

非定常渦放出を伴って運動する球形粒子にかかる流体力

Fluid Forces Acting on a Sphere Particle Moving with Vortex Shedding

○ 梶島 岳夫, 大阪大工, 吹田市山田丘 2-1, E-mail : kajisima@mech.eng.osaka-u.ac.jp
Takeo KAJISHIMA, Dept. Mech. Eng., Osaka Univ., Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871

Fluid forces on fixed/free sphere particles are directly calculated. Particular attention was focused on the Reynolds number 500. Unsteady and non-axisymmetric vortex shedding takes place in this case. The lateral (lift) force decreased significantly due to the particle motion. This result suggests the prediction of particle motion using fluid force data measured with a fixed sphere in a uniform stream is misleading for the case of vortex shedding.

1. 緒言

球は非常に単純な形状でありながら、そのまわりの流れ、特に剥離流れは、一様流中に固定された球の場合でもたいへん多様な変化を示す。そのため、古くから実験、理論、数値計算によって多くの研究が行われてきた。 $Re_p = UD_p/\nu_f$ (U は相対速度, D_p は球の直径, ν_f は流体の動粘度) で粒子レイノルズ数を表現すると、従来の研究は、定常剥離流れから非定常渦放出に至る $Re_p = 100 \sim 500$ もしくは境界層が乱流遷移して抗力係数が急減する $Re_p = 3.5 \times 10^5$ 近傍の領域に焦点をあてているものが多い。

球形粒子からの非定常渦放出に関しては数多くの測定がある^{1, 2, 3, 4}。次第にレイノルズ数を高くすると、定常で軸対称な剥離(渦輪)、定常で非軸対称(対面称)な剥離から、非定常で同じ向きの対面称渦放出に移り、続いて放出される渦の方向が旋回し、やがてランダムな渦放出に至る。モードが変化するレイノルズ数は測定によって若干異なる。その原因としては、球の支持方法、一様流の乱れ、実験空間の大きさ、横断方向や下流の条件などが考えられる。最近では数値計算でも上述の後流構造変化が確認されている^{5, 6, 7, 8}。数値計算では、流入速度を容易に制御でき、実験における棒やワイヤーのような支持具の影響は排除できる。その反面、球まわりの計算領域は概して実験空間よりも狭いため、境界条件の影響を強く受けとと考えられる。さらに、数値的な誤差、特に数値粘性の影響も考慮する必要がある。

後流形態が変化するレイノルズ数は、低レイノルズ数の軸対称流れから、例えば $210 < Re_p < 270$ では定常で対面称、 $300 < Re_p < 420$ で非定常で対面称な渦放出となり、それ以上では対面称性が崩れるとされているが、上述のとおり測定や計算によってばらつきがある。

さて、固体粒子の運動をラグランジュ的に追跡する気・固液二相流の解析では、粒子はふつう質点として扱われ、抗力、揚力、履歴力、非定常項、その他の体積力が与えられる^{9, 10}。その多くは様々な仮定を含む物理モデルである。そのように質点近似された粒子の運動方程式では、解析解を基礎として、一様流に固定された粒子による上記のような実験から得た定数群が用いられる。しかし、現実に流れの中を運動する粒子にもそのまま当てはまるのか疑わしい。例えば、Magarvey と MacLatchy¹¹ は、(液滴ではあるが) 可視化実験により、球にかかる流体力は渦放出の形態によって変化し、固定球か移動球かによって大きく異なることを示唆している(ただし、力は測定されていない)。

実験では、固定された粒子により流体力を測定するか、または運動する粒子の軌跡を測定するのがふつうで、流

体中を運動する粒子の軌跡と流体力を同時に測定することは困難である。一方、数値計算ではこのような解析の実現が期待できる。そのためには、固体粒子のまわりの流れを直接計算し、表面応力を正確に算出する必要がある。

本研究は、以上のような動機から、一様流に浮遊する球形の固体粒子について、その周りの流れと粒子にかかる流体力を直接計算する方法^{12, 13, 14}を適用し、粒子後流が粒子運動に及ぼす影響を解析することを目的とする。ここでは $Re_p = 200 \sim 500$ における後流形態の遷移に着目する。特に本稿では、ランダムな渦放出が現れる $Re_p = 500$ について、一様流の中に固定された球と浮遊する球の流体力を比較し、固体粒子を含む二相流解析における粒子運動方程式について考察を行う。

2. 数値計算法の概要

固体粒子を含む液体または気体の流れを考える。流体は非圧縮のニュートン流体、固体粒子は剛体とする。流れの数値計算は、直角座標系での格子を用いて差分法によって行われる。固体粒子は格子幅の数倍以上の大きさとし、その形状に大きな制約はない。

速度 $\mathbf{u} = (1 - \alpha)\mathbf{u}_f + \alpha\mathbf{u}_p$ を定義する。 α は差分格子における固体粒子の体積割合、 \mathbf{u}_f は流体速度、 \mathbf{u}_p は粒子内部の点の速度 $\mathbf{u}_p = \mathbf{v}_p + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_p$ を表す。 \mathbf{v}_p は粒子の速度、 $\boldsymbol{\omega}_p$ は粒子の角速度である。界面すべりも透過もなし($\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_p$) とすれば、 \mathbf{u} に対しても連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

が成立する。運動方程式を

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + \mathbf{H}_u + \mathbf{f}_p \quad (2)$$

(ただし $\mathbf{H}_u = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu_f \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \mathbf{g}$) とおく。ここで $P = p/\rho_f$ (p は静圧、 ρ_f は流体の密度) であり、 $\nu_f (= \mu_f/\rho_f)$ は流体の動粘性係数である。 ρ_f と ν_f はそれぞれ一定値とする。 \mathbf{g} は重力加速度である。

式(2)に対する最も簡単な時間発展差分式は

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t(-\nabla P + \mathbf{H}_u + \mathbf{f}_p) \quad (3)$$

である。 n は時間ステップ、 Δt は時間刻みである。差分格子が流体($\alpha = 0$)、界面($0 < \alpha < 1$)、粒子($\alpha = 1$)のいずれにあるかにかかわらず、流体運動をするものとして予測される速度を $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \Delta t(-\nabla P + \mathbf{H}_u)$ とおく。粒子内部($\alpha = 1$)では、 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_p$ でなければならぬので、 $\mathbf{f}_p = (\mathbf{u}_p - \hat{\mathbf{u}})/\Delta t$ となる。一方、流体領域

($\alpha = 0$) では、式(2)が流体の運動方程式に帰着するためには、 $\mathbf{f}_p = 0$ である。そこで、 α で線形補間して

$$\mathbf{f}_p = \alpha(\mathbf{u}_p - \hat{\mathbf{u}})/\Delta t \quad (4)$$

とおく。以上の導出過程より、 \mathbf{f}_p は式(2)の解を各相の体積割合で加重平均した \mathbf{u} に強制するための力と解釈される。

固体粒子の運動は、運動量および角運動量の式によってラグランジュ的に追跡される。流体と粒子の運動量交換は界面での流体応力の表面積分から評価され、質点モデルは使用されない。粒子の並進と回転の運動方程式において、 τ に関する表面積分は相互作用力 \mathbf{f}_p についての体積積分に置き換えられる。

$$\frac{d(m_p \mathbf{v}_p)}{dt} = - \int_{V_p} \mathbf{f}_p dV + \mathbf{G}_p \quad (5)$$

$$\frac{d(\mathbf{I}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_p)}{dt} = - \int_{V_p} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_p dV + \mathbf{N}_p \quad (6)$$

m_p は粒子の質量、 \mathbf{I}_p は粒子の慣性テンソルを表す。半径 a の球形粒子では $\mathbf{I}_p = (2/5)a^2 m_p \mathbf{I}$ となる。 $\mathbf{G}_p, \mathbf{N}_p$ はそれぞれ外力および外モーメントである。 \mathbf{r} はモーメント中心から表面までの相対位置ベクトルである。

流体と粒子の運動に共通の \mathbf{f}_p を用いるため、式(5)の数値積分に流体計算の格子を使用すれば、少なくとも相間の運動量交換に過不足はない。なお、 \mathbf{f}_p は界面を含む格子においてのみ値をもつ。そこで、積分領域 V_p は界面格子を含むやや大きな領域（別の粒子の界面格子を含まない）とする。

流れの計算には4次精度中心差分法を用いた。

3. 計算結果と考察

3.1 一様流中に固定された球

前報¹²では、数値計算法の提案に続いて、一様流 U の中に固定された球形粒子まわりの三次元流れに適用した結果を示し、信頼性を検証した。差分格子は幅 Δ の立方体であり、粒子径 D_p は格子幅の数倍である。解像度 $D_p/\Delta = 5, 8, 11$ で計算を試みた結果、高レイノルズ数域における非定常渦放出を再現するには $D_p/\Delta \geq 8$ が必要であることがわかった。

その後、流体と粒子の相互作用を効率よく計算する方法に改め¹³、固体粒子を含む平行平板間乱流の直接数値シミュレーションを行った^{14, 15}。実験に対応する条件でのシミュレーションでは、妥当に一致する結果が得られている¹⁵。

ここでは、改良された方法^{13, 14}を固定されない球の運動とそのまわりの流れの解析に適用するため、後述の計算領域と格子解像度での精度を検証する。直径 D_p の球に対して、上流側に $12D_p$ 、下流側に $36D_p$ 、主流に直交する面内に $12D_p \times 12D_p$ の計算領域を設ける。流入境界では一様流れ (U_0)、流出境界では対流流出条件、側面方向には周期境界条件を与える。一様流中にある球のまわりの流れを解析するには、側面境界でトラクションフリー条件を与える方が適当であると考えられるが、FFTによる計算効率を優先して周期条件を採用した。

Fig.1 では、抗力係数について格子解像度（粒子径と格子幅の比）を比較している。 $Re_p \geq 300$ では非定常解となったので、時間平均を求めた。粒子径に4格子しかない場合には $Re_p = 600$ で計算が不安定になつたが、8格子以上あれば解が得られた。算出された抗力係数値は Clift らの本¹⁶にある標準曲線と White の本¹⁷にある実験

式の間にあり、解像度の向上とともに収束傾向を示している。

これ以降は最も解像度の高い $D_p/\Delta = 16$ の結果のみを示す。

Fig.2 は粒子中心より $2D_p$ だけ下流の点で、主流方向速度の変動のスペクトルを示している。 $Re_p = 300$ では $fD_p/U_0 \simeq 0.13$ に卓越したピークが見られ、Sakamoto-Haniu³に示されたストローハル数 (0.14~0.16) に近い。より高レイノルズ数では、この周波数近傍でスペクトルの顕著なピークが見られなくなるが、ストローハル数はレイノルズ数とともにやや増加し、実験結果³と整合している。また、 $Re_p \geq 400$ で Fig.2 に見られる低波数側の変動強度が増加は、放出される渦の方向が旋回または変動することに起因するものと考えられる。

Fig.3 は、一様流中に固定された球の周りの瞬時の流れの一例であり、このレイノルズ数領域での典型的な後流構造の変化を示す。図は $\nabla^2 p$ 分布、すなわち低圧分布で渦構造を表示しようとしている。 $Re_p = 300$ では対称的な渦が同じ方向に規則的に放出される。渦の方向は、当初は数値誤差の非対称性などが引き金となって決まるものと思われるが、いったん放出が始まるとその方向は長く固定される。 $Re_p = 400$ では放出渦の形態や放出点が時間的に変化する。 $Re_p = 500$ ではランダム性を増し、間欠的に大きな渦が巻きあがっているように見える。

以上のことから、一様流に固定された球に作用する流体抵抗、後流変動のストローハル数、後流渦の形態が従来の測定値や観測結果によく一致しており、本計算法の信頼性が確認されたものと考える。

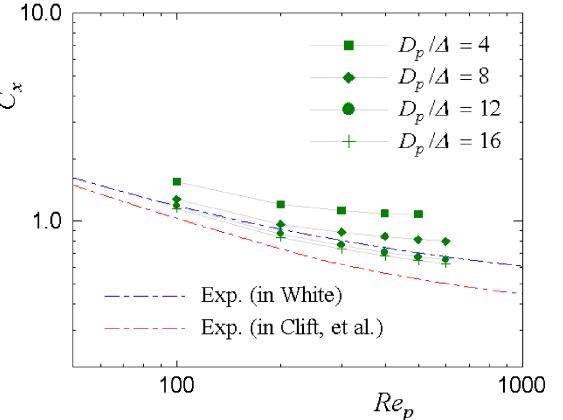


Fig. 1: Drag coefficient (influence of grid resolution)

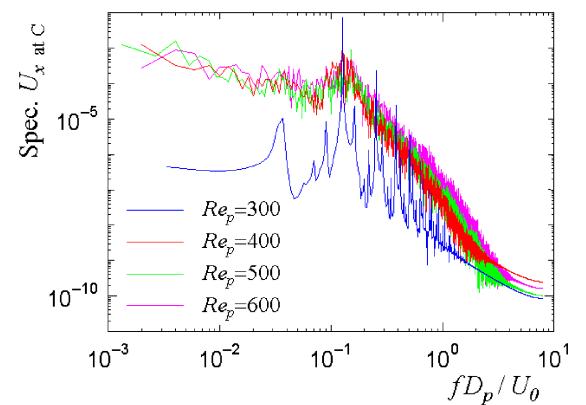


Fig. 2: Spectrum of streamwise velocity in the wake

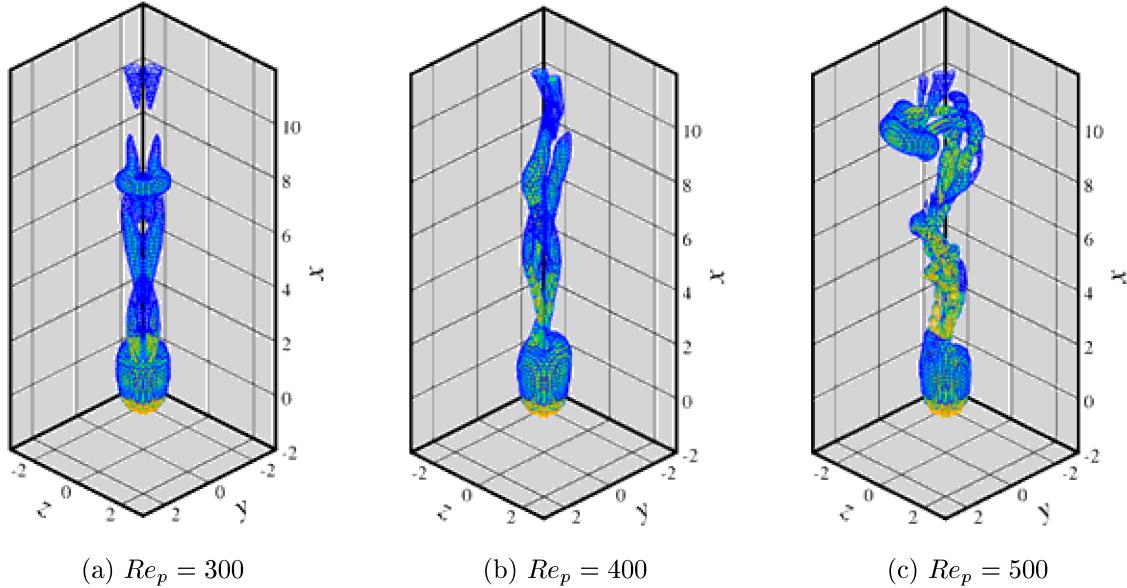


Fig. 3: Reynolds number dependence of unsteady vortex shedding from sphere (instantaneous $\nabla^2 p$ -contours)

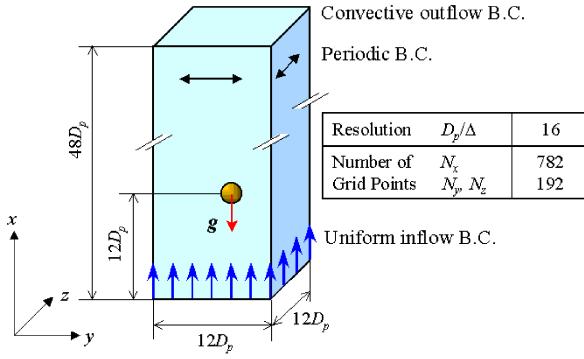


Fig. 4: Summary of numerical setup for flow around a moving particle

3.2 一様流中を浮遊する球

ここでは特に不規則な渦放出をする $Re_p = 500$ に注目し、固定された球とともに、実験でよく扱われる材質を考慮して粒子と流体の密度比 ρ_p/ρ_f が 1.5, 2.5(glass/water), 9.0(copper/water) の 3 種類の浮遊球について計算を行った。

数値計算の設定は Fig.4 のとおりである。浮遊球を扱う場合には、固定球にかかる平均抗力（前節の計算結果）の 1.03 倍の重力を与えてゆっくり落下させる。流入境界から $10D_p$ に達したら、上流側に $2D_p$ の一様流区間を追加する代わりに下流側の $2D_p$ を削除し、Fig.4 のようにリメッシュする。下流側の計算領域を十分に確保しているので、この措置によって粒子運動に対する非物理的な影響は見られなかった。

Tab. 1: Summary of statistics for the fluid forces on moving/fixed spheres

	1.5	2.5	9.0	fixed
$\tau_p U_0/D_p$	41.7	69.4	250	(∞)
Re_p	501.5	503.2	505.5	500
$C_x(\text{av})$	0.663	0.658	0.652	0.647
$C_x(\text{rms})$	0.0135	0.0147	0.0128	0.0125
$C_y(\text{rms})$	0.0122	0.0174	0.0215	0.0404

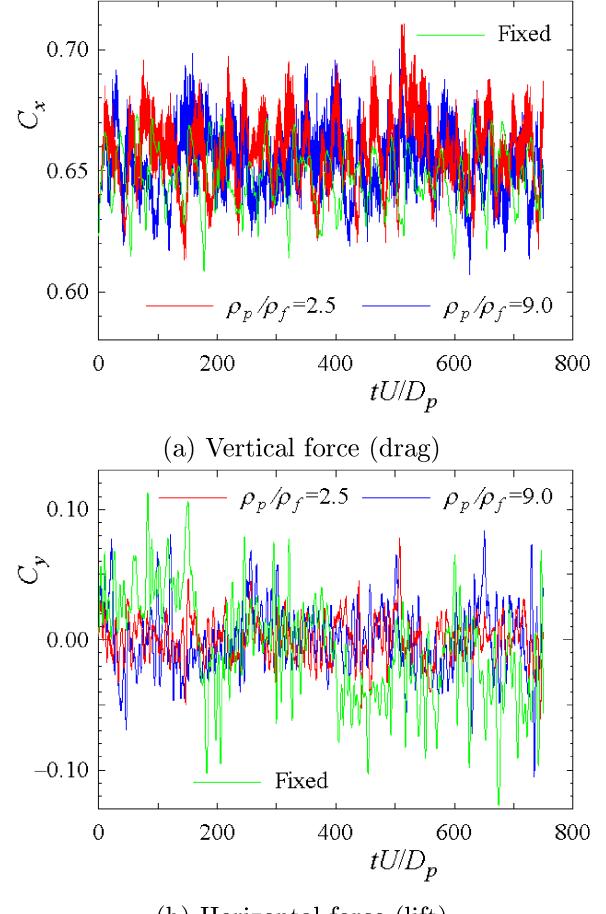


Fig. 5: Time evolution of drag and lift coefficients

なお、固体境界を含まない流れ場にある単一球を扱うため、粒子の回転は無視できるものとして、式(5)の並進のみを考慮した。

結果を Table 1 に要約する (τ_p は粒子緩和時間, C_x は抗力係数, C_y は揚力係数)。粒子は非定常に放出される非軸対称の渦によって変動流体力を受ける。流れに追随性のよい、密度比の小さい粒子ほど（時間平均）抗力係

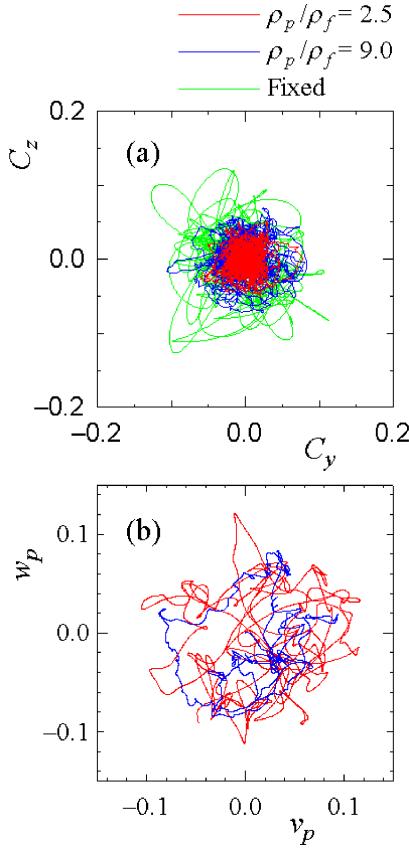


Fig. 6: Force and velocity maps in horizontal plane

数は増加している。固定球では抗力よりも揚力の変動が大きいが、浮遊球では密度比が小さくなると揚力変動は急激に低下して抗力変動と同程度になる。これは、揚力(この場合は水平方向力)によって横に移動すると、後流渦が引き起こす流体力の作用点がずれるためである¹¹。

粒子速度を u_p (または U_{px}) , v_p , w_p で表し、一様流に直交する面内の速度の大きさを $U_{ph} = (v_p^2 + w_p^2)^{1/2}$ とする。主流方向の力 F_x および一様流に直交する方向の力 F_y , F_z を瞬時の主流方向相対速度 $U = |u_p - U_0|$ によって

$$C_\alpha = \frac{F_\alpha}{\rho_f A_p U^2 / 2}, \quad \alpha = x, y, z$$

(ただし $A_p = \pi D_p^2 / 4$) と無次元化する。 F_x , F_y , F_z は、質点運動方程式の言葉では抗力や揚力の他に様々な要素を含む。しかし、これ以降では便宜上、 C_x を抗力係数、 C_y , C_z を揚力係数とよび、揚力の大きさに対応する係数を $C_h = (C_y^2 + C_z^2)^{1/2}$ で表す。

Fig.5 は、抗力係数と揚力係数を時系列で表示している。抗力係数は、密度比の小さい粒子ほど固定球に比べて平均値が高くなり、細かい変動を伴うようになる。揚力係数は、浮遊する球では固定球に比べて振幅が減少するとともに、渦の放出方向の変動に伴う時間スケールの大きな変動がほとんど消失している。密度比の小さい粒子は、小刻みに運動することによって揚力変動を回避しているようである。

Fig.6 は、一様流に直交する面内で、揚力係数と面内運動速度の時間変化をプロットしたものである。Fig.6(a)において、固定球が受ける揚力は面内で複雑に変化しており、顕著な周期性は観察されない。一方、密度比の小

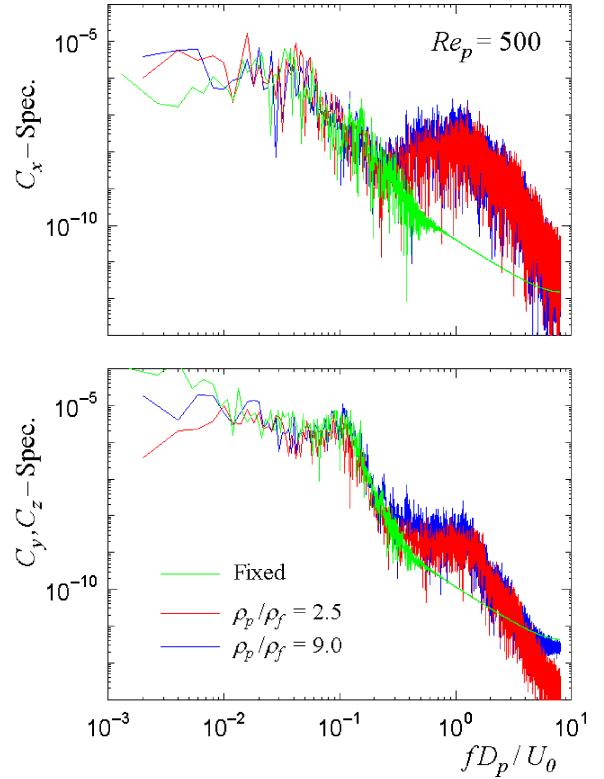


Fig. 7: Spectrum of drag and lift coefficients

さな粒子はほとんど揚力を受けていない。Fig.6(b) では、 $\rho_p/\rho_f = 9$ の (v_p, w_p) は概ね円周上の軌跡をもつ。これに対して、 $\rho_p/\rho_f = 2.5$ は同様の軌跡を描くことが多いが、時おり原点付近を横切って運動の方向を変化させる。以上の結果、密度比の大きい粒子は螺旋運動、小さい粒子はジグザグ運動をしながら落下することがわかる (Fig.10 に後掲の軌跡参照)。

Fig.7 には抗力と揚力の変動のスペクトルを示す。固定球の場合、揚力変動のストローハル数が Fig.2 に示した後流の速度変動のストローハル数に対応している。浮遊球の場合、渦放出のストローハル数の 10 倍のあたりに、固定球の場合には見られない小さなピークが発生している。浮遊球は、小刻みに動くことで高周波の細かい揚力変動を受けるが、放出渦による大きな揚力変動を回避している。これは、粒子緩和時間のスケールとは関係なく、密度比 1.5, 2.5, 9 で同様の周波数で観察される。

Fig.8 は抗力と揚力の確率密度、Fig.9 は落下速度と横方向速度の確率密度関数を表している。 C_x に関しては、浮遊球で密度比が小さくなるにつれて抵抗の大きい方にシフトしているが、分布形はあまり変わらない。一方、揚力に関しては固定球と浮遊球で大きな違いが見られる。固定球では C_h が 0 であることは少なく、常にいずれかの方向に平均抗力係数の 10% 近い揚力を受けている。浮遊球では、密度比が小さいほど、揚力は急激に減少する。これに対して、浮遊球の横方向速度の確率密度から、いずれの粒子密度においても常に一様流の 5~10% 程度の速度をもっていることがわかる。その分布には密度比による顕著な違いはないが、密度比の大きい粒子は螺旋運動によるものであり、密度比の小さい粒子はジグザグ運動によるものである。

まとめとして、Fig.10 に粒子軌跡を示す。図は、初期値(固定球で計算した瞬時の流れ場を採用)から $tU_0/D_p = 750$ までを示している(粒子間隔と時間に対しては、 $\rho_p/\rho_f = 1.5$ では $t/\tau_p \approx 18$, $\rho_p/\rho_f = 2.5$ では

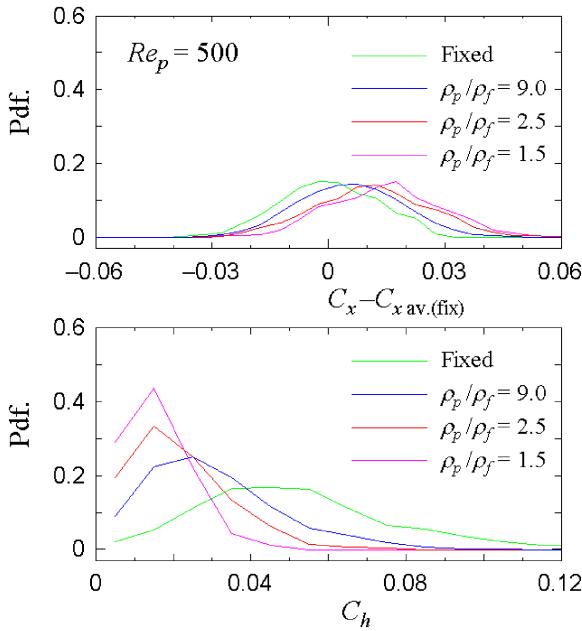


Fig. 8: Probability density of drag and lift coefficients

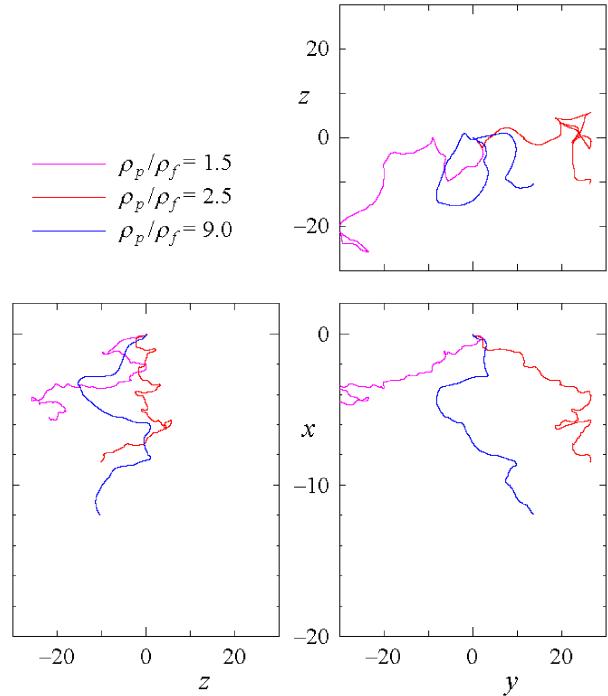


Fig. 10: Particle trajectories

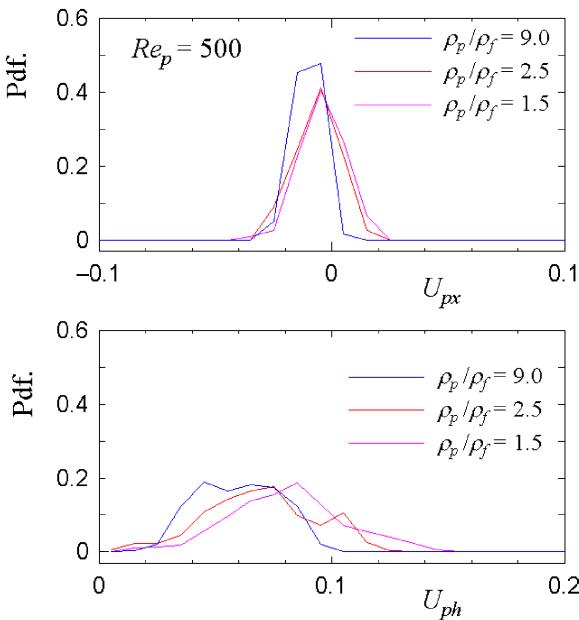


Fig. 9: Probability density of vertical and horizontal velocities

$t/\tau_p \simeq 11$, $\rho_p/\rho_f = 9$ では $t/\tau_p = 13$ まで). 密度比の小さい粒子は、解放直後は横方向に移動するが、やがれジグザグ運動しながら落下するようになる。密度比の大きな粒子ほど軌跡は緩やかになり螺旋を描きながら小さな抵抗で落下する。

4. 結言

直接数値シミュレーションにより、一様流の中に固定された球と浮遊する球に作用する流体力を比較し、粒子運動との相互作用を調べた。浮遊する球では、粒子と流体の密度比が小さく粒子間和時間が短いほど一様流に直交する方向に小刻みに動き回り、揚力変動を回避しているが、複雑な軌跡を描く。密度比が大きいと、軌跡は緩やかな螺旋を描くように推移する。

固気・固液二相流に対して固体粒子運動を質点近似するとき、そのモデルに固定球の測定値を用いると、自由に運動する粒子には必ずしも合わない。抗力に対しては数%程度の差であるが、固定球の揚力変動から粒子群の分散を見積もると定性的にも異なる結果になる恐れがある。

流体中を運動する粒子挙動のモデリングのためには、レイノルズ数と密度比に関してより広い範囲でデータを集めめる必要があるが、固定球における渦放出方向の定常性と放出周期と粒子緩和時間の関係からある程度の推測は可能と考えられる。

参考文献

1. Achenbach,E., "Vortex shedding from spheres", *J. Fluid Mech.*, **62-2** (1974) 209-221.
2. Kim,H.J. and Durbin,P.A., "Observation of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation", *Phys. Fluids*, **31-11** (1988) 3260-3265.
3. Sakamoto,H. and Haniu,H., "A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow", *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **112** (1990) 386-392.
4. Wu,J.-S. and Faeth,G.F., "Sphere wake in still surroundings at intermediate Reynolds numbers", *AIAA J.*, **31-8** (1993) 1448-1455.
5. Shirayama,S., "Flow past a sphere: topological transitions of vorticity field", *AIAA J.*, **30-2** (1992) 349-358.
6. Johnson,T.A. and Patel,V.C., "Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300", *J. Fluid Mech.*, **378** (1999) 19-70.
7. Mittal,R., "A Fourier-Chebyshev spectral collocation method for simulating flow past spheres and spheroids", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **30** (1999) 921-937.

8. Lee,S., "A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers" *Comput. Fluids*, **29** (2000) 639-667.
9. Maxey,M.R. and Riley,J.J, "Equation of motion for a small rigid sphere in a uniform flow", *Phys. Fluids*, **26-4** (1983) 883-889.
10. Michaelides,E.E., "Review—The transient equation of motion for particles, bubbles, and droplets", *Trans. ASME, J. Fluids Eng.*, **119** (1997) 233-247.
11. Magarvey,R.H. and MacLatchy,C.S., "Vortices in sphere wakes", *Canadian J. Phys.*, **43** (1965) 1649-1656
12. 瀧口・梶島・三宅,「固体粒子と乱流の相互作用の数値計算法」機論 **64-625B** (1998) pp.2804-2810.
13. Kajishima,T., Takiguchi,S. and Miyake,Y., "Modulation and Subgrid Scale Modeling of Gas-Particle Turbulent Flow", *Recent Advances in DNS and LES* (eds. Knight,D. & Sakell,L.), Kluwer Academic (1999) 235-244.
14. 梶島・瀧口・浜崎・三宅,「渦放出を伴う粒子を含む鉛直平板間乱流の構造」機論 **66-647B** (2000) pp.1734-1741.
15. 瀧口・梶島・三宅,「固体粒子による鉛直平行平板間乱流の変調」機論 **66-648B** (2000) 1998-2005.
16. Clift,R., Grace,J.R. and Weber,M.E., *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York (1978).
17. White,F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York (1991).