

ナローバンド 標位関数法による気液界面の計算

Gas-Liquid Interface Computation Using Narrow Band Level Set Method

○ 梁 儒全, 京工繊大, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail: liang@fe.mech.kit.ac.jp

里深 信行, 京工繊大, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail: satofuka@ipc.kit.ac.jp

Ruquan LIANG, Dept. of Mech. & System Eng., KIT, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585, JAPAN

Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. & System Eng., KIT, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto 606-8585, JAPAN

A numerical simulation of gas-liquid two-phase flow using narrow band level set method is presented to investigate the complex structures of gas-liquid interfaces. The Navier-Stokes equations in primitive variable formulations are solved on a staggered grid by the method of lines. A computation for the motions of bubbles in a shearing flow shows that the narrow band level set method reduces the computational cost greatly. A successful computation for the motion of a droplet falling from a wedge is also presented to illustrate the applicability of the present method.

1. はじめに

混相流の代表的な流動状態の一つである気液二相流は、工学的に極めて重要な問題であり、数値解析により現象を短期間で予測することが求められている。気液二相流を解析するにあたって、最も知りたい情報の一つが二流体の境界面がどのように変化するかということである。従来、移動境界面の取り扱いには大きく分けて境界面追跡法と境界面捕獲法の二通りがある。境界面追跡法では、境界面の大変形などの場合、境界面の位相幾何学的性質の変化が大きく、解析が困難である。境界面捕獲法は境界面を間接的に表現し、この境界面を表現する関数を移流させることにより境界面の移流および捕獲を行うものである。ただし、この方法にも問題がないわけではなく、境界面が拡散的であるといったことに注意をする必要がある。近年、捕獲法の一つとして標位関数法が有望視されている。この方法は計算領域全域に境界面からの垂直距離関数を分布させることで、境界面を含む全標位関数を同じく全領域において移流させるというものである。この方法は境界面の拡散を抑制することに特色があり、標位関数の再初期化を行うことで、境界面の拡散の問題が改善されている。

しかしながら、標位関数法では計算領域全域に、標位関数の分布、移流および再初期化を行うため多大な演算量および計算時間を要する。そのため、計算の高速化を検討する必要がある。計算を高速化するには、スキーム自体の計算法を高速化するのとハード的に高速化する方法があるが、標位関数法に於ては

- (1) 並列計算による高速化
- (2) 解適合格子法による高速化
- (3) 標位関数のナローバンド化による高速化

が考えられる。本研究では、スキーム自体のナローバンド標位関数法に注目し、ソフト的に大幅な高速化を試みる。ナローバンド標位関数法を採用することにより気液二相流における移動境界面の挙動を的確に評価するための数値解析手法を開発し、気泡および液滴問題の解析を行った。

2. 基礎方程式

非圧縮性気液二相流の基礎方程式は非圧縮性ナビエ・ストークス方程式と連続の式である。表面張力を考慮した非圧縮性流れに対し無次元化されたナビエ・ストークス方程式及び連続の式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t = & -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{n}_k}{Fr^2} \\ & + \frac{1}{\rho}(-\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (2\mu D) + \frac{1}{We} \kappa \delta(d) \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで $\mathbf{u}$ 、 ρ 、 μ はそれぞれ流体の速度、密度、粘性率で、 p は流体の圧力、 D は粘性応力テンソル、 κ は境界面の曲率、 δ は Dirac のデルタ関数、 d は境界面からの垂直距離、 $\mathbf{n}$ は移動境界面の単位法線ベクトル、 $\mathbf{n}_k$ は重力方向の単位ベクトルである。また、レイノルズ数 Re 、フルード数 Fr 、ウェーバー数 We をそれぞれ以下のように定義する。

$$Re = \frac{\rho_l L U}{\mu_l}, Fr = \sqrt{\frac{U^2}{gL}}, We = \frac{\rho_l L U^2}{\sigma} \quad (3)$$

なお、二流体は混合しないと仮定すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mu = 0 \quad (5)$$

となる。

3. 数値計算法

3.1 標位関数法

標位関数とは、異なる二流体の境界面を追跡することを目的とするものである。この標位関数を ϕ で表し、計算領域 R^n 内に $\Omega(t)$ の領域をもつ移動境界面 $\Gamma(t)$ は境界面の法線方向速度 F で展進するものとする、標位関数 ϕ は

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) < 0 & \text{in } \Omega(t) \\ \phi(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{on } \Gamma(t) \\ \phi(\mathbf{x}, t) > 0 & \text{in } R^n / \bar{\Omega}(t) \end{cases} \quad (6)$$

のような値をとる境界面からの垂直距離関数である。ここでは、 $\mathbf{x} \in R^n$ 。逆に、標位関数から移動境界面を探し出すことができる。つまり、

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in R^n : \phi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (7)$$

この標位関数を計算領域全体に分布させ、次の移流方程式

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (8)$$

あるいは

$$\phi_t + \mathbf{F}|\nabla\phi| = 0 \quad (9)$$

を全領域で解くことにより、境界面を含む全標位関数を移流させる。また、標位関数を用いることで移動境界面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ 、曲率 κ 、移動境界面の長さ $|\Gamma(t)|$ はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (10)$$

$$\kappa = -\nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (11)$$

$$|\Gamma(t)| = \int \delta(\phi) \cdot |\nabla\phi| d\mathbf{x} \quad (12)$$

ここで注意すべきことは、この方法は標位関数が境界面からの垂直距離関数であることにより成り立っているということである。しかしながら、標位関数は式 (8) あるいは (9) に従って移流するに当たり数値散逸により、境界面からの垂直距離関数としての性質が失われ、質量保存の悪化、さらに境界面の消失が起きる恐れがある。標位関数はもう一度境界面からの垂直距離関数としての性質をもつようにその値を修正する再初期化を行う必要がある。再初期化は以下の式 (13) を用いるものとする。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = S(\phi_0)(1 - |\nabla\phi|) \quad (13)$$

$$S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + (\Delta x)^2}} \quad (14)$$

ここで Δx は格子幅で、 ϕ_0 は移流された直後再初期化する前の標位関数である。上式を解くことにより、境界面以外の点では $|\nabla\phi| = 1$ 、境界面上においては標位関数が変化しない。これによって、境界面からの垂直距離関数を作り出すことができる。

また、気液境界面において ρ 、 μ は急に変化するので式 (4)、(5) を解く際、数値的発散が生じる。数値発散を抑えて安定な計算を可能にするため、ある程度の厚さを境界面として定義する。これによって、境界面において密度及び粘性率関数が連続的に変化するように以下の如く書き換えられる。

$$H_\alpha(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\alpha \\ (\phi + \alpha)/(2\alpha) + \sin(\pi\phi/\alpha)/2\pi & |\phi| \leq \alpha \\ 1 & \phi > \alpha \end{cases} \quad (15)$$

$$\rho(\phi) = \rho_{in} + (\rho_{out} - \rho_{in})H_\alpha(\phi) \quad (16)$$

$$\mu(\phi) = \mu_{in} + (\mu_{out} - \mu_{in})H_\alpha(\phi) \quad (17)$$

ここで、 2α は気液境界面の厚さである。本計算においては、 α の最適値を総合的に検討した上で $\alpha = 3\Delta x/4$ とする。

3.2 ナローバンド 標位関数法

標位関数法では境界面を含む全標位関数を全計算領域において移流させるが、境界面から離れた、必要のない領域まで標位関数の移流と再初期化を行うといった非効率な側面が指摘される。本来は、境界面の移動に伴い境界面近傍のみで標位関数の移流と再初期化をすればよいわけである。このような認識に立ち、Adalsteinssonらによって局所化標位関数法が提案された [1]。ここではナローバンド 標位関数法について説明する。まず、図 1 のように計算領域 R^n 内に移動境界面 $\Gamma(t)$ を中心にナローバンド M を作る。

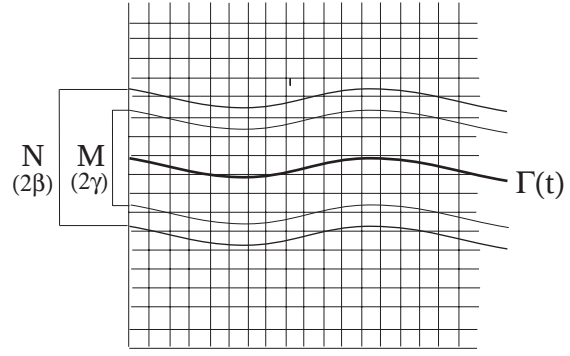


Fig. 1: Two narrow bands around moving front $\Gamma(t)$.

$$M = \{\mathbf{x} \in R^n : |\phi(\mathbf{x}, t)| < \gamma\} \quad (18)$$

ここでは 2γ はナローバンド M の幅である。標位関数の移流はこのナローバンド内のみで行う。次に境界面の移動状況を監視する、さらに再初期化を行うといった作業を行うために、もう一つのナローバンド N を作る。

$$N = \{\mathbf{x} \in R^n : |\phi(\mathbf{x}, t)| < \beta\} \quad (19)$$

ここで、 2β はナローバンド N の幅である。また、

$$0 < \gamma < \beta \quad (20)$$

と設定する。移動境界面がナローバンド M において移流された後、ナローバンド N において再初期化を行う。その後、計算は一時中断し、新しいナローバンド M と N を作って、計算は再開する。ナローバンドの幅については、不必要に広いナローバンドを使用すれば効率低下する。本研究では、

$$3\Delta x < \gamma < 5\Delta \quad (21)$$

$$\beta - \gamma = \Delta x \quad (22)$$

と設定した。また、ナローバンド M と N には一次元配列を形成し格子点情報を格納することにする。ナローバンド 標位関数法の手順は次の通りである。

- (1) 移動境界面からの垂直距離関数となる標位関数を与える。
- (2) 移動境界面を中心にナローバンド M と N を作る。
- (3) ナローバンド M において標位関数の移流を行う。
- (4) ナローバンド N において標位関数の再初期化を行う。
- (5) 計算は一時中断し、移動境界面を中心に新しいナローバンド M と N を作る。
- (6) (3) に戻し、時間段階を進めるものとする。

なお、流れ場の解法には線の方法を採用し、表面張力の効果を CSF 法で組み込んだ。空間の離散化には移流項に QUICK 法、その他の項に対して二次精度中心差分法を適用し、時間積分は二次精度のアダムス・バッシュフォース法を用いる。

4. 計算結果

まず、ナローバンド 標位関数法による計算結果と従来の標位関数法による計算結果を比較し、ナローバンド 標位関数法の有効性を確認する。ここでは、気泡群のせん断流中での合体の問題を取り上げる。図 2 に示すように気泡群が

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x - 3y + 1, -y - \frac{1}{2}) \quad (23)$$

Tab. 1: Comparison of CPU Time (Sec/Time Step) for Original and Narrow Band Level Set Methods

Mesh Size	Original	Narrow	Narrow/Original
51×51	0.0334	0.0206	0.6168
151×151	0.5746	0.2726	0.4744
251×251	3.1363	1.2584	0.4012
351×351	12.572	4.3476	0.3458
451×451	33.050	10.227	0.3094

の流れの中を移動する。計算領域は以下ようになる。

$$D = [-7.5, 7.5]^2$$

計算には ONYX R8000 を使用した。表 1 に複数の計算格子の場合に計算に要した時間を示す。表 1 より CPU 時間比は計算格子点数が 51×51 の場合に約 0.62、 451×451 の場合に約 0.31 とそれぞれなり、ナローバンド標位関数法は計算時間を大幅に短縮できる数値計算法であることが確認された。図 2、3 に気泡群の形状変化を示す。それにより、ナローバンド標位関数法と従来の標位関数法により得られた気泡群の形状変化はほぼ一致していることが分かる。次に、液滴が楔状物体から落下する問題を取り上げる。ここでは、複数の標位関数法を用いる。液滴の境界面を追跡するために、この境界面に対して標位関数 ϕ を与えると同時に、楔状物体に対しても標位関数 ψ を設定する。つまり、二つの標位関数を用いる。ここで、 We 数は

$$We(\psi) = \begin{cases} We_{wall} & \text{if } \psi(\mathbf{x}, t) \leq 0 \\ We_{gas} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

と書ける。図 4 に液滴形状の変化を示す。計算では、

$$We_{wall} = 1000.0, We_{gas} = 10.0, Re = 100.0 \\ \rho_l / \rho_g = 1000.0, \mu_l / \mu_g = 100.0, Fr = 1.0$$

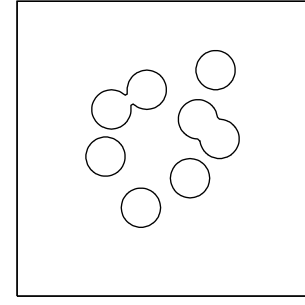
と設定した。計算は $t = 4.0$ まで行われた。液滴が重力により落下しながら変形しているが、 $t = 2.0$ の時に液滴が完全に楔状物体から離れている。その後、下の壁と衝突し、両サイドの壁に沿って上に上がっていく様子が図 4 よりわかる。

5. まとめ

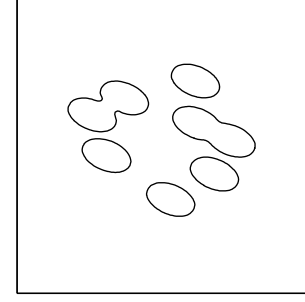
本研究では、効率の良いナローバンド標位関数法を用いた気液二相流の数値計算法を開発した。せん断流中での気泡群の合体の問題に適用し、計算時間は複数の計算格子の場合に約 0.62 から約 0.31 まで短縮されており、本数値計算法が計算の高効率化には非常に有効であることが示された。さらに、複数の標位関数法と併用し、楔状物体から落下する液滴の問題にも適用し、その有効性が確認された。

参考文献

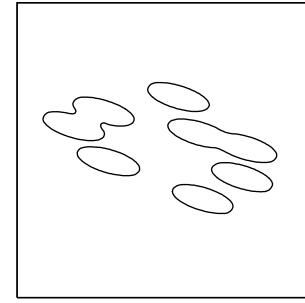
1. D. Adalsteinsson and J. A. Sethian, J. Comput. Phys., **118**(1995), pp. 269.
2. O. Osher and J. A. Sethian, J. Comput. Phys., **79**(1988), pp. 12.
3. B. Merriman, J. Bence, and O. Osher, J. Comput. Phys., **12**(1994), pp. 334.
4. M. Sussman, P. Smereka, and O. Osher, J. Comput. Phys., **114**(1994), pp. 146.
5. 梁儒全, 里深信行, 機論 B, **64-617**(1998), pp. 42.



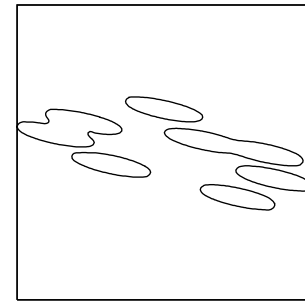
$t=0.0$



$t=0.3$

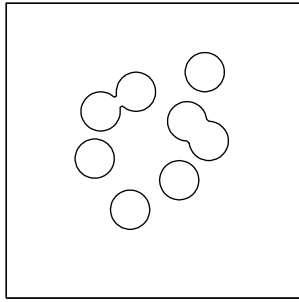


$t=0.6$

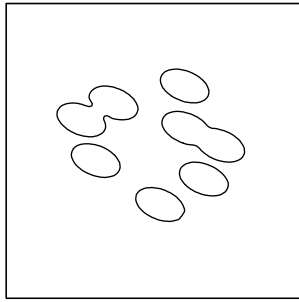


$t=0.9$

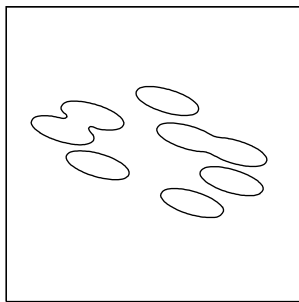
Fig. 2: A collection of bubbles moving with linear shearing velocity computed by using original level set method.



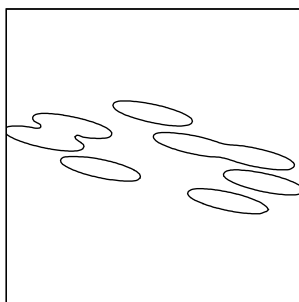
$t=0.0$



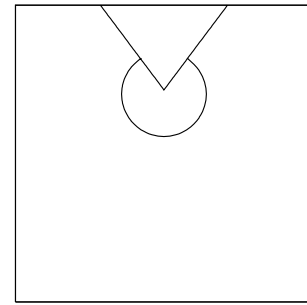
$t=0.3$



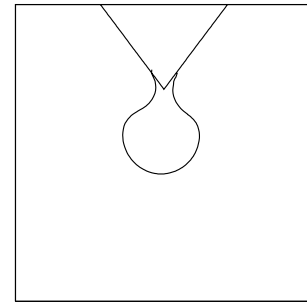
$t=0.6$



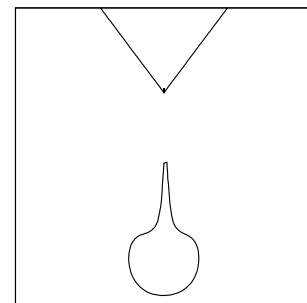
$t=0.9$



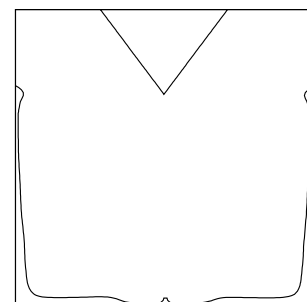
$t=0.0$



$t=1.0$



$t=2.0$



$t=4.0$

Fig. 3: A collection of bubbles moving with linear shearing velocity computed by using narrow band level set method.

Fig. 4: A droplet falling from a wedge.