレノイダル条件を満たさない．このとき以下のように書き表すと，

$$(f_G\bar{u}_{Gi})^{(N+1)} + (f_L\bar{u}_{Li})^* = \nabla\phi^* + \nabla\times\Psi^*. \tag{34}$$

$\nabla \times \Psi^*$ を含む項は，ソレノイダル条件を常に満足することから，圧力方程式からは ϕ^* のみの修正が行われればよい．圧力は，以下に示されるように分解される．

$$p = p^{(A)} + p^{(B)}, \tag{35}$$

ここで，以下の関係が成り立つ．

$$\nabla^2 p^{(A)} \neq 0, \quad \nabla^2 p^{(B)} = 0. \tag{36}$$

従って，圧力のポアソン方程式は，以下のように書き表される．

$$-\frac{1}{\delta t^2}(f_G^{(N+1)} + f_L^* - 1) = \nabla^2 p^{(A)} = \frac{1}{\delta t}\nabla^2 \phi^* \tag{37}$$

式 (35)(36) から，圧力方程式で解かれる圧力 $p^{(A)}$ は，液相体積流束のスカラーポテンシャルに対して $\nabla^2\phi = 0$ を満たすために導入される変数であり，Ψ^* に対しては影響を及ぼさないことが示される．また，ポアソン方程式 (式 (36)) の中で陽に記述されていない調和関数圧力 $p^{(B)}$ は境界条件に関係する部分である．従来の二相流の圧力のポアソン方程式には，計算領域の境界 Γ(図 7) での境界条件が考慮されてるものの，気泡表面での境界 Γ_B(図 7) で流体が均質と見なされており，気泡表面での境界条件が無視されている．正しく圧力場を計算するには，Γ_B での境界条件に適合するように，調和関数である $p^{(B)}$ を与えることが必要であり，既存の平均化方程式でこの影響を無視していることは問題である．

さて，気泡表面上 $(r = a)$ での $p^{(B)}$ が既知であるすると，$p^{(B)}$ は以下のように展開される．

$$\left(p^{(B)}(r,\theta,\phi)\Big|_{r=a} - p(r)|_{r\to\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(p_n Y_n(\theta) + \sum_{m=1}^{n}\left(p_{nm}^{(c)} Y_{nm}^{(c)}(\theta,\phi) + p_{nm}^{(s)} Y_{nm}^{(s)}(\theta,\phi)\right)\Bigg) \tag{38}$$

ここで，Y_{nm}^* は n 次 m 次の球面調和関数，p_{nm}^* はその展開係数である．$p^{(B)}$ が調和関数であり，十分遠方で 0 に収束することを仮定すると，気泡周りの任意の位置における圧力場 $p^{(B)}(\mathbf{r})$ は以下のように書き表される．

$$\left(p^{(B)}(\mathbf{r}) - p(r)|_{r\to\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\Bigg(p_n Y_n(\theta) + \sum_{m=1}^{n}\left(p_{nm}^{(c)} Y_{nm}^{(c)}(\theta,\phi) + p_{nm}^{(s)} Y_{nm}^{(s)}(\theta,\phi)\right)\Bigg) \tag{39}$$

従って，既存の気泡流解析モデルで無視されている $p^{(B)}$ の場全体における分布を得るには，気泡表面での $p^{(B)}$ の値がわかればよい．

5.3.2　渦度に対する問題　気泡流の運動量輸送方程式 (式 (18)) において，局所平均化された運動量の実質時間微分は以下のように書き表される．

$$f_L \frac{D\mathbf{u}_L}{Dt} = f_L\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_L\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_L \tag{40}$$

運動量の実質時間微分について回転をとり，まとめると以下に示される結果を得る．

$$f_L \frac{D\boldsymbol{\omega}_L}{Dt} = f_L(\boldsymbol{\omega}_L\cdot\nabla)\mathbf{u}_L + (\nabla f_L)\times\left(\mathbf{g} - \frac{D\mathbf{u}_L}{Dt}\right) + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}_L \tag{41}$$

ここで，$\boldsymbol{\omega}_L$ は，渦度ベクトルであり，

$$\boldsymbol{\omega}_L = \nabla \times \mathbf{u}_L \tag{42}$$

と書き表される．式 (41) 中の右辺第 1 項は，単相流でも現れる渦度の生成項であり，渦度の伸縮効果を記述する．また，式 (41) の右辺第 2 項は気泡流流特有の渦度生成項である．本研究では，この項を「気泡流のマクロスケール渦度生成項」と呼ぶ．この「気泡流のマクロスケール渦度生成項」は，気泡体積率の勾配と流体の加速度との外積によって表されていることがわかる．この項は，気泡表面での渦度が小さいはずの上昇気泡群が大規模な渦構造を形成する機構を説明する上で重要である．「気泡流のマクロスケール渦度生成項」は既存の気泡流解析でも考慮されており，新たなモデル化の必要はない．

式 (41) の右辺第 3 項は，バルクでは渦度の拡散を表すが，気泡近傍では気泡表面上で生成される渦度の影響を強く受ける．本研究では，この項を「気泡流のミクロスケール渦度生成項」と呼ぶ．気泡流のミクロスケール渦度生成項は，境界の影響 (図 7 の Γ や Γ_B) が反映されなければならない．すなわち，気泡表面での速度滑べりがある場合とない場合に対して，気液界面で生成される渦度の強さの違いが現れるように定式化する必要がある．しかしながら，既存の気泡流解析手法では運動量方程式を解く上で，二相流体が均質であると見なされ，気泡の境界 Γ_B に対する境界条件が無視されている．従って，この「気泡流のミクロスケール渦度生成項」は新たにモデル化する必要がある．

さて，粒子体積率が低い場合，両相の体積流束和の Helmholtz 分解 (式 (29)) を考えると，渦度は式 (29) の左辺に回転をとったものに相当する．式 (29) の右辺第 1 項に回転操作を施すと恒等的に 0 となることから，渦度の境界条件は，式 (29) の右辺第 2 項 $\nabla \times \Psi$ によって反映される．先述したように，調和関数で記述される圧力 $p^{(B)}$ は，$\nabla \times \Psi$ に対しては影響を及ぼさず，$\nabla^2\phi = 0$ を満足するために導入される．従って，渦度に対して調和関数圧力 $p^{(B)}$ が寄与しないことから，「気泡流のミクロスケール渦度生成項」に対する議論は，球面調和関数圧力 $p^{(B)}$ と完全に分離して行うことができる．本研究では「気泡流のミクロスケール渦度生成項」の影響を粘性応力生成と関連づけて，モデル化する．

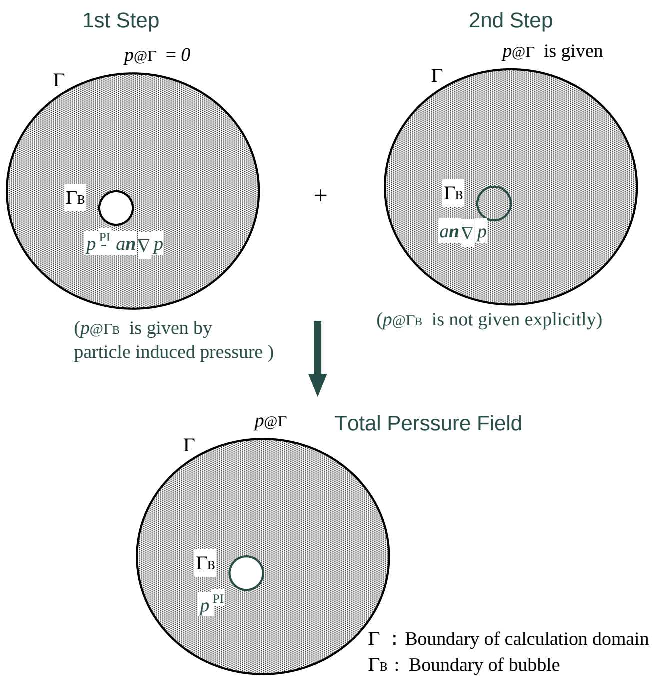


Fig. 8 Schematic of pressure boundary conditions

6. 平均化方程式を用いた数値シミュレーション (境界条件の影響)

6.1 圧力のモデル化

前節で示されたように，気泡流の圧力方程式を解く場合，気泡表面での境界条件の影響は，調和関数で記述される．従って，粒子表面上での圧力分布が陽にわかれば，半径方向の圧力分布が解析的に求まる．本節では，Projection MAC 法に準じた手法によって解析を行うことを念頭に置き，この手法に適した圧力境界条件の設定方法を検討する．

式 (35) の調和関数で記述される圧力 $P^{(B)}$ の影響を導入するため，圧力の算出は 2 段階にわけて行う．中間ステップでの圧力を「1st step の圧力 (調和関数圧力 $p^{(B)}$, 図 8 左上)」とし，二相の速度体積流束の和に対するソレノイダル条件を満足ための圧力のポアソン方程式の解を「2nd step の圧力 $p^{(A)}$(図 8 右上)」と書き表す.「1st step」 では，粒子表面上 Γ_B で「粒子運動によって誘起される圧力 ($p^{(PI)}$)」と「均一流体とみなされているときの圧力 ($x_i \partial_i p|_{r=a}$)」との差が境界条件として与えられている．また，図 8 の遠方 Γ では圧力の境界値は 0 と与えられる.「2nd step」 では，気泡の存在する部分を含めて均質であるとみなし，遠方での境界条件を満足するように圧力方程式 (式 (30)) が解かれる．この,「2nd step」 は従来の二相流解析でも考慮されている部分であり，本節での考察の対象としない．圧力方程式 (式 (30)) は圧力に対して線形であることから,「1st step」 と 「2nd step」とを足した圧力分布は，式 (30) を満足する (図 8 下).

気泡の並進運動方程式 (式 (20)) 中の抗力係数の式 (式 (22)) が静止流体中の単一粒子に対するものであり，その流れ場は軸対称であることから $P^{(B)}$ のモデル化には軸対称性を仮定し，一様流中の単一粒子の周りの DNS の結果を利用する．その DNS の結果によって得られる抗力係数は式 (22) と非常によく一致することを確認している．気泡の運動によって誘起される圧力 ($p^{(PI)}$) には，圧力抗力 $p^{(PD)}$ と付加慣性力 $p^{(AI)}$ の影響を考える．また，均一流体とみなしたときのバルク圧力 $p^{(BK)}$ の影響を二重に勘定することを防ぐために，その影響を毎計算ステップで差し引く．

圧力抗力の影響:

圧力分布が軸対称である場合，無限静止流体中で粒子が誘起する圧力 $p^{(PD)}$ は粒子表面上で以下のように書き表される．

$$p^{(PD)}(r,\theta,Re)\Big|_{r=a} = \left|u_G - u_L^{(\infty)}\right|^2 \sum_{n=0}^{N} p_n(Re) Y_n(\theta) \tag{43}$$

ここで，Y_n は球面調和関数，$p_n(Re)$ はその展開係数である．また，0 次のモードは気泡の並進運動に伴う気泡位置と周囲流体との圧力差，1 次のモードは圧力抗力，高次モードは後流や境界層の影響を表す．本研究では，あらかじめ $p_n(Re)$ をレイノルズ数の関数としてデータベースを構築し，それを参照して気泡周囲の圧力場 $p^{(PD)}$ を決定する．$p^{(PD)}$ が調和関数であり，無限遠で 0 に減衰する ($p|_{r\to\infty}\infty 0$) 関係を用いると，任意位置における $p^{(PD)}$ は以下のように書き表される．

$$p^{(PD)}(r,\theta,Re) = \left|u_G - u_L^{(\infty)}\right|^2 \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} p_n(Re) Y_n(\theta) \tag{44}$$

r,θ 方向に対する圧力勾配は，式 (44) を用いて，以下のように解析的に書き表される．

$$\frac{\partial p^{(PD)}(r,\theta,Re)}{\partial r} = -\left|u_G - u_L^{(\infty)}\right|^2 \times \sum_{n=0}^{N}\left((n+1)\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} p_n(Re) Y_n(\theta)\right), \tag{45}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p^{(PD)}(r,\theta,Re)}{\partial \theta} = -\left|u_G - u_L^{(\infty)}\right|^2 \times \sum_{n=0}^{N}\left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} p_n(Re) Y_{n1}(\theta)\right). \tag{46}$$

付加慣性力の影響:

気泡の相対加速度によってもたらされる圧力 $p^{(AI)}$ を，気泡の並進運動方程式の付加慣性力項 (式 (20) の左辺) と整合するように決定する．気泡が相対加速するとき，気泡表面上での圧力は以下のように書き表される．

$$p^{(AI)}(\mathbf{r})|_{r=a} = \frac{a}{2}\frac{x_j}{r}\left(\frac{du_{Gj}}{dt} - \frac{Du_{Lj}}{Dt}\right). \tag{47}$$

この粒子加速方向に対する表面積分値は以下のように示され，付加慣性力を示す．

$$\begin{aligned}\int_{r=a} dS \;\; p^{(AI)}\frac{x_i}{r} &= \int_{r=a} dS \frac{a}{2}\frac{x_i x_j}{r^2}\left(\frac{du_{Gj}}{dt} - \frac{Du_{Lj}}{Dt}\right) \\ &= \beta\frac{4\pi a^3}{3}\left(\frac{du_{Gi}}{dt} - \frac{Du_{Li}}{Dt}\right).\end{aligned} \tag{48}$$

ここで，$\beta = 1/2$ であり，球の付加質量係数に一致することから，式 (20) の左辺と整合することがわかる．$p^{(AI)}$ が調和関数であり，無限遠で 0 に減衰する ($p|_{r\to\infty} \to 0$) 関係を用いると，任意位置における $p^{(AI)}$ は以下のように書き表される．

$$p^{(AI)}(\mathbf{r}) = \frac{a^3}{2}\frac{x_i}{r^3}\left(\frac{du_{Gi}}{dt} - \frac{Du_{Li}}{Dt}\right). \tag{49}$$

式 (49) から，付加慣性力に対する圧力勾配は以下のように書き表される．

$$\partial_i p^{(AI)}(\mathbf{r}) = \frac{a^3}{2}\left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5}\right)\left(\frac{du_{Gj}}{dt} - \frac{Du_{Lj}}{Dt}\right). \tag{50}$$

バルク圧力の影響:

粒子表面上では，流体を均一とみなしたときの圧力勾配が存在する．その影響を二重に換算することを避けるために，粒子上での境界条件を満たすためにはその分を差し引く必要がある．その影響を $p^{(BK)}$ とする．2nd step を解いたときの N 計算ステップにおける圧力分布を $p^{(\infty)}$ と書き表す．$p^{(\infty)}$ の 1 階微分を考慮すると，粒子表面上での $p^{(BK)}$ は以下のように近似される．

$$p^{(BK)}(\mathbf{r})\Big|_{r=a} = -\, x_j|_{r=a}\left(\partial_j p^{(\infty)}(\mathbf{r})\Big|_{r=0}\right). \tag{51}$$

$p^{(BK)}$ が調和関数であり，無限遠で 0 に減衰する ($p|_{r\to\infty} \to 0$) 関係を用いると，任意位置における $p^{(BK)}$ は以下のように書き表される．

$$p^{(BK)}(\mathbf{r}) = -\frac{a^3 x_j}{r^3}\left(\partial_j p^{(\infty)}(\mathbf{r})\Big|_{r=0}\right). \tag{52}$$

式 (52) から，バルクの圧力分布に対する圧力 $p^{(BK)}$ の勾配は以下のように書き表される．

$$\partial_i p^{(BK)}(\mathbf{r}) = -a\left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5}\right)\left(\partial_j p^{(\infty)}(\mathbf{r})\Big|_{r=0}\right). \tag{53}$$

6.2　気泡界面での渦度生成のモデル化

本研究では気泡界面での渦度生成を粘性応力生成と関連づけて議論する．粘性応力は速度勾配に比例する形で記述されるが，NS 方程式中の速度勾配は非線形である．従って，バルクでの寄与と境界条件への寄与が線形的に記述される圧力 (式 (35)) とは異なり，速度勾配はバルクでの寄与と境界条件への寄与とを数学的に分離することが困難である．本研究では，粒子運動の速度勾配へ及ぼす影響が粒子表面付近で強く，遠方で弱いとして，以下に示されるように重み関数を用いて粘性応力を記述する．

$$\sigma_{ij}^{(E)} = (1-w)\sigma_{ij}^{(\infty)} + w\sigma_{ij}^{(PI)}. \tag{54}$$

肩の添字に関して，(E) は実効, (∞) は流体を均一とみなした場合，(PI) は粒子が誘起する影響を表す．また，w はグリッド長さと粒子表面からの距離を関数とした重み関数であり，以下のように書き表される．

$$w(\xi) = 1 - \frac{\xi}{\Delta x} \quad (0 \le \xi \le \Delta x), \tag{55}$$

$$w(\xi) = 0 \quad (\Delta x \le \xi). \tag{56}$$

ここで，ξ は粒子表面からの距離，Δx はグリッド長さを表す．$\sigma_{ij}^{(\infty)}$ は，以下のように書き表される．

$$\sigma_{ij}^{(\infty)} = \mu\left(\partial_i u_{Lj} + \partial_j u_{Li} - \frac{2}{3}(\partial_k u_{Lk})\delta_{ij}\right). \tag{57}$$

$\sigma_{ij}^{(PI)}$ についてのモデル化は，気泡の並進運動方程式 (式 (20)) 中の抗力係数の式 (式 (22)) が静止流体中の単一粒子に対するものであり，その流れ場は軸対称であることから，$p^{(B)}$ のモデル化と同様に軸対称性を仮定し，一様流中の単一粒子の周りの DNS の結果を利用する．

$$\sigma_{ij}^{(PI)} = \mu\left(\partial_i u_j^{(PI)} + \partial_j u_i^{(PI)} - \frac{2}{3}(\partial_k u_k^{(PI)})\delta_{ij}\right). \tag{58}$$

上式中の速度勾配は，気泡周囲の速度場をレイノルズ数の関数としてデータベース化し (式 (5))，それを参照して解析的に求められる速度勾配 (式 (11)〜(14)) を利用する．

6.2.1　気泡流の SGS 応力のモデル化

第 4 節で用いた Present Non-Linear モデル (式 (10)) によって得られる SGS 応力は，文献 (1) より真の SGS 応力との相関が高いことが示されている．従って，Present Non-Linear モデルは，気泡流の SGS 応力モデルとして非常に有効であると考えられる．しかしながら，上述した圧力・渦度の気泡界面での境界条件の影響をモデルと，Present Non-Linear モデルとを同時に扱った場合，計算結果が数値的に不安定であった．従って，安定に計算を行うことを踏まえ，渦粘性モデルタイプの SGS 応力モデルを導入する．ここで，SGS 応力 $\tau_{ij}^{(E)}$ は，Dynamic 渦粘性モデルとスケール相似則モデルとの混合モデルである Dynamic Mixed SGS Model[10] に準じ，定式化を行う．

グリッドフィルタ操作を $\bar{\phi}$，テストフィルタ操作を $\hat{\phi}$ と記述する．また，グリッドフィルタスケール，テストフィルタスケールをそれぞれ $\bar{\Delta}$，$\hat{\Delta}$ と記述する．本研究では，$\hat{\Delta}/\bar{\Delta} = 2$ としている．Dynamic Mixed SGS Model[10] を適用すると，$-\tau_{ij}^{(\infty)*}$ は以下のように書き表される．

$$-\tau_{ij}^{(E)*} = (\overline{\bar{u}_{Li}\bar{u}_{Lj}} - \bar{\bar{u}}_{Li}\bar{\bar{u}}_{Lj})^* - 2C\bar{\Delta}^2|S_L|S_{Lij}^* \tag{59}$$

ここで，

$$|S_L| = (2S_{Lij}S_{Lij})^{1/2}, \tag{60}$$

である．式 (59) の定数 C は，Vreman *et al.* の最小二乗法を用いた手法 [10] にならい，以下の手順で算出する．

$$M_{ij}^* = 4|\widehat{\bar{S}_L}|\widehat{\bar{S}}_{Lij}^* - |\bar{S}_L|\widehat{\bar{S}}_{Lij}^* \tag{61}$$

$$L_{ij}^* = \widehat{\bar{u}_{Li}\bar{u}_{Lj}} - \hat{\bar{u}}_{Li}\hat{\bar{u}}_{Lj} \tag{62}$$

$$H_{ij}^* = \left\{\left(\widehat{\overline{\bar{u}_{Li}\bar{u}_{Lj}}} - \hat{\bar{\bar{u}}}_{Li}\hat{\bar{\bar{u}}}_{Lj}\right) - \left(\widehat{\overline{\bar{u}_{Li}\bar{u}_{Lj}}} - \widehat{\bar{u}_{Li}\bar{\bar{u}}_{Lj}}\right)\right\}^* \tag{63}$$

$$C = -\frac{M_{ij}^*(L_{ij}^* - H_{ij}^*)}{2\bar{\Delta}^2 M_{ij}^* M_{ij}^*} \tag{64}$$

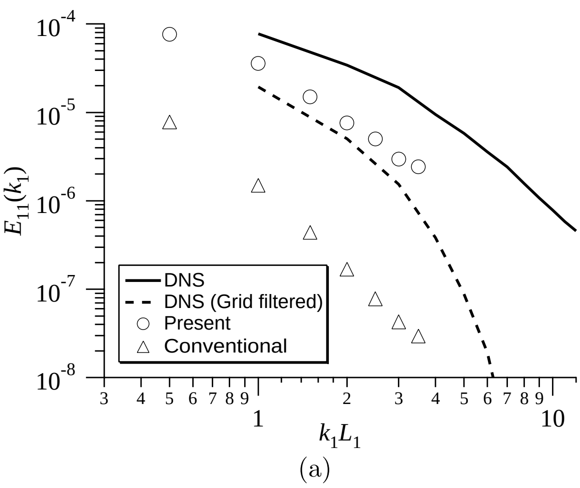
6.3　計算結果

計算手法や計算条件は，第 4 節と同様である．図 9 にはボイド率 (f_G) が 0.833, 3.33 (%) における，1 次元縦エネルギースペクトルが示されている．実線は DNS の生データ，点線は DNS の結果にグリッドフィルタ操作を施した結果 (Grid filtered) である．図 9 中の記号 △，◯ は，それぞれ，気泡界面での境界条件の影響や気泡流の SGS 応力が反映されていない従来の平均化方程式を用いた結果 (Conventional)，本計算モデルを平均化方程式に導入して得られた結果 (Present) である．

Present の結果は，いずれの場合もグリッドフィルタ操作を施した結果 (Grid filtered) よりも過大評価になっている．この理由には，DNS では気泡間の相互作用に伴う速度場になっているのに対し，Present では，気泡の並進運動方程式 (式 (20)) との整合性を考慮して，単一粒子の運動に基づく構成式が使われており，両者の気泡周囲の速度分布が異なっていることが挙げられる．また，圧力と粘性応力の境界条件の影響をモデルに導入する際に，グリッドフィルタ操作が施されていない，単一粒子に対する圧力場・速度場を利用していることも，理由として挙げられる．すなわち，Present ではグリッドフィルタ操作が施された保存方程式 (式 (15)(16)(18)) が用いられているが，Present の境界条件の影響のモデル化には，気泡群が誘起する局在化した疑似乱れが，グリッドフィルタ操作によって滑らかになる効果が導入されておらず，Grid filtered の結果よりも DNS の生データの結果に近づくと考えられる．

Conventional と Present を比較した場合，本モデルの有効性は明らかである．Conventional は DNS に比べて非常に過小評価であり，大きくオーダーが異なっているのに対し，Present では DNS の結果に近く，改善されていることがわかる．

以上より，気泡流の疑似乱れのモデル化には，気泡界面での境界条件の影響を導入することが重要である．



(a)

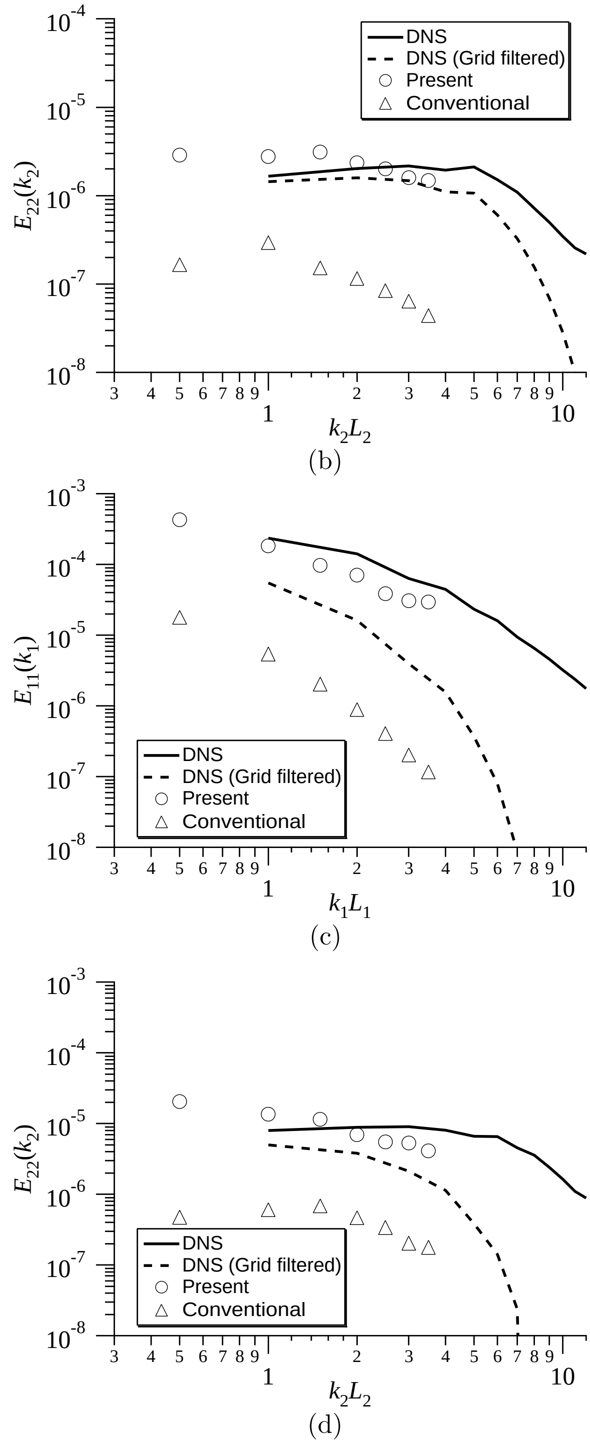


Fig. 9: One-dimensional vertical energy spectrum versus wave number ((a) Vertical component, $f_G = 0.833(\%)$; (b) Horizontal component, $f_G = 0.833(\%)$; (c) Vertical component, $f_G = 3.33(\%)$; (d) Horizontal component, $f_G = 3.33(\%)$)

7. 結言

気泡流の疑似乱れを明らかにし，モデル化することを目的として，数値シミュレーションを用いた解析を行った．

- 多数の気泡群の運動を直接数値シミュレーションした．そして，気泡流の疑似乱れの強さや空間分布を評価するためにエネルギスペクトル分布に対する知見を得た．
- 気泡流解析で広く用いられている平均化方程式を使った数値計算手法に基づき，圧力や粘性応力の境界の影響や，SGS 応力の影響を，気泡運動によって誘起される速度場や圧力場のデータベースを利用してモデル化し，新たな計算手法を構築した．そして，この手法を用いて，多数の気泡群の運動の計算を行い，直接数値シミュレーション結果と比較した．その結果，従来の気泡流の平均化方程式を用いた解析手法では，直接数値シミュレーション結果に比べて，気泡が誘起する乱れを極めて過小評価するのに対し，本計算手法を用いることによって大きく改善されることが示され，本モデルの有効性が示された．

参考文献

1. Sugiyama, K., Takagi, S. Matsumoto, Y., “Direct Numerical Simulation of Rising Bubbles,” *Proc. of ASME FEDSM2000*, (2000), FEDSM00-11141(CDROM).
2. Chandrasekhar, S., *’Hydrodynamic and hydromagnetic stability,’* (Oxford Univ. Press), (1961).
3. Liu, S., Meneveau, C. and Katz, J., “On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurement in a turbulent jet, ” *J. Fluid Mech.*, (1994), **275**, pp. 83-119.
4. Smagorinsky, J., “General circulation experiments with the primitive equations I. The basic experiment,” *Monthly Weather Rev.*, (1963), **91**, pp. 99-152.
5. Bardina, J., Feriger, J.H. and Reynolds, W.C., Report No. TF-19, Stanford Univ. (1983).
6. 村井 祐一，松本 洋一郎, “気泡プルームの微細流動構造の数値解析,” 日本機械学会論文集 (B 編), **63**-611, (1997), pp. 2277-2282.
7. Batchelor, G.K., *’An Introduction to Fluid Dynamics,’*, (Cambridge University Press, Cambridge), (1967)
8. Schiller, L. and Naumann, A.Z., “Über die Grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung,” *Z. Vereines Deutscher Inge.*, (1933), **77**, pp. 318-320.
9. Crowe, C.T., Sharma, M.P. and Stock, D.E., “The particle-source-in cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows, ” *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, (1977), June, pp. 325-332.
10. Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H., “On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model,” *Phys. Fluids*, (1994), **6**, pp. 4057-4059.