

部分境界適合直交格子法の改良

A Modification of Locally Boundary Fitted Cartesian Grid Method

朴 炳湖, 電気通信大学, 調布市調布ヶ丘 1-5-1, E-mail:piao@mce.uec.ac.jp

黒田 成昭, 電気通信大学, 調布市調布ヶ丘 1-5-1, E-mail:kuroda@mce.uec.ac.jp

Binghu PIAO, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofushi, Tokyo 182-8585, Japan

Shigeaki KURODA, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofushi, Tokyo 182-8585, Japan

In this paper, the Locally Boundary Fitted Cartesian Grid Method that presented by ours was modified. In the previous method, the body-fitted grid was used in the near surface regions. In this study, we present a method for improve the grid quality by the solving of Elliptic Partial Differential Equations and a mesh refinement scheme. In the near boundary region, the meshes have good orthogonality and the cell sizes were controlled uniformly. The flows around circular cylinder at Reynolds number 1000 was simulated and compared with previous calculation results.

1. 緒言

近年,CFD の応用が進む中,格子生成が容易である直交格子への関心が高まっており,研究が急速に進んでいる。直交格子には,直交格子のみ使用する方法,カットセルを使用する方法^{1,7)}および境界近傍で境界適合格子を使用する方法²⁻³⁾などが提案されている。なお,計算の安定性を修正することでカット点をそのまま差分計算に使用する方法⁴⁾も提案されている。直交格子法では格子の節約や高精度の計算を必要とする場所だけに集中的に格子を再分割する LMR (Local Mesh Refinement)^{5,6)}や計算を行いながら必要な場所を再分割する AMR (Adaptive Mesh Refinement)⁶⁾の実現が簡単であることが知られている。

直交格子のみ使用する手法は,物体形状の近似精度が低く,境界層の解析には向いてないといわれている。しかし,この手法は格子生成から解析プログラムまできわめて単純であるため,境界層内部流れや流体力の予測を目的としていない問題では威力を発揮する。直交格子のみ使用する手法は汎用コード Phoenix にも搭載されており,環境流体などの解析にも使用されている。

カットセルを導入した手法は,物体形状の近似精度を重視した手法として知られており,非粘性の Euler 方程式の解析¹⁾では,高い信頼性が確認⁷⁾されている。しかし,粘性流れの解析には向いてないといわれており,解析例は少ない。カットセルを使用する場合,小さいカットセルについて周辺セルと結合させる手法を取り入れる必要があり,格子生成が複雑になる。文献¹⁾や筆者らの研究³⁾によると,カットセルを導入することでカットセルのみ使用するより解析精度が向上するものの,物体表面圧力分布などに振動が起こるなど粘性流れの解析では問題が多い。

近年,物体近傍で境界適合格子を使用し,それ以外の領域では直交格子を使用する方法²⁻³⁾が注目を浴びている。境界適合格子とのハイブリットは非構造格子での応用が多かったが,直交格子でも使用可能であり,粘性流れでの解析精度の向上が期待できる。物体境界近傍で境界適合格子を使用する手法には,あらかじめ物体表面に境界適合格子を生成し,境界適合格子の外側境界線で直交格子線をカットする方法²⁾がある。この方法は Cartesian/Structured Hybrid 格子と呼ばれているが,保存性を満たすように工夫した重合格子の改良として考えることもできる。高精度の解析結果が期待できる反面,カットセルをそのまま使用するため,格子生成から数値解析までカットセルの煩雑な処理および境界適合格子生成の難しさが依然残る等の問題がある。この手法以外に,筆者らにより提案された部分境界適合直交格子法³⁾がある。部分

境界適合直交格子法では,物体境界が直交格子を貫通することにより生成されるカット点と直交格子をベースに境界適合格子を完全自動的に生成する新しい手法である。境界近傍で境界適合格子を使用しているため,境界層内部ながれの解析への可能性を示し,粘性流れの解析に向いている手法であると考えられる。しかし,格子の質が低い問題があり,高レイノルズ数流れの解析には適応し難いと考えられる。

本研究では,部分境界適合直交格子法を改良することで,精度の向上させることを目的としている。

2. 格子生成

2.1. 部分境界適合直交格子での格子生成法

部分境界適合直交格子の例を Fig. 1 に示す。部分境界適合直交格子法では格子の完全自動生成を最優先したため,境界適合格子部分の格子直交性が考慮されていない。なお,隣り合っているセル面積に大きな差が生じている場合がある。これらの格子「質」に影響する要因は,計算精度に悪影響を与えられる。

部分境界適合直交格子は次のように生成する。

まず流れ場全体に直交格子を生成する。

次に境界線の貫通によりカットセルが生成される。全体の格子を正常セル,カットセル,内部セルの3種類に分類することができる。正常セルは境界線が通らない計算領域に位置しているセル,カットセルは境界線が通っているセルで,内部セルは完全に計算領域外(物体内部)にあるセルである。

その後,次に物体表面に沿って境界適合格子を生成する。この境界適合格子はカット点と直交格子点をベースにしている。Fig. 1 に示すとおり,カット点を境界適合格子の内部格子点,直交格子の格子点を境界適合格子の外側格子点とする。この処理により,流れ場全体の格子は物体に沿った境界適合格子,正常の四角形直交格子および三角形格子の3種類に分類できる。

最後に楕円形方程式を用いて境界適合格子についてスムージング処理を行う。

部分境界適合直交格子法の利点:

1. カット点と直交格子点を利用して境界適合格子を生成するため,格子生成が容易である直交格子最大の利点を生かしたまま,物体にフィットした格子を生成することが可能になる。
2. 境界近傍で境界に沿った境界適合格子を使用しているため,粘性流れの解析に応用できる。

3. カットセルが三角形セルのみであり，計算および格子生成のプロセスが周辺セルとの結合処理を必要とするカットセル結合に比べて簡単になる。
4. 各セルはそれぞれ一つだけの隣接セルと同じ辺を共有するように設定することが可能であるため，接続境界での物理量の保存を満たすための処理が容易になり，プログラミングが簡単になる。

部分境界適合直交格子の欠点：

1. 境界適合格子部分に直交性がない。
2. 隣り合っているセル面積の変化が連続的でない。
3. 境界適合格子と直交格子の接合部でのセル面積が連続的に変化していない。
4. 境界適合格子の外側境界から表面までの距離が短いいため，境界適合格子と直交格子の接合部から来る乱れの影響が物体表面まで及ぶことがある。

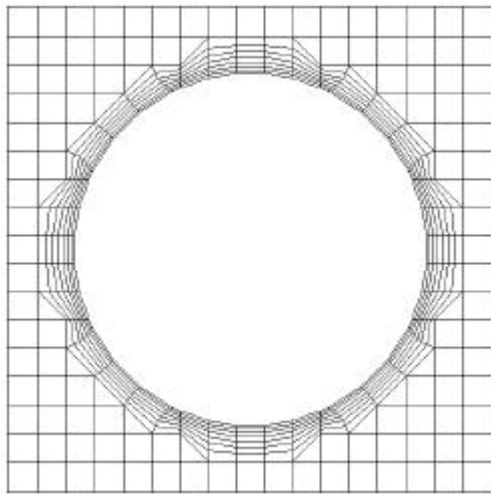


Fig. 1 Sample of Locally Body Fitted Cartesian Grid

2.2. 部分境界適合直交格子法の改良

部分境界適合直交格子法の利点を生かしながら，抱えている問題を解決するため，本研究では次のステップに従って改良を行った。

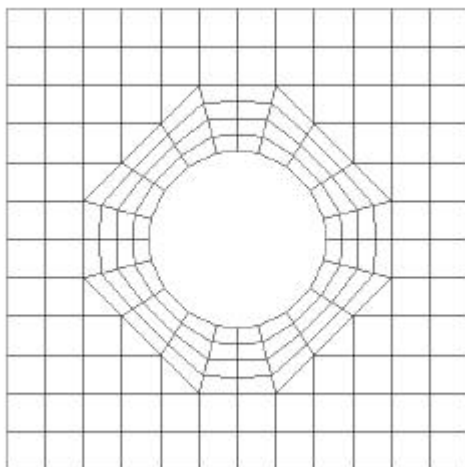


Fig. 2 Modify the Orthogonality of grid at body surface

Step 1：格子直交性およびセル面積の制御

物体表面格子点を物体表面上で滑らせ，直交性とセル面積のバランスを考慮しながら最適と判断するまで格子点を繰り返し移動させる。この処理は単純ではあるが，本提案での重要なポイントであり，格子全体の「質」を向上させるための基盤を作ることになり，部分境界適合直交格子の欠点 1 と 2 が一部解消される。改良後の結果を Fig. 2 に示す。

Step 2：接合部セル面積の制御

部分境界適合直交格子では，カット点と直交格子点をベースに境界適合格子が決まるため，物体表面に垂直する方向での境界適合格子の領域（円柱の場合は半径）は物体が貫通する直交格子の格子間隔と同じオーダーであり，領域をそれ以上に大きくすることは困難である。部分境界適合直交格子法では境界適合格子部分での物体表面に沿った方向での格子数は自動的に決まり，通常格子間隔の増加により格子数が減少する。すなわち，境界適合格子の領域を増加させるために，格子間隔を大きく取った場合，物体形状を再現するための格子数が足りなくなる矛盾が生じる。このため，部分境界適合直交格子法では格子間隔の設定に制限があり，境界適合格子外側セル面積の大きさには限界がある。結果として外側セルと隣接しているカットセルの間には大きなセル面積差が生じた。同様な理由で，部分境界適合直交格子法をそのまま計算に使用した場合，境界適合格子と直交格子との接合部から来る攪乱の悪影響を防ぐのも困難になる。

この問題を解決するために，本研究で次のような改良策を提案する。

まず，境界適合格子の領域を十分に保証できるように格子間隔を設定して直交格子を生成し，部分境界適合格子法の手順で格子を生成する。結果を Fig. 4 に示す。図からわかるように，このように設定する場合，半径方向での領域は広がるが，物体形状の近似精度が極めて低くなる。格子の直交性およびセル面積をスムーズに変化させるための処理を Step1 での説明とおりに行う。結果を Fig. 5 に示す。ここでは，面積の変化率よりも，直交性に重点をおいている。

Fig. 3 に示すように，計算領域のカットセルおよび直交格子について再分割を行う。三角形のカットセルは 2 個の三角形セルと 1 個の四角形セルになる。四角形セルは再分割の結果，4 個の四角形になる。再分割はコンピュータメモリの許容範囲内で必要とする回数まで行える。カットセルおよび直交格子再分割終了後，境界適合格子の表面に沿った方向での格子についても再分割を行う。この操作により境界適合格子による物体形状の再現性を高めることが可能になる。再分割の結果を Fig. 6，Fig. 7，Fig. 8 に示す。それぞれ，1 回，2 回，3 回再分割した結果である。

最後に楕円形方程式を用いて境界適合格子をスムージングする。結果を Fig. 9 に示す。

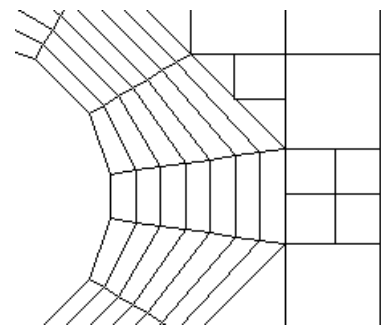


Fig. 3 Sample of grid refinement Treatment

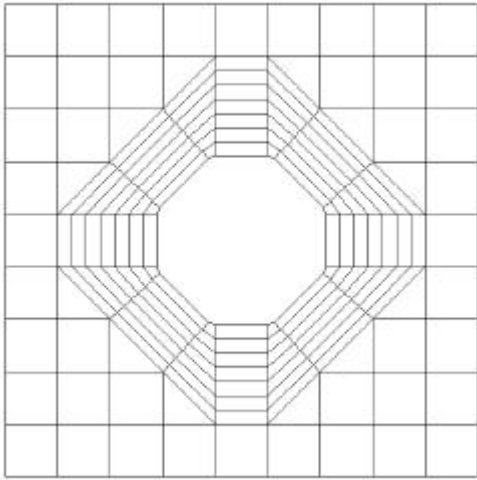


Fig. 4 Locally Body Fitted Cartesian Grid Generation

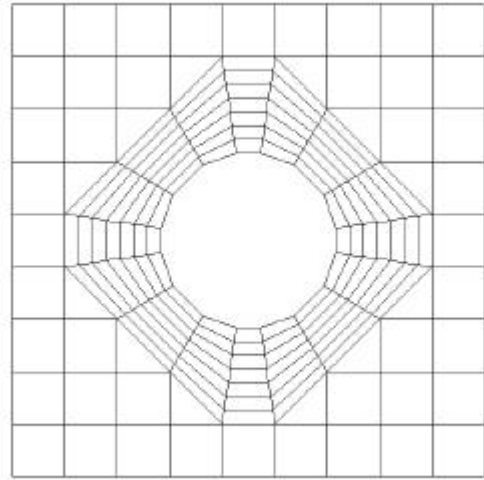


Fig. 5 Modify the orthogonality of grids

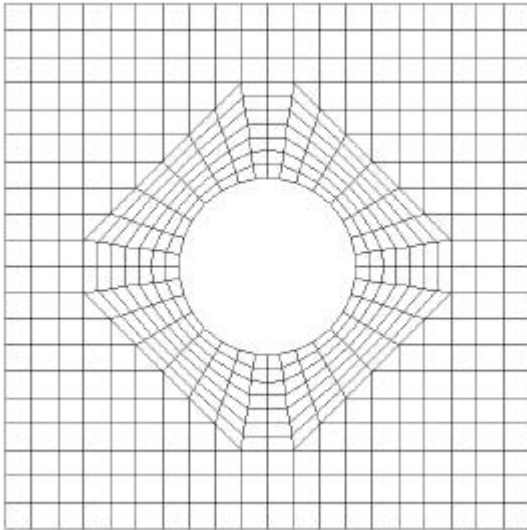


Fig. 6 Grid refinement treatment

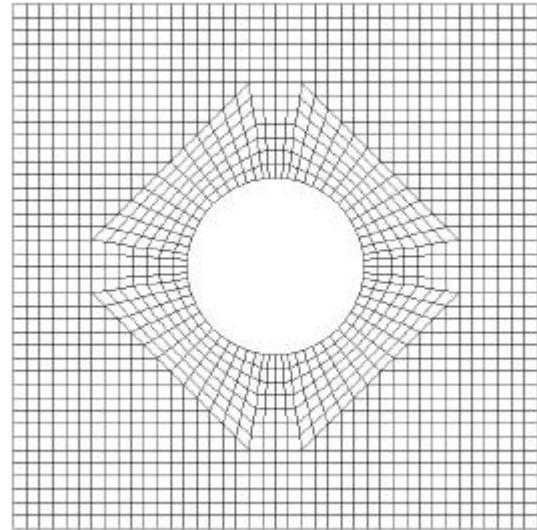


Fig. 7 Grid refinement treatment

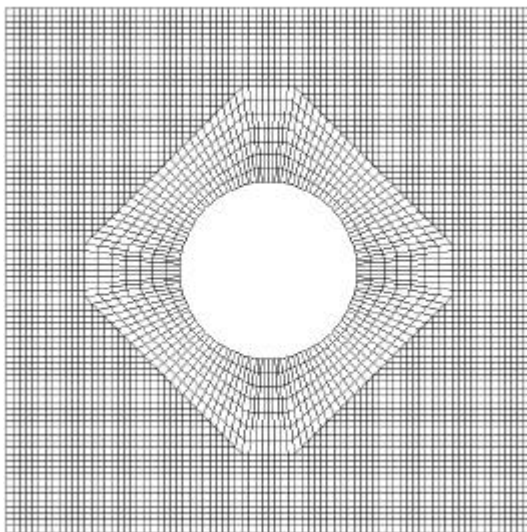


Fig. 8 Grid refinement treatment

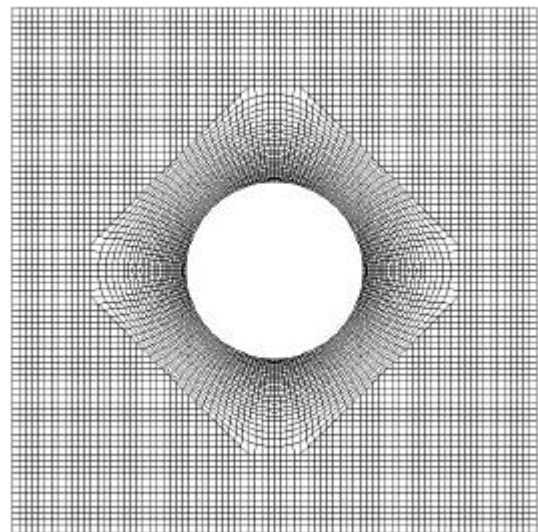


Fig. 9 Smoothing treatment by PDE

3. 計算手法

基礎方程式に二次元非圧縮 Navier・Stokes 方程式(1)と連続の式(2)を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u, v はそれぞれ x 方向と y 方向の速度、 p は圧力で、 Re はレイノルズ数である。すべての変数は代表速度、代表長さおよび流体の密度により無次元化されている。

3.1. 計算手法

計算アルゴリズムには、Kim & Moin⁹⁾ により提案された Fractional Step Method を用いる。時間進行の処理について、対流項および粘性項にそれぞれ二次精度の Adams-Bashforth 法と Crank-Nicholson 法を使用する。空間微分項の離散について、対流項および粘性項にそれぞれ QUICK スキームと 2 次精度の中心差分を使用する。物理量の配置については速度と圧力をともに格子の中心に配置するコロケート格子を用いる。速度と圧力の計算には SOR 法を用いて反復計算を行い、収束判定は式(3)に示すとおり、最大反復誤差を 10^{-5} とした。

$$\text{MAX} \left| \frac{f^{k+1} - f^k}{f_0} \right| < 10^{-5} \quad (3)$$

f は反復計算の変数（速度、圧力）で、 f_0 はその変数の流れ場全体での平均値である。

解析の手順として、まず Navier・Stokes 式から圧力の微分項を無くした式(4)から速度の予測値 $\hat{u}, \hat{v}$ を計算する。式(4)中の N と L はそれぞれ非線形項と線形項を表している。次にスカラー f を導入して得られた式(5)を連続の式(2)に代入することにより求められたポアソン方程式(6)からスカラー ϕ を求める。その後、スカラー f を式(5)に代入し、 u^{n+1}, v^{n+1} を求める。スカラー f と圧力 p は $p = f - \Delta t \nabla^2 f / (2 \text{Re})$ の関係がある。

$$\frac{\hat{u} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} [3N_u^n - N_u^{n-1}] = \frac{1}{2 \text{Re}} (L_u^n + \hat{L}_u) \quad (4)$$

$$\frac{\hat{v} - v^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} [3N_v^n - N_v^{n-1}] = \frac{1}{2 \text{Re}} (L_v^n + \hat{L}_v)$$

$$u^{n+1} = \hat{u} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} \quad (5)$$

$$v^{n+1} = \hat{v} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) \quad (6)$$

3.2. 式の離散化

本研究では離散化手法として有限体積法を用いて、支配方程式の離散化を行った。Fig. 10に示す正常セル（四角形） P を例として、物理量の配置および離散化の方法を示す。図からわかるように、すべての物理量は P, E, W, N, S に代表されるセル中心に配置される。 e, w, n, s はセル面の中心点であり、方程式について積分を行う際の補助的な役割をする。ここに示してないが、三角形セルについても同じように計算点を設定

している。

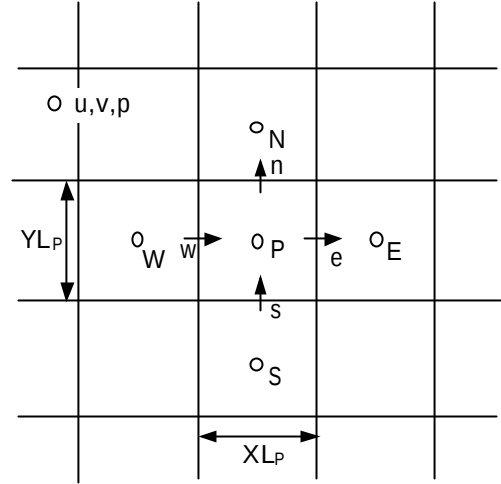


Fig. 10 Regular cells

式(4)の x 方向の式について、Fig. 10示すセル P ($enws$) 上で積分することにより式(7)が求められる。下添え字 E, W, N, S は図 1 に示す各セルの中心を表す。

$$A_P u_P = A_E \hat{u}_E + A_W \hat{u}_W + A_N \hat{u}_N + A_S \hat{u}_S + S_u \quad (7)$$

ただし、

$$A_E = YL_P / (x_E - x_P) / 2 \text{Re}$$

$$A_W = YL_P / (x_P - x_W) / 2 \text{Re}$$

$$A_N = XL_P / (y_N - y_P) / 2 \text{Re}$$

$$A_S = XL_P / (y_P - y_S) / 2 \text{Re}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + XL_P \cdot YL_P / \Delta t$$

である。

S_u はソース項で、式(8)のようにまとまる。

$$S_u = \iint_{\text{CVP}} \left[-\frac{3N_u^n - N_u^{n-1}}{2} + \frac{L_u^n}{2 \text{Re}} + u^n / \Delta t \right] dV \quad (8)$$

CVP は P を囲むコントロールボリューム $\Delta enws$ 。

Fig. 10に示すセル $P(enws)$ 上でポアソン方程式(6)を積分することにより、式(9)が求められる。

$$A_P f_P = A_E f_E + A_W f_W + A_N f_N + A_S f_S - S \quad (9)$$

ただし、

$$A_E = YL_P / (x_E - x_P)$$

$$A_W = YL_P / (x_P - x_W)$$

$$A_N = XL_P / (y_N - y_P)$$

$$A_S = XL_P / (y_P - y_S)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S = [(\hat{u}_e - \hat{u}_w)YL_P + (\hat{v}_n - \hat{v}_s)XL_P] / \Delta t$$

である。

本研究で提案した格子系では、三角形セルも使用しているが、四角形セルの場合と同様な方法で積分することが可能である。

3.3. 境界条件

本研究で提案した格子は、直交格子をベースにし、物体表面近傍では境界適合格子を使用している。物体表面での速度の境界条件としてすべりなし条件を与えた。境界上では

$\hat{u} = u^{n+1}, \hat{v} = v^{n+1}$ のように速度を設定した。このような境界条件を使用することで、境界での時間積分の精度が低くなる¹⁵⁾が、本研究では提案した格子の有効性を示すのが目的であ

るため、処理が簡単である境界条件を採用した。なお、すべての物理量をセルの中心に配置するコロケート格子を使用しているため、ポアソン方程式 (6) を解くときの境界条件は必要でない¹⁸⁾。

4. 計算結果

本研究で、提案する手法の有効性を示すため、2次元円柱周りの流れの解析を行い、他研究者の解析結果、境界適合格子、部分境界適合直交格子および本研究で行った改良による解析結果を比較した。

Fig. 11およびTable 1に解析結果を示す。境界適合格子法による結果および他研究者との解析結果と一定の範囲で一致していることが分かる。Fig. 11およびTable 1に乗っている結果は論文集の要旨に乗っているデータの違って、最近の解析結果である。

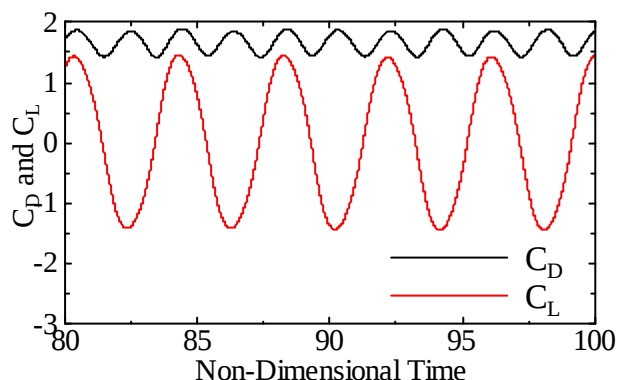


Fig. 11 C_D and C_L of a Circular Cylinder at $Re=1000$

Table 1 Comparison of C_D , C_L and St at $Re=1000$

	C_D	C_L	St
Present	1.60 ± 0.215	± 1.45	0.25
朴・黒田 ³⁾	1.55 ± 0.20	± 1.44	0.23
Body-Fitted	1.50 ± 0.19	± 1.40	0.24
Mittal et al. ⁹⁾	1.53 ± 0.24	± 1.37	0.245

5. まとめ

本研究では、以前提案した部分境界適合直交格子の質を上げを試み、テスト計算を行い、良い解析結果が確認できた。

結果を次のようにまとめる。

物体表面格子のすべりを実現し、物体表面格子の直交性およびセル面積の均一性を制御できるようにした。
格子の再分割を実現し、境界適合格子の領域を自由に制御するとともに、物体形状の再現性も向上させた。
格子全体の楕円形方程式でスムージングすることで格子全体の質を向上させた。
レイノルズ 1000 で、2次元円柱について解析を行い、良い結果が得られた。

参考文献

- 1) J.J. Quirk, An alternative to unstructured grids for computing gas dynamics flows around arbitrarily complex tow-dimensional bodies, *Comput. fluids*, 23-1 (1994), pp125-142
- 2) M. J. Aftosmis, M. J. Berger, Y. Liu, T. H. Pulliam, Automatic Hybrid-Cartesian grid generation for high-Reynolds number flows around complex geometries, *AIAA 99-0777* (1999)

- 3) 朴炳湖, 黒田成昭, 非圧縮粘性流れの直交格子解法, *ながれ*, 19-1 (2000), pp37-46
- 4) 市川治, 藤井孝蔵, 直交格子を利用して任意形状物体まわりの流れを解く場合の境界処理, 第13回数値流体シンポジウム, (2000), pp250
- 5) M.J. Berger and P. Colella, Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics, *J. comput. phys.*, 82 (1989), pp64-84
- 6) G. Agresar, J.J. Linderman, G. Tryggvanson, K.G. Powell, An adaptive, Cartesian, Front-Tracking method for the motion, deformation and adhesion of circulating cells, *J. comput. phys.*, 143 (1998), pp346-380
- 7) D.K. Clarke, M.D. Salas, H.A. Hassan, Euler calculations for multi-element airfoils using Cartesian grids, *AIAA J.*, 24-3 (1986), pp353-358
- 8) J.Kim, P. Moin, Application of a fractional step method to incompressible Navier-Stokes equations, *J. comput. phys.*, 59 (1985), pp308-323
- 9) S. Mittal, V. Kumar, A. Raghuvanshi, Unsteady Incompressible Flows Past Two Cylinders In Tandem and Staggered Arrangement, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 25 (1997), pp1315-1344