

不混和成層流体の気泡による混合プロセス

Mixing Process of Immiscible Stratified Fluids by Bubbles

村井 祐一，福井大・工，〒 910-8507 福井市文京 3-9-1, E-mail: murai@fv.mech.fukui-u.ac.jp

大野 泰，福井大・院，同 上

E-mail: yasushi@imac.mech.fukui-u.ac.jp

山本富士夫，福井大・工，同 上

E-mail: yamamoto@fv.mech.fukui-u.ac.jp

Yuichi MURAI, Dept. Mech. Eng., Fukui Univ., Bunkyo 3-9-1, Fukui 910-8507, JAPAN

Yasushi OHNO, Dept. Mech. Eng., Fukui Univ., Bunkyo 3-9-1, Fukui 910-8507, JAPAN

Fujio YAMAMOTO, Dept. Mech. Eng., Fukui Univ., Bunkyo 3-9-1, Fukui 910-8507, JAPAN

Technologies for collecting leaked oil at sea due to tanker accident and fuel acquisition from methane-hydrate are dependent on multiphase flow dynamics of immiscible air-oil-water three-phase flow. Pumping and mixing process in their system must be clarified in order to optimize the system performance. This report shows a computational prediction method for the three-phase flow using Eulerian-Lagrangian model which is extended by introducing Eulerian-type phase indicator function.

1. 緒 言

重油流出事故時の油の回収のために気泡ブルームを用いた表面流を活用する技術が提案され，実用化のための試験が行われている．気泡のサイズや流量に依存した表面流の流速分布や内部構造については，水 - 空気系の二相流に関する実験から既に定量的なデータが整備されつつある⁽¹⁾．これに対し，実際に界面を油が層状に覆う場合では，水と油の密度と粘性の差異に依存した流動抵抗の発生や，水と油の界面の運動が問題となる．この現象は，水，油，空気の 3 つの相から成る不混和混相流 (immiscible multiphase flow) となっており，大小様々なスケールの界面が存在し，自由自在に変形しながら周囲の流動と強い相互干渉をもたらす．このため流れは顕著な非定常性をもち，幅広い変動周期スペクトルを保有する．さらに，3 つの流体の物性，すなわち密度，粘性係数，圧縮性に大きな差があるため，現象自体が不安定な構造をもつ．このように極めて複雑で不安定な流動に対しては，簡単な理論予測法が確立されないため，数値シミュレーションの役割は大きい．

本研究では，著者らが提案している気泡流に対する Euler-Lagrange モデルを基盤とし，水と油が成層する環境での気泡ブルームを用いた混合プロセスを解析した．この結果，気泡径，ボイド率，水と油の層厚の比によって全体の流動様式ならびに界面の不安定性などの分類が可能であることがわかった．現在，この数値シミュレーション結果と実験計測結果を対比しながら，気泡を用いたオイルフェンスの性能解析を進めているところである．本報では，まだ定性的検討の段階ではあるが，各種パラメータの変化による全体の流動様式の様相性が明らかとなったので，この点について述べる．

2. 数値解析手法

気泡流に対する数値解析モデルには様々なものが提唱されている．このうち気泡ブルームのシミュレーションに実際に利用されたものには，二流体モデル⁽²⁾や多流体モデル⁽³⁾，気泡数密度モデル⁽⁴⁾，多次元化されたドリフトフラックスモデル⁽⁵⁾，均質流モデル⁽⁶⁾，一流体モデルと気泡運動方程式を連立したモデル⁽⁷⁾，GAL-LES モデル⁽⁸⁾⁽⁹⁾，Eulerian-Lagrangian モデル⁽¹⁰⁾，粒子追跡法⁽¹¹⁾がある．中でも最後の二つのモデルは，個々の気泡の直径，位置，速度を扱うため，気泡群分布の予測に対して Euler 型の解法よりも時空間分解能の高いことが確かめられている⁽¹²⁾．このような背景から，本研究では，空間分解能の高い Eulerian-Lagrangian モデル（以下，E-L モデル）を利用する．

仮定と支配方程式

支配方程式は以下の仮定のもと構成される．(1) 気泡のサイズは流れの代表長さに比べて十分に小さい，(2) 気泡は球形である．(3) 気泡の合体・分裂及び気泡同士の相互作用を無視する．(4) 気泡界面を介する物質移動はない．(6) 流れ場全体は等温とし，温度非平衡はない．

● 液相の質量保存方程式

$$\frac{\partial f_L \rho_L}{\partial t} + \nabla f_L \rho_L \mathbf{u}_L = 0. \quad (1)$$

ここで f_L は液相体積率， ρ_L は液相密度， t は時間， $\mathbf{u}_L$ は液相流速ベクトルである．

● 二相流の体積率拘束条件

$$f_L + f_G = 1. \quad (2)$$

ここで f_G は気相体積率で、次式で定義される．

● 気相体積率

$$f_G = \frac{1}{V} \int f_{Glocal} dV. \quad (3)$$

ここで V は格子体積， f_{Glocal} は相関数（気相の場合に 1，液相の場合に 0）で、具体的な算出法は TD 法⁽²³⁾に従う．

● 気泡重心座標追跡式

$$\mathbf{x}_G = \mathbf{x}_{G0} + \int_0^t \mathbf{u}_G(t) dt. \quad (4)$$

ここで $\mathbf{x}_G$ は気泡重心座標の位置ベクトル， $\mathbf{x}_{G0}$ はその初期値， $\mathbf{u}_G$ は気泡の並進速度ベクトルである．

● 二相流全体の運動量保存方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_L \rho_L \mathbf{u}_L}{\partial t} + \nabla \cdot f_L \mathbf{u}_L \mathbf{u}_L + \frac{f_G \rho_G \mathbf{u}_G}{\partial t} + \nabla \cdot f_G \rho_G \mathbf{u}_G \mathbf{u}_G \\ = -\nabla p - (f_L \rho_L + f_G \rho_G) \mathbf{g} + (\mathbf{F}_{LL} + \mathbf{F}_{GG}), \end{aligned} \quad (5)$$

ここで p は液相の圧力， $\mathbf{g}$ は重力加速度ベクトル， $\mathbf{F}_{LL}$ および $\mathbf{F}_{GG}$ は、相内のせん断力で、連続相である液相のみに、

$$\mathbf{F}_{LL} = \nabla \cdot \mu \{ \nabla \mathbf{u}_L + (\nabla \mathbf{u}_L)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}_L) \mathbf{I} \}, \quad (6)$$

が作用するとし、 $\mathbf{F}_{GG} = \mathbf{0}$ とする．ここで粘性係数には、気泡混入に伴う実効粘性⁽¹³⁾: $\mu = (1+f_G) \mu_L$ を用いる．この式は本来、気泡レイノルズ数が 1 以下のみ妥当であるが、高レイノルズ数時の一般式がないため第 1 次近似として採用する．

● 気泡の並進運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho_G V_G \mathbf{u}_G) + \frac{d}{dt} (\beta \rho_L V_G \mathbf{u}_G) - \frac{D_L}{Dt} (\beta \rho_L V_G \mathbf{u}_L) + \rho_G V_G \mathbf{g} \\ + V_G \nabla p - V_G \mu \{ \nabla^2 \mathbf{u}_L + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_L) \} \\ + \frac{1}{2} \rho_L \pi r_G^2 C_D |\mathbf{u}_S| \mathbf{u}_S + \frac{1}{2} \rho_L V_G \mathbf{u}_S \times (\nabla \times \mathbf{u}_L) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

ここで β は付加質量係数で、単一球形気泡時の理論値 $\beta = 1/2$ を与える．また、 D_L/Dt は実質加速度で、 $D_L/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_L \cdot \nabla$ で定義される． V_G は単一気泡体積である．本報では流れ場の高低差や圧力変動による気泡の体積変化が、気泡の並進運動に大きな影響を与えないと見做ることができるので、体積不変の条件： $V_G = V_{G0}$ を用いた．ここで V_{G0} は気泡の初期体積である．

気泡の抗力係数 C_D については、水中の気泡については水-空気系における汚れ系の式⁽¹⁴⁾を用いた： $C_D = \max\{C_{D1}, C_{D2}\}$ ， $C_{D1} = (24/Re)(1+0.15Re^{0.687})$ ， $C_{D2} = (8/3)[E/(E+4)]$ ．ここで Re は気泡レイノルズ数： $Re = 2 r_G \rho_L |\mathbf{u}_S| / \mu_L$ ， E はエトベス数である． r_G は気泡半径， $\mathbf{u}_S$ は気泡の液体に対する相対速度ベクトルである．汚れ系の式を用いる理由は、水-空気系では不純物が気泡界面に集積しやすいためである．油中の気泡については界面に不純物が集積しないためクリーンな液体での

抗力係数： $C_D = (16/Re)(1+0.122Re^{0.55})$ を用いた．なお、式(7)では、気泡に対する揚力の式として Auton の式⁽¹⁵⁾を用い、履歴力は無視している．これは、気泡に対して十分に信頼できる履歴力のモデルがないことによる．

● 気液自由界面の追跡方程式

気液自由界面の変位は界面の高さ関数 h に関する次の運動学的条件を用いて解かれる．

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_{LS} \frac{\partial h}{\partial x} = V_{LS}. \quad (8)$$

ここで、 U_{LS} ， V_{LS} はそれぞれ界面の水平方向と鉛直方向の液相流速成分， x は水平座標である．また、界面では次の応力条件を与える．

$$p_s - p = \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \mu_L \frac{\partial u_L}{\partial y} \quad (9)$$

ここで、 p は界面下部の液体の圧力， $p_s - p$ は界面に作用する付加圧力， σ は界面張力係数， y は鉛直座標である．なお、式(9)は、自由界面の勾配が 10° 以下の場合において妥当な近似式である．また、界面で気泡が破裂するときの液滴の発生やさざ波の伝播は、表面流全体の速度分布を変化させるほどのエネルギーを保有しないため、考慮しない．

● 液液自由界面の追跡方程式

水と油が成層するときの液液自由界面は対流によって高さ関数法では表現できないほどの複雑な界面運動をもつため、次のような相関数 S の輸送方程式を用いて解かれる．

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla S \cdot \mathbf{u}_L = 0. \quad (10)$$

S はスカラーで次元をもたない Euler 型の変数であり、1 のとき水、 S が 0 のとき油であることを意味する．式(1)～(9)までの液相に関する物理量ならびに物性値は、水と油のいずれかのものを利用するが、 S はこの判別に用いられる．

数値計算手順と差分スキーム

以上の方程式は、HSMAC 法⁽¹⁶⁾に基づいて構築された数値解法で解かれる．計算順序は以下の通りである．

- (1) 気泡の並進速度を計算する・・・式(7)
- (2) 気泡の位置を計算する・・・式(4)
- (3) 気相体積率を計算する・・・式(3)
- (4) 液相のせん断応力を計算する・・・式(6)
- (5) 液相の流速分布を計算する・・・式(5)
- (6) 液相体積率を計算する・・・式(1)
- (7) 体積率拘束条件の誤差を計算する・・・式(2)

これが許容値以下なら手順(10)に移る．

- (8) 圧力修正値を計算する・・・文献(18)参照

(9)液相の流速を修正する・・・文献(18)参照
手順(4)に戻る．

(10)気液自由界面圧力を計算する・・・式(9)

(11)気液自由界面位置を計算する・・・式(8)

(12)相関数の分布を計算する・・・式(10)

(13)次の時刻の計算に移り手順(1)から繰り返す．

全ての方程式中で移流項には van Leer Limiter を用いた二次精度 TVD スキーム⁽¹⁷⁾，他の空間微分項には二次精度中心差分法を用いる．式(2)の体積率拘束条件の許容誤差は毎時間ステップで 10^{-6} とする．

初期条件および境界条件

解析対象は容器内の二次元流れとし，幅 500mm の容器に高さ 700mm まで水と油が静かに満たされた状態とする．油は水層の上に静かに層をなしており，油の密度は水よりも小さく粘度は大きいものとする．境界条件として，容器壁面では Non-slip 条件を与える．気泡発生部では一定体積流量の気泡が吹き込まれる．個々の気泡の発生位置は幅 50mm の気泡発生面内でランダムに決定される．気泡発生周波数は 1 秒あたり 50 ～ 100 個で，初期速度として浮力と抗力の釣り合う終端速度を上向きに与える．

Table 1 Simulation conditions

Tank's horizontal length	0.500m
Initial liquid height	0.700m
Initial oil thickness	0.100 ～ 0.500m
Void fraction at bubble injector	0.001 ～ 0.010
Bubble diameter	0.200 ～ 2.00mm
kinematic viscosity of water	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
kinematic viscosity of oil	$10^{-5} \sim 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
Density of water	1000 kg/m^3
Density of oil	900 kg/m^3
Density of air	1.25 kg/m^3

3．結果および考察

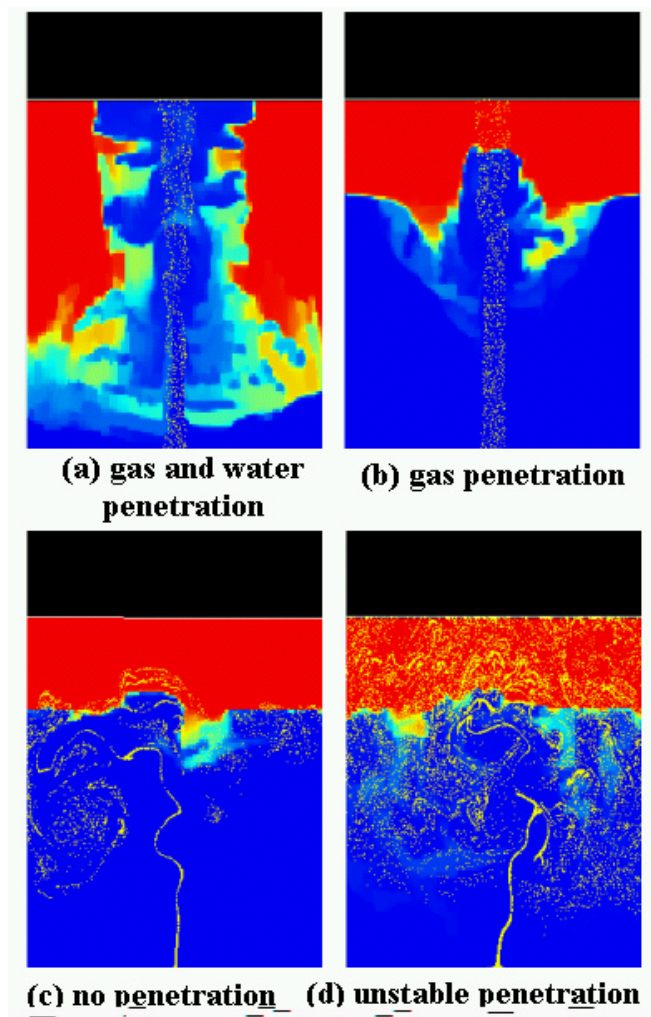
Table 1 にここで取り扱ったシミュレーション条件をまとめた．計算条件は全部で 25 とおりである．本報では，次の 8 つの疑問を設定し，計算結果を説明する．

- (1)気泡ブルームが油層を貫く条件は何によって決まるか．
- (2)気泡のサイズの大小はどのような影響をもたらすか．
- (3)水と油の液液自由界面近傍でどのような流動が生じるか．
- (4)油層の内部でどのような対流が生じるか．
- (5)気泡群が水と油の液液界面を追加するとき何か起こるか．
- (6)油層の厚さによって全体流動はどう変化するか．
- (7)気泡ブルームにより発生する表面流の役割は何か．

(8)乱れはどの領域で強くなるか．

3-1 気泡ブルームが油層を貫く条件は何によって決まるか

計算結果から抜粋し，Fig.1 に 4 つの典型的な流動様式を示す．この図はいずれも気泡発生開始後 120s 後の瞬間流動である．(a)は水と気泡が両方とも油層を破壊して上部気液界面まで到達した場合の例である．(b)は気泡のみ油層を通過し，水は表面に達していない場合である．(c)は気泡でさえ油層を通過することができず，水と油の液液界面近傍で一旦，乱れている．また，一部の気泡は水の下降流に取り込まれている．(d)は(c)と同じ条件で，さらに時間が 60s だけ経過したときの流動である．このとき，水と油の界面近傍で集積した気泡が分散して油の中をゆっくり浮上する．これらより，ボイド率が高いほど気泡ブルームは油層を貫通し，気泡径が小さいほど油層を破壊する効果が弱いことがわかる．

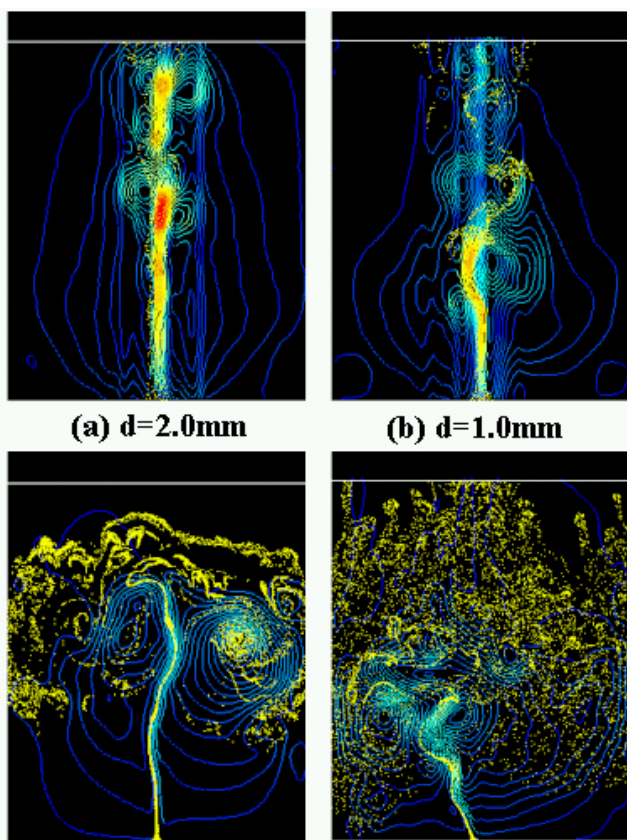


(a): void fraction = 0.010, bubble diameter = 1.0mm, at T=60s
(b): void fraction = 0.005, bubble diameter = 1.0mm, at T=60s
(c): void fraction = 0.005, bubble diameter = 0.2mm, at T=60s
(d): void fraction = 0.005, bubble diameter = 0.2mm, at T=120s

Fig.1 Typical four structures of oil-water interface

3-2 気泡のサイズの大小はどのような影響をもたらすか

Fig.2 にボイド率が 0.01 の場合で気泡径を変化させた場合の $T=120s$ における流動構造を示す．図中で曲線は液相の流線，点々は気泡である．同図でわかるとおり，気泡径が大きいほど流れは直線的であり，気泡ブルームによって誘起される駆動流が保持されている．気泡径が小さくなると，流れは容器下部で水平方向に広がり，上部の油層では強い流れが誘起されなくなる．また気泡径が $d=0.2mm$ の場合(c)では，油層で流れが遮断され水層内だけで循環流をつくり，気泡ブルーム自体が不安定な脈動を呈する．また，さらに時間経過した(d)では，油層と水層の両方で気泡が幅広く分散するようになる．このとき油層内では気泡が小さなキノコ雲上の群となって浮上する．



(a) $d=2.0mm$ (b) $d=1.0mm$ (c) $d=0.2mm$ at $T=60s$ (d) $d=0.2mm$ at $T=120s$

Fig.2 Relationship between streamlines and bubble diameter

3-3 水と油の液液自由界面近傍の流動

Fig.3 に二つの流動様式の例を取り上げ，液相の速度ベクトル分布と渦度分布を示す．(a)は気泡が油層を通過して浮上する場合で，(b)は気泡が通過せず水層内に蓄積する場合である．同図によれば，(a)の場合では，水層内の範囲では安定した上昇流が見受けられるが油層内では渦を伴うものになっている．また渦度分布より，油層内では複雑な渦運動が存在し，同時に，水と油の界面近傍でも渦度が生じていることがわかる．一方(b)の図は気泡径が小さい場合に対応するが，この場合では，(a)とは逆に油層内で流れは殆ど生じ

ておらず沈静しているが，水層内で大きなスケールの循環流が発生している．また，水と油の界面で激しい渦度の生成があり，その近傍で渦度の符号が短い波長で反転し，乱れが大きくなっていることが推定される．以上より，気泡群が油層を通過するかないかによって水と油の液液自由界面近傍の流れは大きく異なることが確認された．

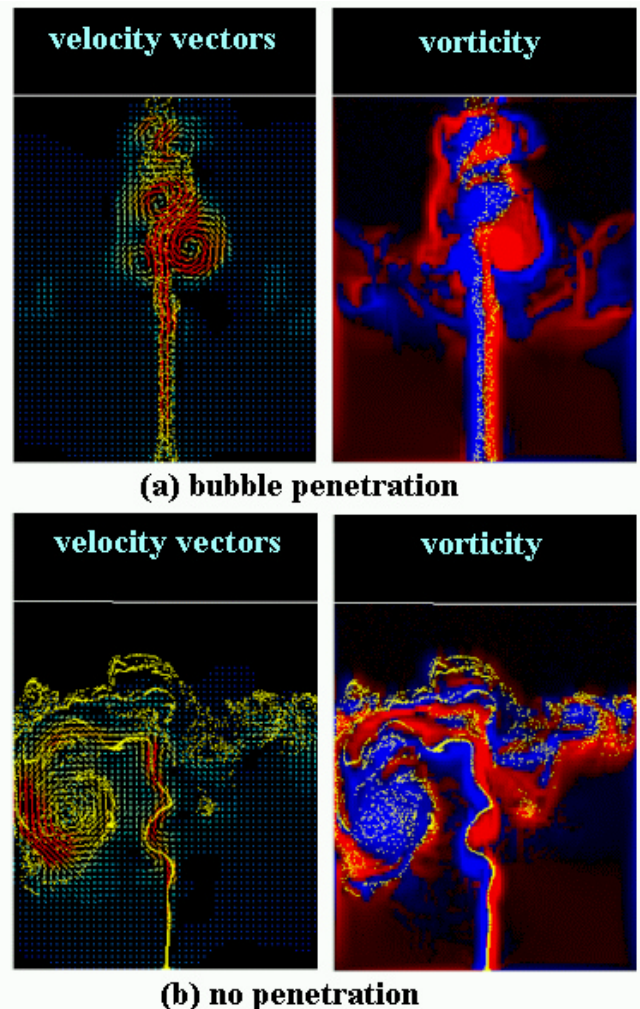


Fig.3 Liquid behavior in the vicinity of oil-water interface

3-4 油層の内部でどのような対流が生じるか

Fig.4 に油層内部の時間平均渦度と乱れ速度(流速変動ベクトルの RMS 値)を示す．時間統計幅は $T=90s \sim 120s$ の 30s 間である．(a)のケースでは，油層内に流れが生じており，上部ほど広がっている．これは気泡ブルームによって水層内の水が油層内まで駆動され，これを突き抜けて気液界面まで到達しているためである．このとき，気液界面は水と空気の間自由界面となり，水流が表面流となる．この水による表面流は周囲の油層のせん断応力をうけて閉じた領域で循環する．また乱れの分布も水平方向に幅をもつ．(a)に対してボイド率を半減した(b)のケースでは，(a)と同様に気泡ブルームによる表面流が発生しているものの，水面での乱れは小さい．これは相対的に油による抵抗の影響が大きく作用したためで

ある．気泡径を小さくした(c)の場合では，気泡ブルームが油層を貫通せず，一旦，水と油の液液自由界面近傍で気泡が分散したあと，油層内を浮上する．従って油層内の渦度は気泡群の分布に応じ，短い波長で符号の反転する分布となっている．(d)はさらに気泡径を小さくした場合で，油層内には渦度も変動速度も他に比べ非常に小さくなっている．

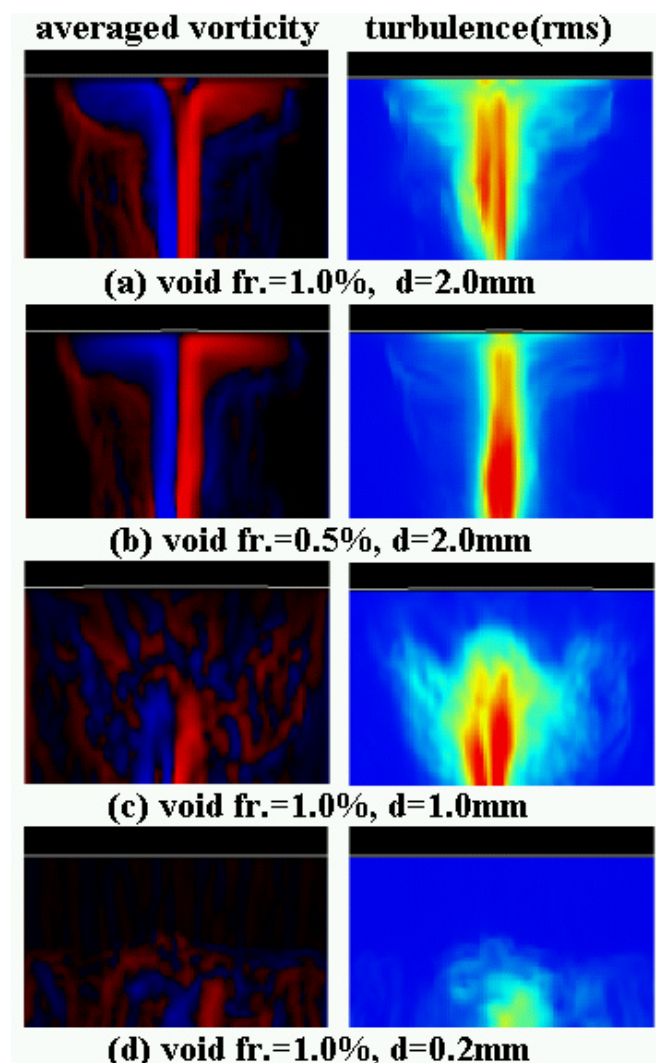


Fig.4 Time-averaged vorticity and fluctuation velocity

3-5 水と油の液液界面の気泡の通過現象について

既に Fig.1 に示したが，水中を浮上する気泡群は，油中で減速して浮上する．油中での上昇速度は油の粘性係数により支配される．油の粘性係数が低く気泡径が大きい場合では水中を直線的に浮上してきた気泡群は油中でもそのまま直進する．このとき浮上速度の低下により局所ボイド率が増加する．油の粘性係数が高い場合や気泡径が小さい場合では，油層中の浮上速度が小さいため水と油の界面近傍で一旦，高いボイド率の層を構成する．油中での浮上速度が遅いため，気泡群は界面近傍でできている水平方向の流れにより横方向に輸送される．この輸送の途中で，気泡群は徐々に油層内に進入し浮上し始める．従って油層内には気泡が一様に分散した状態

で浮上する．また，水と油の界面に高いボイド率の層が形成されたときに，その層内で強い浮力が作用する．この浮力は液液界面を押し上げようとする一方で，水平方向の対流により外乱を受け，不安定な構造となる．これは Fig.2(c)(d)の結果に対応する．

3-6 油層の厚さによって全体流動はどう変化するか

Fig.5 は水と油の層の比率を変化させたときの計算結果である．全体の高さ，すなわち気液自由界面の高さは 0.7m とし，図中の記号 O と W はそれぞれ油層の厚さ，水層の厚さを示す．ここではボイド率が 1%，気泡径を 2mm に固定してある．同図(a)～(d)の比較によれば，気泡ブルームによるポンピング効果で，水が油層の一部に侵入しているが，その進入の規模に違いが見られる．すなわち，水層の厚さが大きいほうが，水の侵入領域の幅が広い．これは水層の厚さが大きいと，気泡ブルームによる水の加速領域が長く，駆動効果が大きいためであろう．

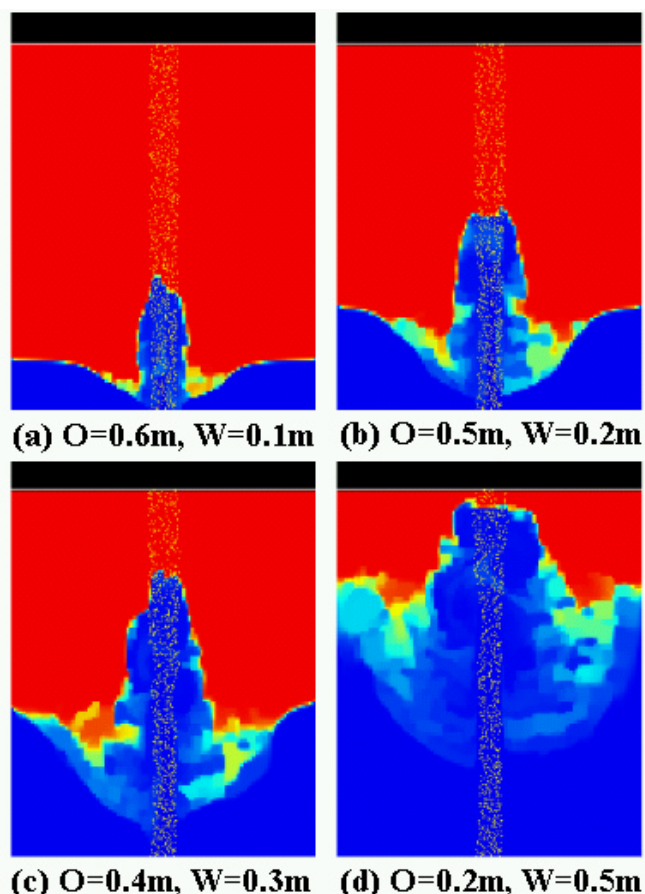


Fig.5 Phase-interface profiles versus thickness of oil layer

3-7 気泡ブルームによって発生する表面流の役割

Fig.1 ～ Fig.5 を総合して考察すれば，気泡ブルームによって誘起される表面流は，二つの役割に分離される．一つは，水層が油層を貫通して表面に達する場合において，油層を左右に分断する効果である．もう一つは水層が油層を貫通しな

い場合において、液体界面近傍の水平流を形成し、界面に変動（動揺）を与える効果である。

3-8 乱れはどの領域で強くなるか

Fig.4 より、液体の変動速度成分は気泡ブルームと油層の干渉する領域において大きくなることがわかる。気泡ブルームによって駆動された上昇水流が油層を貫く場合では油層とその水流の境界で大きい。水流が油層を貫かない場合では、油層の下端で大きい。

4. 結 言

互いに混和しない水と油が容器内で層状に分布するときの気泡による混合プロセスを解析した。用いた方程式は気泡流の Euler-Lagrange モデルで、これを気液自由界面と液液自由界面をもつ系に拡張した。前者は高さ関数法、後者は相関数の輸送方程式により追跡し、複雑な界面挙動をシミュレートすることに成功した。本報では、気泡サイズ、ボイド率、油層と水相の比率などをパラメータとして解析を実行し、混合流動構造の多様性について定性的な考察を行った。この結果、以下の点が確認された。

- (1) 気泡サイズとボイド率が大きいほど気泡ブルームによって誘起された水の上昇噴流が油層を貫通しやすい。
- (2) 気泡サイズが大きくボイド率が小さい場合では、油層の水が貫通しないが、油層内で気泡群の直線的浮上が保持される。
- (3) 気泡サイズが小さいと気泡群が油層内に侵入しにくくなる。これにより時間が経過することで、水と油の液液界面近傍で高いボイド率の層が形成される。さらに時間が経過すると、水平方向の対流の影響を受けて液液界面が不安定となる。最終的には油層内を気泡群が一様に分散して浮上する。

この他の詳細については現在、可視化実験によって検討しているところである。今後は、この数値解法の妥当性を実験計測結果との比較から検証し、さらに、気泡ブルーム式オイルフェンスならびに油回収技術の基礎データを整備する予定である。

参考文献

- (1) Hassan, A.M. et al., Measurement of Bubble Plume Generated

Surface Flow Using PIV, Journal of the Visualization Society of Japan (in press)

- (2) 村井祐一・ほか 5 名, 気泡流中の乱れの逆エネルギーカスケード構造, 機論 B, 65-632 (1999) 161-168.
- (3) 富山明男・ほか 4 名, 多次元二流体モデルに基づく自然循環気泡流の数値解析, 機論 B, 60-580 (1994) 3987-3993.
- (4) Shimada, N., Tomiyama, A., 3D Multi-field Simulation of Bubbly Flow, Prof. Asian Symp. Multiphase Flow (ASMF'99), Edit. Ohba, K. (1999) 51-56.
- (5) 松本洋一郎・村井祐一, 自由表面を有する容器内の気泡ブルームの数値解析, 機論 B, 61-588 (1995) 2818-2825.
- (6) 藤本 登・橘 博志・Rao, Y.・中川 清・福田研二, 混相流動解析のためのドリフトモデルの開発, 機論 B, 65-639 (1999) 3608-3614.
- (7) 波江貞弘・原 正一・伊飼通明, 一様水平流中における二次元気泡浮力噴流の挙動の解析, 機論 B, 51-463 (1985) 847-855.
- (8) 森永栄二・鮎川恭三・越智順治・河原源太, 気泡群周りの流れの数値シミュレーション, 機論 B, 63-609 (1997) 1489-1495.
- (9) 二瓶泰雄・灘岡和夫, GAL-LES モデルに基づく分散性二相乱流に関する数値解析 (平面気泡ブルームを対象にして), 機論 B, 64-619 (1998) 684-692.
- (10) Nadaoka, K., Nihei, Y., Yagi, H., Grid-averaged Lagrangian LES Model for Multiphase Turbulent Flow, Int. J. Multiphase Flow, 25 (1999) 1619-1643.
- (11) 富山明男・檜垣 仁・Zun I・宋 明良・坂口忠司, 粒子追跡法に基づく分散性混相流の数値解析 (第 1 報), 機論 B, 62-599 (1996) 2558-2564.
- (12) 村井祐一・松本洋一郎・宋向群・山本富士夫, 気泡の浮力によって形成される乱れの構造の数値解析, 機論 B, 64-626 (1998) 3257-3262.
- (13) Batchelor, G.K., An Introduction to Fluid Dynamics, C.U. Press. (1967), 254-255.
- (14) 富山明男・ほか 3 名, 気泡の抗力係数に関する研究 (第 1 報 静止液中単一気泡の抗力係数), 機論 B, 61-587 (1995) 2357-2364.
- (15) Auton, R., Hunt, J.C.R., Prudhomme, M., The Force Exerted on a Body in Inviscid Unsteady Non-uniform Rotational Flow, J. Fluid Mech., 197 (1988) 241-257.
- (16) Hirt, C.W., Cook, J.L., Calculating Three-Dimensional Flows around Structures and over Rough Terrain, J. Computational Physics, 10 (1972) 324-340.
- (17) Okano, T., Sugawara, S., High Resolution Two Phase Flow Analysis using Second-Order TVD Schemes, Proc. Int. Conf. Multiphase Flow'91-Tsukuba, (1991) 303-308.
- (18) Murai, Y. et al., Inverse Energy Cascade Structure of Turbulence in a Bubbly Flow (Numerical Analysis using Eulerian-Lagrangian Model Equations), JSME International Journal, Series B, Vol.43, No.2 (2000) 197-205