

低アスペクト比三次元円柱に発生する非対称流れに関する数値解析

Numerical Analysis on Asymmetric Flow around a Three-Dimensional
Low Aspect Ratio Cylinder

手塚亜聖, 東大院工学系, 〒113-8656 文京区本郷 7-3-1, Email: asej@sonic.t.u-tokyo.ac.jp

川崎智秀, 東大院工学系, 〒113-8656 文京区本郷 7-3-1, Email: kawasaki@sonic.t.u-tokyo.ac.jp

鈴木宏二郎, 東京大学新領域, 〒113-0033 文京区本郷 7-3-1, Email: suzuki@sonic.t.u-tokyo.ac.jp

Asei TEZUKA, Grad. Sch. of Eng., The Univ. of Tokyo, Bunkyo, Tokyo 113-8656, JAPAN

Tomohide KAWASAKI, Grad. Sch. of Eng., The Univ. of Tokyo, Bunkyo, Tokyo 113-8656, JAPAN

Kojiro SUZUKI, Grad. Sch. of Frontier Sci., The Univ. of Tokyo, Bunkyo, Tokyo 113-0033, JAPAN

The three-dimensional transition mode from a steady symmetric flow to a steady asymmetric flow was numerically studied by the global stability analysis. The analysis code is validated by solving the flow around a sphere and comparing the results with those of other numerical studies. In the case of a sphere, the steady asymmetric flow pattern appears in a narrow range of the Reynolds number. Such phenomena are also observed in the flow around a low aspect ratio cylinder.

1. はじめに

レイノルズ数が 210 ~ 270 の範囲で、球周りの流れ場が定常非軸対称の流れ場になることは、よく知られている。ある流れ場が安定であるということは、何らかの擾乱が発生した場合でもその擾乱が減衰することである。よって、流れの解の全格子点で速度の擾乱を与え、それらの擾乱の成長/減衰を数値的に計算することで、流れ場全体の安定性(全体安定性)を調べることができる。千葉⁽¹⁾は数値計算スキームの安定性解析法である Eriksson⁽²⁾の方法を流れの物理的安定解析に適用し、臨界レイノルズ数を数値的に求め、妥当な結果を得ている。そこで、千葉の方法を用い、球周りの流れ場が定常非軸対称で安定するレイノルズ数の前後で安定性解析を行ったところ、他の安定性解析法で計算した結果⁽³⁾とほぼ一致する擾乱モードが得られた。本研究において、低アスペクト比円柱周りの流れを数値解析した結果、レイノルズ数が 210 ~ 270 の範囲で、定常非軸対称の流れが形成されることがわかった。そこで、球周りの結果と、低アスペクト比円柱周りの結果を比較し、定常で非対称な流れが安定するメカニズムを探る。

2. 全体安定性解析方法

全体安定性の解析方法として、ここでは千葉⁽¹⁾の方法を用いた。この方法による安定性解析の概略を以下に述べる。離散化された非圧縮の Navier-Stokes 式は、

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

の形に書くことができる。 \mathbf{u} は速度の解の全自由度を表し、速度ベクトルの全成分を全格子点で列挙したベクトルになる。格子点の点数が N 個で、3次元流れの場合、 \mathbf{u} は $3N$ 個の成分を持つ。

なお、圧力はポアソン方程式により速度場から決まるため、陽には出てこない。いま、定常解 \mathbf{u}_0 が得られたとする。この定常解 \mathbf{u}_0 に対する微小擾乱を $\tilde{\mathbf{u}}$ と書くことにする。定常解の周りで Taylor 展開を行うと、以下ようになる。

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}^2} \tilde{\mathbf{u}}^2 + O(\tilde{\mathbf{u}}^3) \quad (2)$$

擾乱を含んだ解を初期値として Navier-Stokes を解く場合、(1) 式に代入すると、

$$\partial(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) / \partial t = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}) \quad (3)$$

となる。(1) ~ (3) 式を変形し、線形近似を行う。すなわち、 $\tilde{\mathbf{u}}$ の 2 乗以降の項を切り捨てる。線形化された方程式は

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}_0)}{\partial \mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4)$$

となる。ただし、 $\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) / \partial \mathbf{u}$ は行列である。この行列を A と

書くならば、 $\partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial t = A \tilde{\mathbf{u}}$ の固有値問題を解くことで、流れ場全体の安定性を調べることができる。なぜならば、 A の固有ベクトル \mathbf{j} で与えられる擾乱を流れに与えたとする。 \mathbf{j} の固有値が I で、 $\partial \mathbf{j} / \partial t = I \mathbf{j}$ の関係を満たすことを考えると、 $\tilde{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{j}$ の擾乱が、ある時間 T 後に $\tilde{\mathbf{u}}(T) = \exp(IT) \mathbf{j}$ となる。固有値 I の実部の正負から、擾乱の発展/減衰がわかり、虚部から振動数がわかる。つまり、 A の固有ベクトル \mathbf{j} は、流れ場の規準モードを示すことがわかる。固有値解析から求めた流れ場のモードのうち、固有値実部が最も大きいモードが、一番不安定なモードと言える。また、固有値虚部がゼロに近いモードは、ほとんど振動しないモードと言える。

(4) の固有値問題を解くことで、全体安定性の評価ができるが、 \mathbf{u} が $3N$ 個の成分を持つベクトルであることを考えると、 A は $3N \times 3N$ の行列になる。これは、かなり大規模な固有値問題であり、計算時間が莫大になることが容易に想像できる。流れの安定性に影響を与えるモードは固有値実部の大きいモードである。固有値実部の大きいモードが効率よく求まるような近似固有値計算法を使用することを考える。そこで Arnoldi 法を適用し次数の低下した固有値問題に近似することで計算効率を向上させる。ここでは、次のベクトル群 $K_M = \text{span}\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_M\}$ が張る、Krylov 部分空間 K_M に含まれるベクトルの和で固有ベクトルが近似できると考える。 \mathbf{z}_1 は、近似行列計算の初期ベクトルであり、適当な乱数で与えればよい。これにより、 $N \times N$ の行列 A の代わりに後述する $M \times M$ ($M \ll N$) の行列 H の固有値解析から、近似固有値、近似固有ベクトルを求めることができる。

まず、 K_M の正規直交基底ベクトル \mathbf{z}_i ($1 \leq i \leq M$) を求める必要がある。 \mathbf{z}_1 は規格化された初期ベクトルである。

$A \mathbf{z}_1 = (\mathbf{f}' / \mathbf{u}) \mathbf{z}_1$ を求める代わりに、(4) 式を時間積分した(5)式を用い、 $\exp(AT)$ の行列の固有値問題を解く。

$$\tilde{\mathbf{u}}(t_0 + T) = \exp(AT) \tilde{\mathbf{u}}(t_0) = B \tilde{\mathbf{u}}(t_0) \quad (5)$$

まず、 $\exp(AT) \mathbf{z}_1$ を計算する。ある時刻 t_0 での流れ場の定常解を \mathbf{u}_0 とする。 $\mathbf{u}_0 + \mathbf{e} \mathbf{z}_1$ 、 $\mathbf{u}_0 - \mathbf{e} \mathbf{z}_1$ を初期値として、時間 T だけ計算した結果を \mathbf{u}_{1+} 、 \mathbf{u}_1 と表記するならば、(6) の関係から、 $\exp(AT) \mathbf{z}_1$ が求まる。

$$\exp(AT) \mathbf{z}_1 = (\mathbf{u}_{1+} - \mathbf{u}_1) / 2\mathbf{e} \quad (6)$$

次に、 \mathbf{z}_1 と \mathbf{z}_2 が $\exp(AT) \mathbf{z}_1$ の正規直交基底ベクトルとなるように \mathbf{z}_2 を決める。同様に、 $\exp(AT) \mathbf{z}_i$ が求められ、 $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}$ が $\exp(AT) \mathbf{z}_i$ の正規直交基底ベクトルとなることから \mathbf{z}_{i+1} が決まる。この操作を M 回繰り返す。部分空間 K_M と計算空間全体の対応を示す行列 H の要素は、 $\exp(AT) \mathbf{z}_i$ を正規直交基底系

で表した場合の係数から求まる。例えば、 $\exp(AT)z_k$ は、 z_1, \dots, z_k, z_{k+1} の線形結合で(7)のように表すことができる。

$$\exp(AT)z_k = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_{k+1} z_{k+1} \quad (7)$$

このときの、係数 c_i が H の i 行 k 列の成分 $h_{i,k}$ となる。 H の固有値、固有ベクトルは、 $M \times M$ と次元が小さいため、容易に求めることができる。 $\exp(AT)$ の近似固有値は、 H の固有値と一致し、 H の固有ベクトルの各要素を $j_i^{(H)}$ と表記するならば、

$$\exp(AT) \text{の近似固有ベクトルは、} \sum_{i=1}^M j_i^{(H)} z_i \text{ となる。}$$

A の固有値、固有ベクトルは $\exp(AT)$ の固有値、固有ベクトルから求める。 A の固有ベクトルは $\exp(AT)$ の固有ベクトルと一致し、 A の固有値を $\lambda_i^{(A)}$ 、 $\exp(AT)$ の固有値を $\lambda_i^{(B)}$ と表記するならば、 $\lambda_i^{(B)} = \exp(\lambda_i^{(A)} T)$ の関係になる。 A の近似固有ベクトルは擾乱のモードを表す。固有値の実部からそのモードの安定性がわかり、虚部から振動の周期がわかる。本解析の詳細については文献⁽¹⁾を参照されたい。

流れ場の数値解析方法は MAC 法⁽⁴⁾を用いた。圧力のポアソン方程式は SOR 法で解いた。時間積分は 4 段階ルンゲクッタ法、対流項は 3 次精度風上差分を用いた。境界条件は、物体周りでは粘着条件、外側境界では、後流側で流出条件、流入側で一様流の仮定をした。0 形格子を用い、外部境界の半径は物体の直径の約 50 倍ある。格子数は、2 次元円柱周りでは、放射方向 82、周方向 120 とした。球周りの計算では、放射方向 51、経度方向 41、緯度方向 51 とした。3 次元低アスペクト比円柱の計算では、流れが軸に平行の場合、放射方向 41、経度方向 31、緯度方向 41 とし、流れが軸に平行の場合、放射方向 41、経度方向 51、緯度方向 41 とした。レイノルズ数の代表長さは直径とし、3 次元円柱の軸方向長さは直径の 0.5 倍とした。

3. 結果とその考察

3.1 2次元円柱周り流れ

2次元円柱流れでは、臨界レイノルズ数 46 付近で、定常流れから非定常の流れに遷移する。Re=40 では流れは定常であり、その流線を Fig.1 に示す。この流れ場に関して固有値解析を行った結果、最も不安定なモード(固有値実部が最大)は Fig.2 のようになった。Fig.1 の流れに、Fig.2 のような擾乱が加わった場合は、減衰率が小さいため減衰しにくい。流れ場のレイノルズ数を上げると、Fig.2 のモードの固有値実部は大きくなり、その値が正となるとときに、遷移がおこる。その時のレイノルズ数が非定常流への臨界レイノルズ数になる。

近似固有値解析から求まる固有値を列挙する(Fig.3)。固有値実部が大きいモードは、固有値虚部が 0.7 付近と、0 付近にあることがわかる。固有値虚部が 0 に近いモードの 1 つを図示すると Fig.4 のようになる。(5)式の積分時間 T が小さいため、固有値虚部の値は 0 から少しずつれている。固有値虚部が 0 ということは、振動しないモードである。円柱の上下で擾乱速度の向きが反転しており、後述する球周りの非振動非軸対称のモードに類似している。しかし、2次元円柱流れの場合、Fig.4 のモードは固有値実部が負のため、いずれ減衰してしまう。そのため、非定常流への遷移に関しては、固有値実部が最大となる、Fig.2 のモードが支配的であり、Fig.4 のモードを流れ場の解から観測することは難しい。

3.2 3次元球周り流れ

球周りの流れでは、レイノルズ数が 210 を超えると、軸対称性が崩れることが知られている。そこで、Re=200 における流れ場の様子を Fig.5 に示す。Re=200 では、確かに軸対称の流れになっており、球の軸を通るどのような断面をとっても、Fig.5 と同様な流れ場になる。今回の計算では Re~230 で非対称な流れに遷移した。一般に、粗い格子よりも細かい格子

の方が臨界レイノルズ数が低くなる傾向があり、今回の計算でも、格子の粗さの影響と思われる。しかし、モードのパターンは論文⁽³⁾⁽⁵⁾、とも一致しており、流れ場の構造についての定性的な議論を行うには十分な精度を有していると考えられる。以下、この結果を用いて議論を行う。

臨界レイノルズ数付近の流れの解に対して、全体安定性解析を行い、軸対称性を崩す擾乱速度のモードを抽出する(Fig.6)。このモードには、擾乱ベクトルが断面に平行な成分のみになる面(Fig.6a)や、擾乱ベクトルが断面に垂直な成分のみになる面(Fig.6b)がある。どちらの面も球の軸を通り、お互いに直交する。臨界レイノルズ数を越えた流れでは、この図のような擾乱が減衰しないため軸対称性が崩れる。また、このモードの振動数を示す固有値虚部の値はゼロとなり、このモードが振動しないモードだとわかる。

論文⁽³⁾⁽⁵⁾では、球の軸周り角度(方位角)で調和(harmonics)する条件の下に固有値解析を行っている。今回の計算結果では、そのような条件を課していないが、方位角による調和の様子を調べるためにフーリエ変換したところ、方位角が $2p$ で一周期になるモードが卓越した。この結果は、他の論文と一致しているといえる。

Fig.7 は、Re=250 での流線の、一断面をとったものである。この図より流れ場が非軸対称になっていることがわかる。図 Fig.7 の面に垂直な面で切ると、流線は、Fig.5 のような上下対称の形になる。このことから、Fig.7 の面に関して流れは対称になっていることがわかる。さらにレイノルズ数を上げていくと、定常な流れから振動する流れになる。

2次元円柱周りの流れでは、定常で対称な流れから、定常非対称の流れを経由しないで、振動する流れに遷移するのに対し、3次元球周りの流れでは、定常で軸対称な流れから、振動する流れに遷移する前に、定常で非軸対称な流れに遷移することである。この現象を、これまでに述べた固有値解析の結果を用いて説明する。2次元円柱周りの流れ場では、非振動非対称のモードは、振動するモードに比べて減衰が大きいものに対し、3次元球周りの流れ場では、非振動非軸対称のモードは、振動するモードより減衰が弱い。よって、レイノルズ数の増加より、非振動非軸対称のモードに対する固有値実部が、まず、正となり、流れが非定常になる前に、定常で非軸対称での流れが実現される。

3.3 低アスペクト比三次元円柱の非振動非軸対称モード

低アスペクト比円柱の場合、円柱の軸方向に流れを当てる場合と、円柱の軸に垂直に流れを当てる場合が考えられる(Fig.8)。(a)の場合 Re~190、(b)の場合 Re~320 のレイノルズ数で定常非対称な流れ場が観測される。そこで、全体安定性解析を用い、非対称な流れに遷移するモードを抽出した。

(a)の場合の結果を Fig.9 に示す。論文⁽³⁾では、円形平板の安定性解析を行っているが、低アスペクト比円柱は円形平板の厚みが大きいものと考えられることができる。低アスペクト比円柱のモードのパターンは円形平板とほぼ一致した。低アスペクト比円柱の臨界レイノルズ数は球周りに比べると小さい。静止している流体の中に物体を動かす場合、抵抗に相当するエネルギーを流れに与えることになる。その分のエネルギーは流れの粘性により散逸することになる。球の場合ではレイノルズ数を 1 から大きくしていくことで、後流の再循環領域は大きくなる。レイノルズ数が大きくなるということは、流れの粘性が小さくなることである。再循環領域を大きくすることで、流れはエネルギーの散逸を大きくする。しかし、再循環領域はいくらでも大きくなるわけではない。ある程度、再循環領域は大きくなると不安定になる。2次元円柱の場合は、振動をはじめ、球周り流れの場合は、非対称な形状で安定する。円形平板の場合、再循環領域は球に比べて大きい

め、球よりも低いレイノルズ数で非対称な形状になる。そのため、(a)の形状では臨界レイノルズ数が球周りに比べると小さくなったと思われる。

(b)の場合において、円柱の軸に垂直な面と、円柱の軸を含む面での擾乱速度ベクトル場を Fig. 10 に示す。円柱後流に渦状の擾乱速度が存在するという特徴は、球周りの場合及び Fig. 8a の場合と共通している。結局、定常非軸対称流れを作るメカニズムは、球周りと低アスペクト比円柱では同じであるといえる。そこで、3次元球周りのモードと2次元円柱周りのモードを比較し、定常非対称流れが観測される理由を考える。

3.4 非振動非対称モードの考察

球周りの流れでは、後流の再循環領域は Fig. 11a のようになっている。再循環領域の渦を考えた場合、Fig. 11b のように渦が閉じた状態である。2次元の円柱の場合は、軸方向に無限遠もしくは壁面まで渦が伸びている。それぞれの渦は交わることはなく、独立している。3次元の円柱の場合は、後流の渦は球と同様に閉じている。ここに2次元流と3次元流の大きな違いが見られる。

3次元円柱が振動を始めるレイノルズ数は、2次元円柱よりも高い。円柱後方の双子渦の渦線が閉じるため、高いレイノルズ数でも安定であると思われる。そこで、非対称への遷移モードも、渦線が閉じた構造になっていると予想される。そこで、擾乱速度の回転(rotation)を計算し擾乱渦度を求め、その渦線を書いてみる(Fig. 13)。2次元円柱の場合、渦線は円柱軸と平行に無限遠まで伸びるが、Fig. 13 では各渦線が輪を作り閉じた形状になっている。この違いが、非対称で安定な流れになるか否かを決めていると思われる。

4. まとめ

- 非圧縮3次元流れの全体安定性解析コードを作成し、球周りの流れ場について軸対称性が崩れるモードを明らかにした。
- 2次元円柱の場合でも、安定性解析で求まるモードの中には非振動非対称のモードがあるが、減衰が大きいため実際の流れでは観測できない。
- 3次元低アスペクト比円柱周りの流れ場でも、球周りと同様に定常非対称の流れが観測される。
- 2次元円柱周りの非振動非対称モードと、3次元流れの非振動非軸対称モードと比較した。その結果、3次元流では、擾乱速度に対する渦線が閉じて輪を作り、2次元流にはない構造をもつことがわかった。

参考文献

- (1) 千葉賢、非圧縮性粘性流体の全体安定性の数値的研究、(博士論文) 1997
- (2) Eriksson L.E. & Rizzi A., Computer-Aided Analysis of the Convergence to Steady-State of Discrete Approximations to the Euler Equations, J. Comput. Phys. 57 (1985), 90-128
- (3) Natarajan, R. & Acrivos, A., The instability of the steady flow past spheres and disks. J. Fluid Mech. 254 (1993), 323-344.
- (4) Harlow, F.H. & Welch, J.E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Phys. Fluids, 8 (1965), 2182-2189.
- (5) Ghidersa, B. & Dusek, J., Breaking of axisymmetry and onset of unsteadiness in the wake of a sphere, J. Fluid Mech. 423 (2000), 33-69.

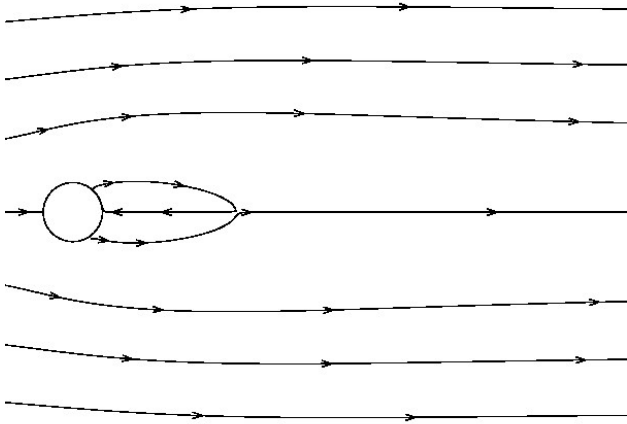


Fig. 1: 2次元円柱周り流れ (Re=40)

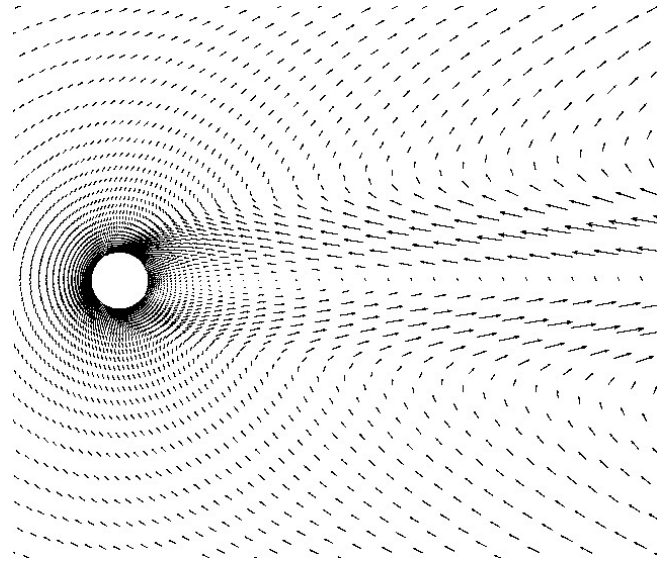


Fig. 4: 2次元円柱周り非定常振動を誘起しないモード

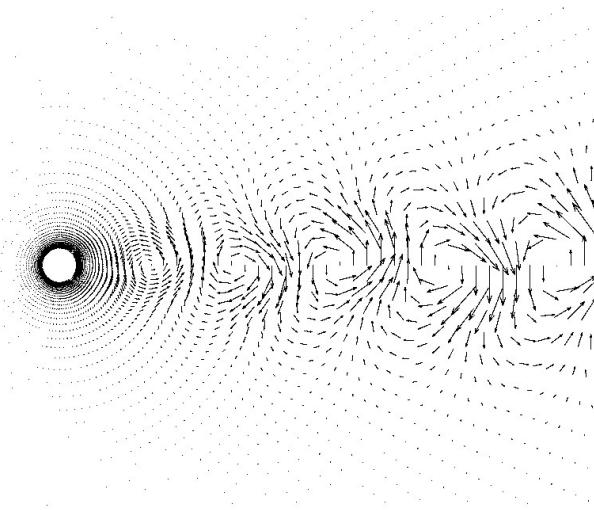


Fig. 2: 2次元円柱周りの非定常流れを誘起するモード

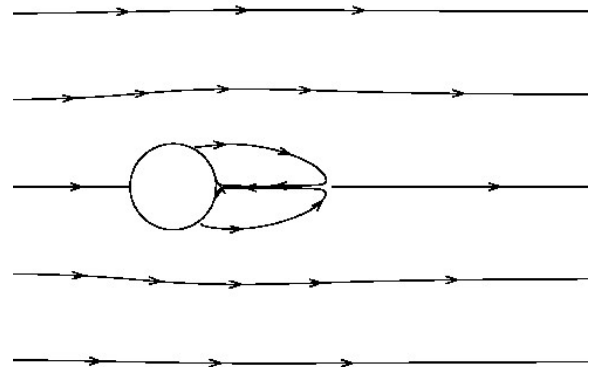


Fig. 5: 3次元球周り流れ (Re=200)

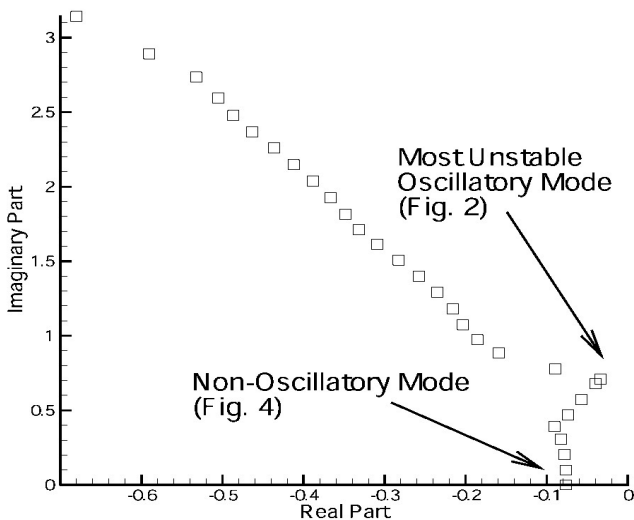


Fig. 3: 2次元円柱固有値実部と虚部の関係(Re=40)

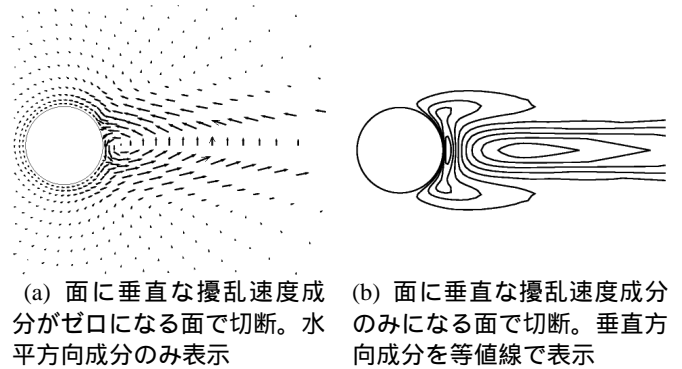


Fig. 6: 球周りが非軸対称に遷移するモード

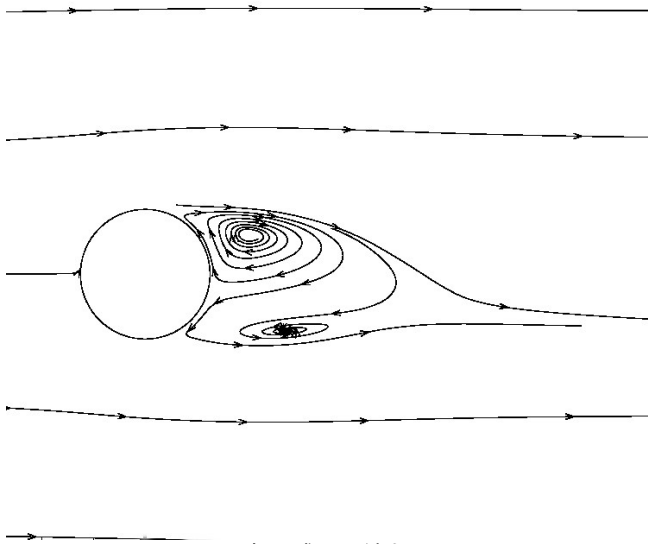
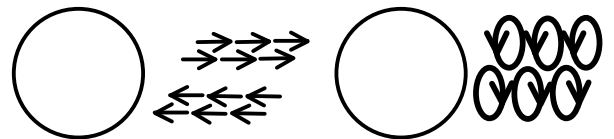


Fig. 7: 3次元球周り流れ (Re=250)



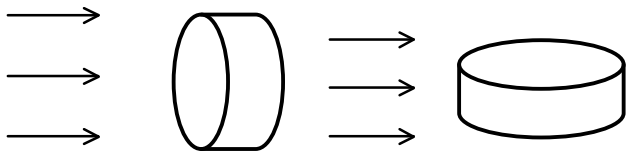
(a) 球後流の速度の模式図 (b) 球後流の渦度の模式図

Fig. 11 球周り流れの速度と渦度の関係



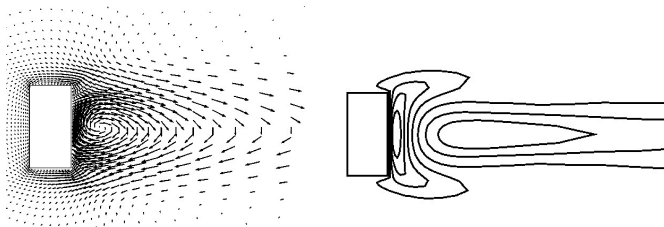
(a) 擾乱速度の模式図 (b) 擾乱渦度の模式図

Fig. 12 球周り流れの擾乱速度と擾乱渦度の関係



(a) 流れが軸と平行 (b) 流れが軸と垂直

Fig. 8: 3次元低アスペクト比円柱の配置について



(a) 面に垂直な擾乱速度成分がゼロになる面で切断。水平方向成分のみ表示
(b) 面に垂直な擾乱速度成分のみになる面で切断。垂直方向成分を等値線で表示

Fig. 9: Fig.8(a)の流れが非軸対称に遷移するモード

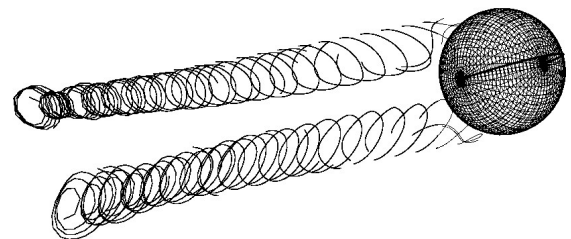
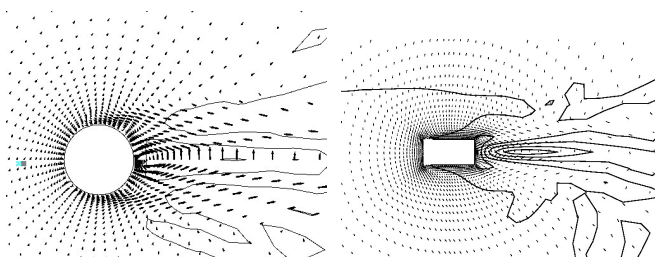


Fig. 13: 球周り流れの擾乱渦糸



(a) 円柱の軸に垂直な面で切断。面に垂直な成分は等値線で表示
(b) 円柱の軸を含む面で切断。面に垂直な成分は等値線で表示

Fig. 10: Fig.8(b)の流れが非軸対称に遷移するモード