

## 渦法を用いた急回転・急発進直後の円柱に作用する揚力特性に関する検討

### Initial Lift Coefficients Acting on an Impulsively Started Rotating and Translating Circular Cylinder by a Vortex Method

○ 植田 芳昭, 阪府大院, 〒 599-8531 堺市学園町 1-1, E-mail: ueda@fluid.energy.osakafu-u.ac.jp

木田 輝彦, 阪府大院, 〒 599-8531 堺市学園町 1-1, E-mail: kida@energy.osakafu-u.ac.jp

Yoshiaki UEDA, Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuencho, Sakai-shi, Osaka 599-8531, Japan

Teruhiko KIDA, Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuencho, Sakai-shi, Osaka 599-8531, Japan

An initial lift force exerted by a quiescent fluid on a circular cylinder suddenly starting and rotating from rest has not been obtained explicitly, because it results from the nonlinearity between the rotating and the translating motions. The previous paper<sup>(1)~(3)</sup> analytically showed that the dominant term of the initial lift coefficients,  $C_L$ , were expressed as;  $C_L \sim t^{-1/2}$  at  $Re \ll 1$ ,  $C_L \sim O(1)$  at  $Re = O(1)$ , and  $C_L \sim t^{1/2}$  at  $Re \gg 1$ . In the present paper, the lift coefficients,  $C_L$ , at the extremely early stage of motion are numerically obtained by using the vortex method and the analytical results are confirmed; the larger the Reynolds number, the weaker the singularity of  $C_L$  at  $t = 0$ .

#### 1. 緒 言

粘性流体中に置かれた物体に働く揚力に関するよく知られた現象としてマグヌス効果とサフマン効果がある。特に、空気中に浮遊する粒子の運動を記述する際には、マグヌス効果を考慮する必要がある。

これまでの物体まわりの流れの研究では、そのほとんどが三次元物体を扱ったものである。Nakanishi ら<sup>(4)</sup>は急発進する二次元円柱に働く非定常流体力を導出し、非定常効果は三次元問題に比べて長く続くことを指摘している。さらに、二次元低レイノルズ数流れではストークスのパラドックスなどがあり、二次元流れは工学的のみならず数学的にも興味ある問題である。Kida ら<sup>(5)</sup>は高レイノルズ数流れ場で、回転している円柱が急発進した場合と円柱が急回転と同時に急発進した場合を渦法を用いて比較し、この初期条件の違いによる流れ場の相違は出発渦によることを明らかにした。また、中西ら<sup>(6)</sup>はこの問題に対し、明確な出発渦が生じない低レイノルズ数流れ場について彼らと同様の手法を用いて検討し、 $t \sim 30$ までの結果ではこれら二つの流れが同じ定常解に収束しない可能性を示唆した。そこで、木田ら<sup>(7)</sup>はこの問題について、特異摂動法を用いて解析し、低レイノルズ数での定常解への収束性は  $t^{-3/2}$  であることを明らかにしている。

しかしながら、これらの研究は物体が運動し始めてからある程度時間が経過した状態を扱ったものであり、運動開始直後の過渡的流れについての研究は余りされていない。そこで、筆者らは前報<sup>(1)</sup>で、静止流体中に置かれた円柱が時間原点で急回転と同時に急発進する極低レイノルズ数流れ ( $Re \ll 1$ ) を解析し、運動開始直後の過渡的流れに対する空力特性についても調べ、運動開始直後における抗力の主要解は渦度の第一次近似解(線形解)から導出されるが、揚力では第二次近似解(非線形解)から導出されることを明らかにした。このことから、初期揚力の考察には非線形慣性項を考慮しなければならず、十分な注意が必要であることを指摘した。

図 1 で示されるように、静止流体中で円柱が急回転・急発進した場合の物体に作用する初期揚力係数に関する

主な解析的研究には、Badr & Dennis<sup>(3)</sup> と筆者ら<sup>(1)(2)</sup>によるものが挙げられる。Badr & Dennis<sup>(3)</sup> は高レイノルズ数流れ ( $Re \gg 1$ ) について検討し、初期揚力係数  $C_L$  は  $t^{1/2}$  項を主要解とする漸近級数で表現できることを示した。一方、前報<sup>(1)(2)</sup>で筆者らは極低レイノルズ数 ( $Re \ll 1$ ) では  $t^{-1/2}$ 、中間レイノルズ数 ( $Re = O(1)$ ) では定数項を主要解とする漸近級数で表現できることを明らかにした。

以上述べたように、揚力係数の運動開始直後の時間依存性はレイノルズ数によって大きく異なる。そこで本報では、レイノルズ数の増加に伴う初期揚力係数の時間原点での特異性の変化について渦法による数値解析の立場から検討することを主な目的としている。ここで用いる渦法は、Kida ら<sup>(8)</sup>による渦シート法と渦核法である。

まず次節で、初期揚力係数を導出する際にこれまで用いられてきた漸近解析手法の概略について、それぞれのレイノルズ数領域 ( $Re \ll 1$ ,  $Re = O(1)$ ,  $Re \gg 1$ ) ごとに述べる。第 3 節では、本報で用いた渦法の解析手法について述べる。第 4 節では、本報で得られた数値計算結果とこれまでの解析結果を比較し、初期揚力係数の時間原点での特異性の変化について検討する。最後に、第 5 節で結論を述べる。

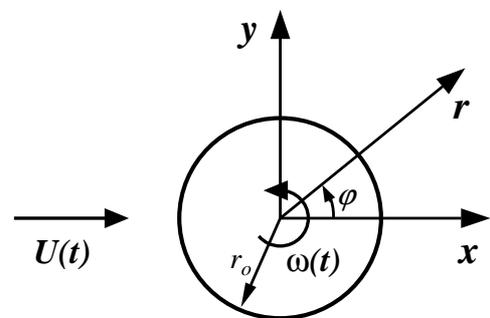


Fig. 1: Relative coordinate systems and physical problem.

## 2. 理論解析

前節でも述べたように，静止流体中で円柱が急回転 ( $\omega(t) = \Omega \cdot H(t)$ ) と同時に急発達 ( $U(t) = H(t)$ ) した時の極低レイノルズ数，中間レイノルズ数，高レイノルズ数における空力特性について，これまで解析的に調べられている<sup>(1)~(3)</sup>．ただし， $H(t)$  はヘビサイド関数を表し，長さは円柱半径  $r_o$  で，速度は発達速度で無次元化している．座標系は図1に示す円柱に固定した相対座標系とし，攪乱速度場を  $u(t)$  とする．このとき，初期条件および境界条件はそれぞれ以下の通りである．

$$\begin{cases} u(t) = 0 & (t < 0), \\ u(t) = (1 - \Omega \sin \varphi, \Omega \cos \varphi) & (r = r_o \text{ and } t > 0), \\ u(t) \rightarrow 0 & \text{for } r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

以下の小節では，前報<sup>(1)~(3)</sup>までに得られた漸近解析の概略について述べる．

### 2.1 極低レイノルズ数流れ<sup>(1)</sup> ( $Re \ll 1$ )

二次元非圧縮・粘性流体における支配方程式として，以下に示されるオセーン型の渦度方程式を用いる．

$$\nabla^2 \zeta + 2\varepsilon \left( -\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 2\varepsilon f, \quad (2a)$$

$$f = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right). \quad (2b)$$

ただし，摂動パラメータを  $\varepsilon \equiv Re/2$  とし， $\psi$  を攪乱流れの関数とする．いま  $\tilde{\zeta}$ ,  $\tilde{f}$  を  $\zeta$ ,  $f$  のラプラス変換とし， $F$ ,  $\hat{\zeta}$  を以下のように定義する．

$$F \equiv 2\tilde{f} \exp(\varepsilon x), \quad \hat{\zeta} \equiv \tilde{\zeta} \exp(\varepsilon x).$$

これらの関係を用いて基礎式(2a)および  $\tilde{\zeta} = -\nabla^2 \tilde{\psi}$  を変形し，さらにグリーンの公式およびガウスの発散定理を用いると，以下の積分方程式系が得られる．

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(\mathbf{x}_o) &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) F(\mathbf{x}) dS \\ &+ \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[ G(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_o) \frac{\partial \hat{\zeta}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{n}} - \hat{\zeta}(\mathbf{x}_s) \frac{\partial G(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_o)}{\partial \mathbf{n}} \right] ds, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\mathbf{x}_o) &= \frac{1}{2\pi} \int_S \tilde{\zeta}(\mathbf{x}_s) \log \frac{1}{\rho_r} dS \\ &+ \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[ \frac{\partial \tilde{\psi}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{n}} \log \frac{1}{\rho_r} - \tilde{\psi}(\mathbf{x}_s) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \log \frac{1}{\rho_r} \right] ds. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで  $G = K_0(a\rho_r)$ ,  $a = [\varepsilon(\varepsilon + 2p)]^{1/2}$ ,  $\rho_r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|$  であり， $p$  はラプラス変数， $\mathbf{n}$  は外向き法線ベクトル，円柱の外側の全領域を  $S$  とする． $C$  は円柱表面， $\mathbf{x}_s$  は円柱表面上ベクトル， $K_i$  は  $i$  次の第二種変形ベッセル関数である．ただし，極座標系は  $\mathbf{x} = (r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta)$ ,  $\mathbf{x}_o = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ,  $\mathbf{x}_s = (\cos \theta, \sin \theta)$  とする．

内部境界条件は円柱表面上での粘着条件から

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{p} \cos \varphi, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} = -\frac{1}{p} (\Omega + \sin \varphi), \quad (5)$$

となる．一方，外部境界条件は無限遠で流れは存在しないことから

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right| &\rightarrow 0, \\ \oint_{|\mathbf{x}|=r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} ds &\rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \text{for } r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

で与えられる．

空力特性は Navier–Stokes 方程式および円柱表面上での粘着条件から求められ，抵抗係数  $C_D$ ，揚力係数  $C_L$  はそれぞれ

$$C_D = -\frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \left( \zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \sin \varphi d\varphi, \quad (7)$$

$$C_L = \frac{2}{Re} \int_0^{2\pi} \left( \zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \cos \varphi d\varphi, \quad (8)$$

となる．ただし，抗力を  $D$ ，揚力を  $L$  とすると， $C_D$ ,  $C_L$  はそれぞれ次式で定義される．

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 r_o}, \quad C_L = \frac{2L}{\rho U^2 r_o}.$$

運動開始直後の流れに対して，以下に示される内部変数  $\hat{p}$  を導入する．

$$\hat{p} \equiv (2\varepsilon p)^{1/2}.$$

この内部変数を用いて基礎式(3), (4)を変形し，境界条件式(5), (6)から未定定数を決定することにより，第一次近似解は以下のように求められる．

$$\hat{\zeta} \approx -\frac{2\varepsilon\Omega}{\hat{p}K_1(\hat{p})} K_0(\hat{p}r) - \frac{4\varepsilon}{\hat{p}K_0(\hat{p})} K_1(\hat{p}r) \sin \varphi, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \approx & \frac{2\varepsilon\Omega}{\hat{p}^3 K_1(\hat{p})} K_0(\hat{p}r) \\ & + \frac{2\varepsilon}{\hat{p}^2 K_0(\hat{p})} \left[ \frac{2}{\hat{p}} K_1(\hat{p}r) - K_2(\hat{p}) \frac{1}{r} \right] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

ただし，運動開始直後では渦度の拡散は円柱近傍に限られるため，外部解は存在しない．これらの結果をラプラス逆変換し，非線形項(2b)に代入することにより，第二次近似解が得られる．その結果から，初期揚力の主要解は以下のように求められる．

$$C_L \approx -\Omega \left( \frac{5.013257}{\tau^{1/2}} + 3.141593 \right). \quad (11)$$

ただし， $\tau \equiv t/\varepsilon$  である．このように， $C_L$  は時間原点で  $t^{-1/2}$  の特異性を示す．この結果から，極低レイノルズ数流れにおける初期揚力係数は  $t^{-1/2}$  を主要解とする漸近級数で表現できることが分かる．

### 2.2 中間レイノルズ数流れ<sup>(2)</sup> ( $Re = \mathcal{O}(1)$ )

Bar-Lev & Yang<sup>(9)</sup> によるストークス型の渦度方程式に攪乱流れの関数を導入することにより基礎式

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \varepsilon \beta \nabla^2 \right] \zeta = 0, \quad (12)$$

$$\zeta = -\nabla^2 \psi. \quad (13)$$

を得る．ただし， $\varepsilon \equiv (U_o \tau_o)/a$ ， $\beta \equiv 1/Re$  である ( $\tau_o$  はある微小時間を表す)．また， $Re = \mathcal{O}(1)$  であるので  $\beta = \mathcal{O}(1)$  となる．境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= -H(t) (\Omega + \sin \varphi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= -H(t) \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \text{ at } r = 1, \quad (14a)$$

$$\psi \rightarrow 0, \quad \text{for } r \rightarrow \infty, \quad (14b)$$

である．

漸近解析の際，外部変数を  $r$ ，内部変数を  $R \equiv (r-1)\varepsilon^{-1/2}$  とする．また，内部領域での流れの関数および渦度をそれぞれ  $\psi^i = \sum_{n=0} \varepsilon^{n/2} \psi_n^i$ ， $\zeta^i = \sum_{n=0} \varepsilon^{n/2-1} \zeta_n^i$  のように漸近級数で表す．

詳細は省略するが，上述の漸近級数を式(12)，(13)に代入し，内・外部解を求め，それらを接合する．境界条件として，内部解には式(14a)を外部解には式(14b)を用いる．このようにして求められた内部解の第四次近似  $\zeta_3^i$  を式(8)に代入して， $C_L$  を求めると次のようになる．

$$C_L \approx -\frac{8}{3} \Omega \cdot H(t). \quad (15)$$

この結果から， $Re = \mathcal{O}(1)$  において初期揚力係数は定数項を主要解とする漸近級数で表現できることが分かる．

一方，初期抵抗係数  $C_D$  の主要解は周速比，レイノルズ数に関わらず  $\zeta_1^i$  から求められ

$$C_D \approx 8 \left( \frac{\pi}{Re} \right)^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}} + \mathcal{O}(1), \quad (16)$$

である (2)(3)(4)(9)．

### 2.3 高レイノルズ数流れ (3) ( $Re \gg 1$ )

Badr & Dennis<sup>(3)</sup> は，急発進する円柱まわりの流れを取り扱った Collins & Dennis<sup>(10)(11)</sup> の手法を数値的および解析的に発展させた．彼らは運動開始直後の漸近挙動を解析的に求め，その結果を初期値とする数値解析手法を確立した．彼らは基礎式として以下の式を用いている．

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \zeta \exp(2\xi), \quad (17)$$

$$\exp(2\xi) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{2}{Re} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}. \quad (18)$$

ただし， $\xi = \log(r/r_o)$  である．彼らは次式で示されるような時間および  $\lambda \equiv 2(\tau/Re)^{1/2}$  に関するべき級数展開を仮定し解析している．

$$\psi \approx \psi_0 + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \dots, \quad (19)$$

$$\zeta \approx \zeta_0 + \lambda \zeta_1 + \lambda^2 \zeta_2 + \dots. \quad (20)$$

ただし， $\psi_m = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn} \tau^n$ ， $\zeta_m = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{mn} \tau^n$  であり， $\tau$  は無次元時間； $\tau \equiv U_o t / r_o$ ，である．このような解析手法によって，彼らは初期揚力係数を次のように求めている．

$$C_L \approx -2\alpha \left[ \left( 1.4498\pi - \frac{4}{3\pi^{1/2}} \right) \lambda + 0.6961\pi \lambda^2 \right]. \quad (21)$$

ただし， $\alpha$  は回転速度に対する発進速度の周速比を表し， $C_L \equiv 2L / (\rho_o U_o^2 r_o)$ ，(ただし， $U_o$ ；急発進速度， $t$ ；時間， $r_o$ ；円柱半径， $\rho_o$ ；流体密度， $L$ ；揚力) である．式(21)から， $Re \gg 1$  における初期揚力係数は  $t^{1/2}$  を主要解とする漸近級数で表現できることが分かる．

### 3. 数値解析

二次元非圧縮・粘性流れでは，Navier-Stokes 方程式から渦度輸送方程式は次のように表される．

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \zeta = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta, \quad \zeta = -\nabla^2 \psi. \quad (22)$$

ここで， $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$  は速度ベクトル， $\zeta = (0, 0, \zeta)$  は渦度， $\psi$  は流れの関数を表し， $Re$  は前節と同様，急発進速度  $U(t)$  と円柱半径  $r_o$  で無次元化したレイノルズ数を表す．

Beale & Majda<sup>(12)</sup> は渦度輸送方程式(22)を以下のように分離するスプリット法を提案した．

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{d\tau} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p), \quad \frac{d\zeta_p}{d\tau} = 0, \quad (23a)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\zeta_p}{d\tau} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta(\mathbf{x}_p). \quad (23b)$$

ここで， $\zeta_p$ ， $\mathbf{x}_p$  はそれぞれ流体粒子によって運ばれる渦度およびその位置である．まず，Euler の流れが式(23a)によって解かれ，次に粘性拡散による流れが式(23b)によって解かれる．渦法では，通常この手法が用いられる．

Euler 方程式を解く際には，Kida ら<sup>(13)</sup> によるパネル法を用いる．この手法は，物体表面上を  $n$  枚 (本計算では  $n = 80$ ) のパネルに分割し，パネル上に強さを未知数とする特異関数 (強さが  $\gamma$  で一定の循環とデルタ関数的な湧き出し  $\sigma$ ) を分布させ，物体表面上での境界条件を満足させるように，その分布関数の強さを求める手法である．ただし，計算評点は各パネルの中心とした．

粘性拡散にはランダムウォーク法を用いる．この手法は，渦核と渦シートの粘性拡散による移動量を，平均 0，標準偏差  $(2\Delta\tau/Re)^{1/2}$  の正規乱数で表される統計的な移動量によって表現するものである．ただし， $\Delta\tau$  は時間ステップを表す．

本報では，カットオフ関数として以下に示すガウス分布を用いる．

$$\chi_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi \epsilon^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{\epsilon^2}\right). \quad (24)$$

ここで， $\mathbf{x}$  は  $(x_1, x_2)$  である．

速度場  $\mathbf{u}$  は渦度場  $\zeta$  から次式のように表される．

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \int \mathbf{K}_\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \zeta(\mathbf{x}', \tau) d\mathbf{x}'. \quad (25)$$

また，

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\epsilon &= \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') * \chi(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2\pi|\mathbf{x}'|^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}'|^2}{\epsilon}\right) \right] (-x_2, x_1). \end{aligned} \quad (26)$$

ただし， $*$  は畳み込みを表す．

本解析では，物体表面近傍において Chorin<sup>(14)</sup> によって提案された渦シート法を用いる (本計算では，その単位長

Table 1: Thicknesses of the numerical boundary at the various Reynolds numbers.

$Re$	0.1	1	1500
$\lambda$	0.001	0.006	1.0

さ当たりの循環の最大値  $\xi_{\max}$  を 0.05 とした) . Nakanishi ら<sup>(15)</sup> によって指摘されたように, 低レイノルズ数流れでは, この渦シート法を適用する厚さ (仮想境界層厚さ) を非常に薄くとる必要がある. そこで本計算では, この仮想境界層厚さ:  $H = \lambda/Re^{1/2}$ , をそれぞれのレイノルズ数に応じて表 1 のように設定した.

物体表面上での粘着条件から, 物体表面で生成される渦度の強さ  $\gamma_e$  は

$$\gamma_e = -2 \left( u_b - u_p - \sum_j^s \gamma_j d_j \right), \quad (27)$$

で求められる (詳細文献は Kida ら<sup>(16)</sup>, Cheer<sup>(17)</sup> 参照). ただし,  $d_j$  は渦シートの重なる度合いを表し,  $u_b, u_p$  はそれぞれ渦核とポテンシャル流れによって誘起される物体表面上での接線方向速度成分である. また,  $\sum_j^s$  は  $x_{2j} > x_2$  を満たし, かつ  $0 \leq d_j \leq 1$  を満足する渦シートの総和を表す.

時間ステップは

$$\Delta\tau = (10^{-1} - 10^{-6})/9999 \times [(n1 + 1) \times (n1 + 1) - 1] + 10^{-6}, \quad (28a)$$

$$\Delta\tau = (10^{-1} - 10^{-6})/99999 \times [(n1 + 1) \times (n1 + 1) - 1] + 10^{-7}, \quad (28b)$$

とする<sup>(8)</sup>. ただし,  $n1$  はステップ数である.  $Re = 0.1$  では時間ステップとして式(28a)を用い,  $Re = 1, 1500$  では式(28b)を用いた.

#### 4. 数値計算結果および考察

図 2 は静止円柱が時間原点で急発進した時の流れについて, 本数値計算手法によって得られた渦核分布である. 図 3 はその時の  $C_D$  について, 本数値計算結果と Koumoutsakos & Leonard<sup>(18)</sup> による数値計算結果を比較したものである. これらの図から本数値計算手法はほぼ妥当であり, 運動開始直後の初期流れにも適用可能であると思われる. そこで, 回転を伴った流れに対して, 本解析手法を適用することにする. 本報では, 式(1)で与えられる初期条件のもとで, 表 1 でも示したように,  $Re = 0.1, 1, 1500$  の三つのケースに対して数値計算を行う.

図 4 は周速比  $\alpha = 1$ ,  $Re = 0.1, 1, 1500$  の場合の渦核分布を表す. 運動開始直後は, 対流よりも粘性拡散による影響が大きい. 従って, 図 4 から分かるように, レイノルズ数が小さくなるほど渦核の分布は広範囲に広がっている. Bar-Lev & Yang<sup>(9)</sup> は  $Re = 1500$  で円柱が回転を伴わずに急発進したとき, 最初にはく離が始まる時間は  $t \approx 0.3195$  であることを明らかにしている. 本報のように, 円柱が回転を伴った運動をした場合, 一般的に急

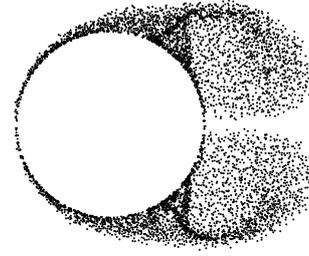


Fig. 2: Vortices distribution without rotation at  $Re = 1500$  and  $t = 3.983618$ .

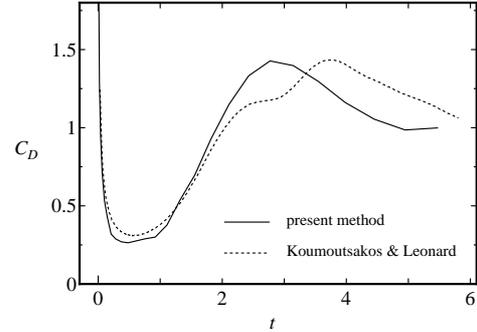


Fig. 3: Comparison between the present method and Koumoutsakos et al's (1995) in the case of the flow without rotation at  $Re = 1500$ .

発進問題に比べて最初にはく離を起こす時間は遅くなる. そのため, 図 4(c) の渦核分布では,  $t = 0.8664017$  にもかかわらず円柱後端にはく離渦が見られない.

図 5 は本数値計算手法によって得られた円柱の中心と共に動く相対座標系から見た流線を表す. 図 6 は前報<sup>(1)(2)</sup> の解析結果を示す. 先にも述べたように, 運動開始直後は粘性拡散による影響が支配的である. そのため,  $Re = 1500$  ではポテンシャル流れに近い流線となっている. しかし, 粘性拡散の影響を顕著に受ける低レイノルズ数では, 完全に上下非対称な流れとなっている. このことは, 高レイノルズ数では Navier-Stokes 方程式の第一次近似はポテンシャル流れとなるが, 低レイノルズ数ではストークス流れになることに対応している. 円柱は半時計まわりに回転しながら左方向に進むので, 円柱の表面近傍では円柱上面の流速が下面に比べて速くなる. そのため, 円柱上側に循環流れが形成される. ただし, 図 5(a) では拡散速度が極めて速いため, 循環流れは円柱表面から遙か上方へ流されてしまっている. 図 6 に示される解析解は円柱近傍で適用できる内部解から流線を描いている. 従って, 解析解は円柱表面近くで有用なことを考慮すると, 図 5, 6 から本数値計算手法は定性的に妥当であると考えられる.

図 7 は周速比  $\alpha = 1$  の抵抗係数  $C_D$  を示す. 本報の結果は実線で示す. また, これまでに得られた解析結果を比較のために示してある. ただし,  $Re = 0.1$  では Nakanishi ら<sup>(4)</sup>,  $Re = 1$  では Badr & Dennis<sup>(3)</sup>,  $Re = 1500$  では Badr & Dennis<sup>(3)</sup> と Chang & Chern<sup>(19)</sup> による結果を引用した. ただし, Chang & Chern<sup>(19)</sup> の結果は数値計算によるものである. これらの図から,  $C_D$  に関しては本手法の結果とほぼ一致していることが分かる.

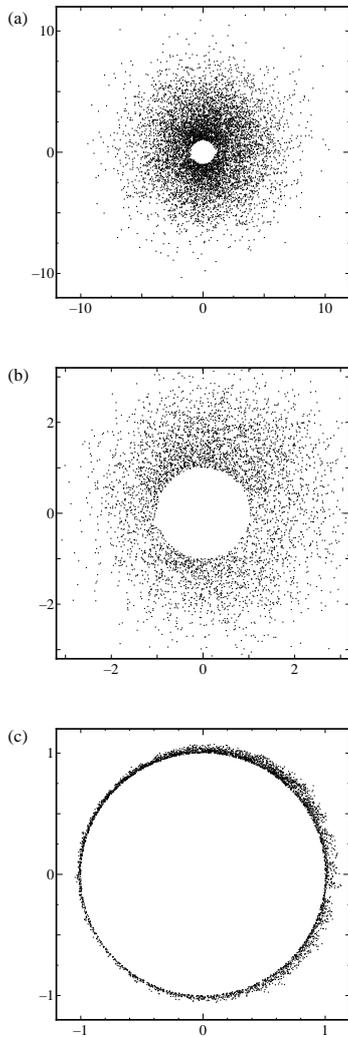


Fig. 4: Vortices distributions at  $t = 0.8664017$ ,  $\alpha = 1$  and; (a)  $Re = 0.1$ , (b)  $Re = 1$ , (c)  $Re = 1500$ .

図 8 は周速比  $\alpha = 1$  の揚力係数  $C_L$  を表す．また，前報<sup>(1)(2)(3)(19)</sup> で得られた解析結果，および本報で得られた数値計算結果とその十点補間による結果をそれぞれ図示してある．本報では，数値計算の際の時間発展法として二次精度の Adams-Bashforth 法を用いている<sup>(16)</sup>．この手法は陽解法であるため，最初の数ステップは計算精度の点で問題があるが，これらの図 (図 8 (a) (b) (c)) を見ても分かるように，それぞれのレイノルズ数において揚力係数はこれまでに得られた解析解と定性的に一致している．つまり， $Re = 0.1$  の結果を示す図 8 (a) からは  $t \rightarrow 0$  において，揚力係数が  $C_L \rightarrow t^{1/2}$ ，定数項とは考えられず，図 8 (c) からは  $C_L \rightarrow t^{-1/2}$  とは考えられない．ただし，抵抗係数に比べて揚力係数の振動が激しいのは，抗力の主要解は渦度の線形解から導出されるが，揚力是非線形解から導出される<sup>(1)</sup> ことに起因していると考えられる．また，抵抗係数はレイノルズ数に依存せず，線形解から得られるので数値解の精度も良い．一方，揚力係数は非線形項 (対流項) によって生じる．このことは  $C_L$  がレイノルズ数に依存する原因であり，数値解が初期に振動する原因でもある．ただし，式(28) に示した時間ステップから分かるように， $t \geq 0.1$  では離散渦の数は非常

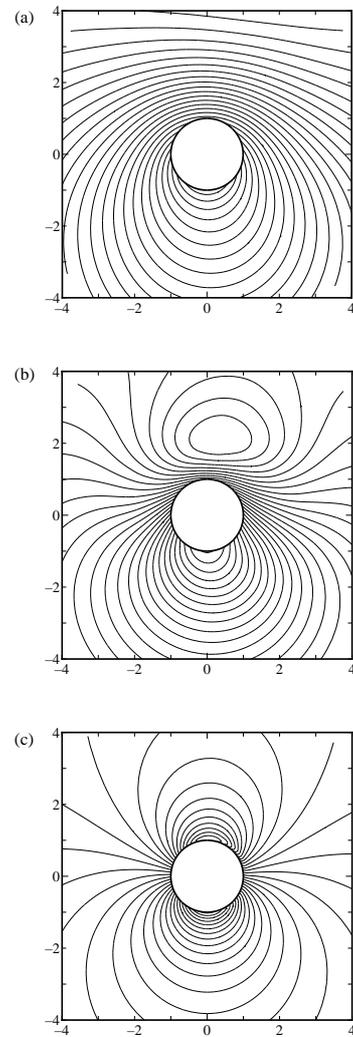


Fig. 5: Stream lines obtained by the present results at  $t = 0.8664017$ ,  $\alpha = 1$  and; (a)  $Re = 0.1$ , (b)  $Re = 1$ , (c)  $Re = 1500$ .

に多い．従って，平均的な意味において妥当な結果を示していると考えられる．この結果からこれまでに得られた解析結果の予測通り，確かに初期揚力係数の主要解は低レイノルズ数で  $t^{-1/2}$ ，中間レイノルズ数で定数項，高レイノルズ数で  $t^{1/2}$  となることが検証できる．

## 5. 結 言

急回転・急発進直後における揚力係数は，急回転と急発進による連成の影響によって非常に複雑となる．この問題に対して，いくつかの解析的研究があり，これまでに次のことが分かっている: (1) 極低レイノルズ数 ( $Re \ll 1$ ) における初期揚力係数は  $t^{-1/2}$  の特異性を示す<sup>(1)</sup>．(2) 中間レイノルズ数 ( $Re = \mathcal{O}(1)$ ) における初期揚力係数は定数項を主要解とする<sup>(2)</sup>．(3) 一方，高レイノルズ数では  $t^{1/2}$  に漸近する<sup>(3)</sup>．そこで，本報では渦法による数値計算を用いて，主にレイノルズ数の増加に伴う初期揚力係数の時間原点での特異性の変化について検討した．得られた結論は以下の通りである．(1) Kida ら<sup>(8)</sup> による手法を円柱が急回転と同時に急発進した直後の過渡的な流れに適用し，その妥当性をこれまでの解析結果と比較することにより確認した．(2) 急回転を伴った場合，円柱が

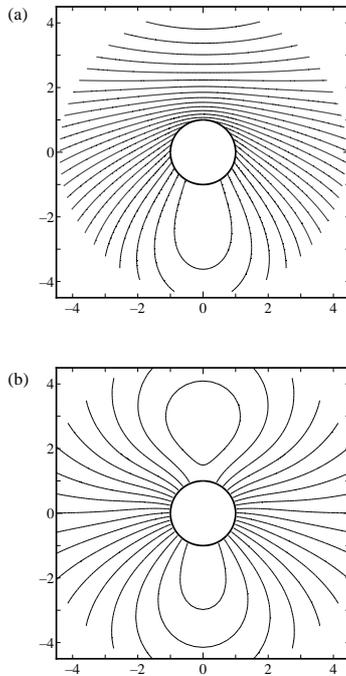


Fig. 6: Stream lines given by the previous analytical results<sup>(1)(2)</sup> at  $t = 1.0$ ,  $\alpha = 1$  and; (a)  $Re = 0.1$ , (b)  $Re = 1$ .

急発進した時に比べて最初にはく離を起こす時間は遅れる。(2) 運動開始直後の流れは高レイノルズ数ではポテンシャル流れが支配的となるが、レイノルズ数が小さくなると粘性拡散の影響が強くなりストークス流れが支配的となる。(3) 初期揚力係数の主要解はこれまでの解析結果の通り、レイノルズ数に依存する。すなわち、極低レイノルズ数では  $t^{-1/2}$ 、中間レイノルズ数では定数項、高レイノルズ数では  $t^{1/2}$  を主要解とする漸近級数で表現できる。

本研究は文部科学省科学研究費基盤 C (12650178) の援助を受けた。記して謝意を表する。

#### 参考文献

- (1) 植田, 木田, 中西, Sellier, A., “急回転・急発進する円柱まわりの低レイノルズ数流れの漸近解析,” 機論, **67**–659, B(2001), pp. 1626–1633.
- (2) 植田, 木田, “急回転・急発進直後の円柱に作用する空力特性について,” 機論 (B), 投稿予定.
- (3) Badr, H.M. & Dennis, S.C.R., “Time-dependent viscous flow past an impulsively started rotating and translating circular cylinder,” *J. Fluid Mech.*, **158** (1985), pp. 447–488.
- (4) Nakanishi, M., Kida, T. & Nakajima, T., “Asymptotic solutions for two-dimensional low Reynolds number flow around an impulsively started circular cylinder,” *J. Fluid Mech.*, **334** (1997), pp. 31–59.
- (5) Kida, T., Nagata, T. & Nakajima, T., “Far-field condition of vortex methods on an impulsively started two-dimensional circular cylinder with rotation,” *Phys. Fluids.*, **6**–8 (1994), pp. 2745–2756.

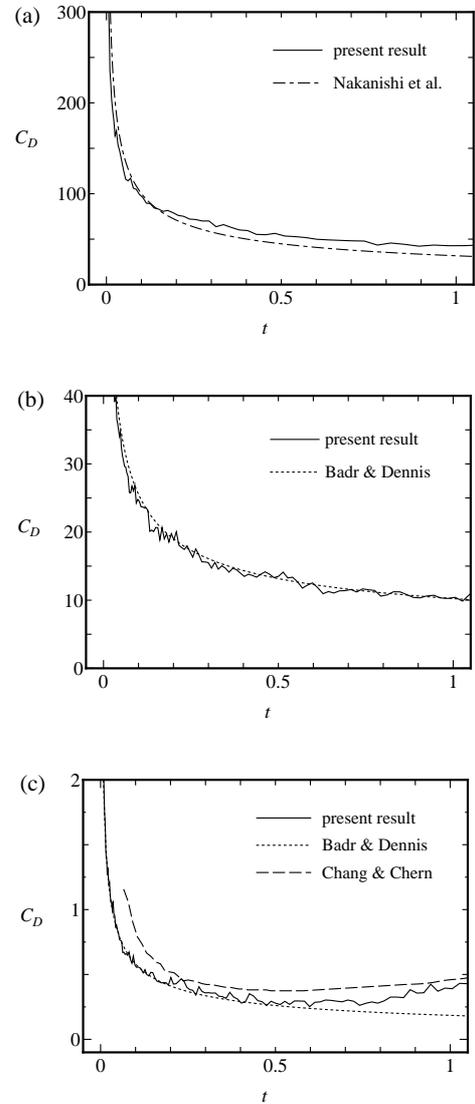


Fig. 7: Time histories of the drag coefficients,  $C_D$ , at  $\alpha = 1$  and; (a)  $Re = 0.1$ , (b)  $Re = 1$ , (c)  $Re = 1500$ . Present numerical result; solid line, Nakanishi et al (1997); dot dashed line, Badr & Dennis (1985); dotted line, Chang & Chern (1991); dashed line.

- (6) 中西, 木田, 中嶋, “急発進する回転円柱周りの低レイノルズ数流れの渦法による解析,” 機論, **64**–626, B(1998), pp. 3306–3314.
- (7) 木田, 植田, “急発進する二次元回転円柱まわりの低レイノルズ数流れ (定常流れへの収束性について),” 機論 (B), 掲載予定.
- (8) Kida, T., Ueda, H. & Kurata, M., “Pressure distribution of transient flow around an impulsively started two-dimensional elliptic cylinder by a vortex method,” *CFD Journal*, **9** (2000), pp. 64–75.
- (9) Bar-Lev, M. & Yang, H.T., “Initial flow field over an impulsively started circular cylinder,” *J. Fluid Mech.*, **72** (1975), pp. 625–647.
- (10) Collins, W.M. & Dennis, S.C.R., “Flow past an impulsively started circular cylinder,” *J. Fluid Mech.*, **60** (1973a), pp. 105–127.

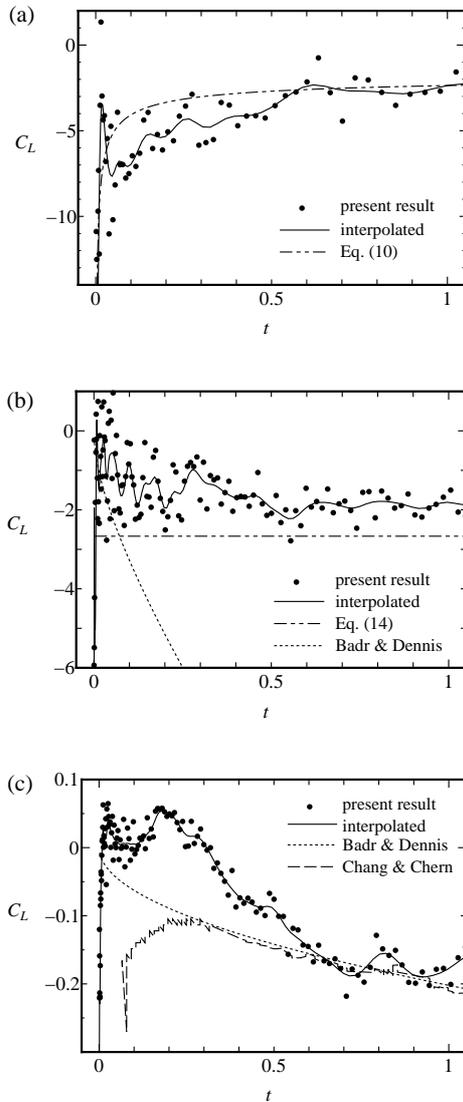


Fig. 8: Time histories of the lift coefficients,  $C_L$ , at  $\alpha = 1$  and; (a)  $Re = 0.1$ , (b)  $Re = 1$ , (c)  $Re = 1500$ . Present numerical result; solid circle, interpolated result; solid line, Badr & Dennis (1985); dotted line, Chang & Chern (1991); dashed line.

(11) Collins, W.M. & Dennis, S.C.R., “The initial flow past an impulsively started circular cylinder,” *Q.J. Mech. Appl. Maths*, **36** (1973b), pp. 53–75.

(12) Beale, A. T. & Majda, A., “Rates of convergence for viscous splitting of the Navier–Stokes equations,” *Math. Comput.*, **37** (1981), pp. 243.

(13) Kida, T., Nagata, T. & Nakajima, T., “Accuracy of the panel method with distributed sources applied to two-dimensional bluff bodies,” *CFD Journal*, **2** (1993), pp. 73–90.

(14) Chorin, A. J., “Vortex sheet approximation of boundary layer,” *J. Comput. Phys.*, **27** (1978), pp. 428–442.

(15) Nakanishi, M., Kida, T. & Nakajima, T., “Numerical simulation for two-dimensional low Reynolds number flow around an impulsively started circu-

lar cylinder by vortex method,” *Proc. of ICFE*, **II** (1997), pp. 995–1000.

(16) Kida, T. & Kurita, M., “High Reynolds number flow past an impulsively started circular cylinder (time marching of random walk vortex method),” *CFD Journal*, **4** (1996), pp. 489–508.

(17) Cheer, A.Y., “Unsteady separated wake behind an impulsively started cylinder in slightly viscous fluid,” *J. Fluid Mech.*, **201** (1989), pp. 485–505.

(18) Koumoutsakos, P. & Leonard, A., “High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods,” *J. Fluid Mech.*, **296** (1995), pp. 1–38.

(19) Chang, C.-C. & Chern, R.-L., “Vortex shedding from an impulsively started rotating and translating circular cylinder,” *J. Fluid Mech.*, **233** (1991), pp. 265–298.