

ベクトル有限要素法による液体金属流れ解析

Numerical analysis of the flow in the liquid metal by the vector finite element method

松本昌昭, 三菱総研, 〒100-8141 千代田区大手町 2-3-6, E-mail:matsumot@mri.co.jp

棚橋隆彦, 慶大理工, 〒223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail:taka@mech.keio.ac.jp

Masaaki Matsumoto, Mitsubishi Research Institute, INC. 2-3-6, Otemachi Chiyodaku Tokyo Japan

Takahiko Tanahashi, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi Kouhokoku Yokohamashi Kanagawa Japan

New vector finite element method for solving induction equations is proposed. Vector finite element method is one of popular algorithms in the electro-magnetic field analysis. Two types interpolation functions for vector finite element method are defined. One is facet shape function and another is edge shape function. Facet function satisfies normal continuity and tangential discontinuity at the face of arbitrary elements. Edge shape function satisfies tangential continuity and normal discontinuity at the edge of arbitrary elements. Induction equations are divided into two phases, magnetic phase and electric phase. Magnetic phase is solved by Facet vector finite element method and electric phase is solved by edge vector finite element method. Lorentz forces which are one of the terms of the Navier-Stokes equations are calculated at the center of the elements because magnetic flux density is defined at the face center of the element. Flow between parallel plates is analyzed with several Hartmann number Ha and the numerical results and the theoretical results of the velocity profiles are good agreement with each other.

1. はじめに

(1) 背景

流体場や温度場を支配する Navier-Stokes 方程式やエネルギー方程式は保存則の一種である。これらは Reynolds の輸送定理から導くことができる。これらの本質は検査体積に対する体積分の実質時間微分にありその数値的解法として有限要素法や有限体積法が発達してきた。一方, Reynolds の輸送定理に対して検査面積に対する面積分の実質時間微分を考えた流束の輸送定理がある。この物理的意味は流束の面積分の実質時間微分に関することを述べたものであると考えられる。Reynolds の輸送定理で代表される検査体積の体積分の実質時間微分から得られる方程式の数値解析手法である有限体積法や有限要素法に比較して検査面積の実質時間微分をあらかず流束の輸送定理に基づいた解析アルゴリズムは少ない。ベクトル有限要素法はその解析手法の一例であると考えられる。

近年, 電磁場解析の分野において, 従来の有限要素法を用いるのではなく, ベクトル有限要素法を用いた解析例が増えてきた。ベクトル有限要素法は従来の有限要素法に比較して自由度が減るという利点があり, そのために解析時間の低減化も図られる特徴を有している。また, 電磁波解析における FDTD (Finite Difference Time Domain) 法⁽¹⁾は差分法の利用した手法で, この手法を任意形状へ拡張したものがベクトル有限要素法であると考えられる。ベクトル有限要素法はベクトル形状関数を用いてベクトル量が補間される。ベクトル形状関数には面ベクトル形状関数および辺ベクトル形状関数がある。それぞれの概念図を Fig. 1 に示す。Fig. 1 中の (a) は面ベクトル形状関数 F_a , (b) は辺ベクトル形状関数 E_a を表す。

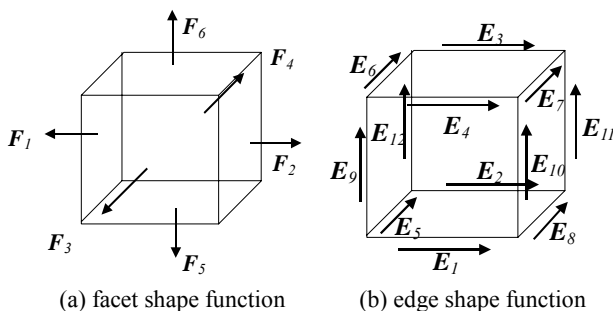


Fig. 1 vector shape function

図を見てわかるように面ベクトル形状関数は面で値をもち, 辺ベクトル形状関数は辺上で値を持つ。FDTD 法が電場および磁場を計算するための半格子分だけずれた座標系をそれぞれひとつづつ持っているのに対してベクトル有限要素法は面ベクトル形状関数および辺ベクトル形状関数によって補間される二つの空間を考慮する。それぞれの形状関数の特徴として, 従来の節点ベースの形状関数と同様に, 着目している位置での値が 1 となり, その他では 0 となる性質を有している。面ベクトル形状関数は面での法線方向の連続性を満足し, 接線方向の任意性を有している。一方, 辺ベクトル形状関数は辺での接線方向の連続性を満足し, 法線方向の任意性を有する性質がある。

流体場における支配方程式である Navier-Stokes 方程式は非圧縮性を仮定した場合, 連続の条件を満たすように時間進行が行われる。一方, 電磁場を支配する誘導方程式においても流体場と同様の性質があり, ソレノイダル条件を満たすように時間進行する必要がある。電磁流体解析における過去の解析手法には, A 法⁽²⁾, B 法⁽³⁾, 法⁽⁴⁾などさまざまな手法がある。これらの手法は磁場のソレノイダル性を満足するために, 反復計算を必要としている。一方, 電磁波解析では磁場のソレノイダル性を満足するための計算では反復計算等必要とせず, 変数配置をうまくとり, 自動的にソレノイダル条件が満足されるように計算される。この手法を任意形状に拡張した方法がベクトル有限要素法⁽⁵⁾である。

ここでは, 磁場の支配方程式である誘導方程式に対してベクトル有限要素法を用いた定式化および離散化の提案を行い, 平行平板間内に磁場を印加した場合の液体金属の挙動解析を行い, 解析スキームの有効性を調べることを目的とする。

2. ベクトル形状関数

ここではベクトル形状関数の定義およびその性質を述べる。ベクトル形状関数は一般的に任意形状に対するの表示形式を考えることができる。ここでは六面体形状に対するベクトル形状関数に関して記述する。ベクトル形状関数は面ベクトル形状関数と辺ベクトル形状関数の二種類がある。任意の六面体形状に対しての面ベクトル形状関数は以下のように記述できる。

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{1}{8}(1-\zeta)\nabla\eta\times\nabla\zeta, & F_2 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)\nabla\eta\times\nabla\zeta \\
F_3 &= -\frac{1}{8}(1-\eta)\nabla\zeta\times\nabla\zeta, & F_4 &= \frac{1}{8}(1+\eta)\nabla\zeta\times\nabla\zeta \\
F_5 &= -\frac{1}{8}(1-\zeta)\nabla\zeta\times\nabla\eta, & F_6 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)\nabla\zeta\times\nabla\eta
\end{aligned} \quad (1)$$

また、任意の六面体形状に対する辺ベクトル形状関数は以下のように記述できる。

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)\nabla\xi, & E_2 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)\nabla\xi \\
E_3 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)\nabla\xi, & E_4 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)\nabla\xi \\
E_5 &= \frac{1}{8}(1-\zeta)(1-\xi)\nabla\eta, & E_6 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)(1-\xi)\nabla\eta \\
E_7 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)(1+\xi)\nabla\eta, & E_8 &= \frac{1}{8}(1-\zeta)(1+\xi)\nabla\eta \\
E_9 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)\nabla\zeta, & E_{10} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)\nabla\zeta \\
E_{11} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)\nabla\zeta, & E_{12} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)\nabla\zeta
\end{aligned} \quad (2)$$

ベクトル有限要素法の最も大きな特徴はその連続性である。つまり、面ベクトル形状関数 F_a および辺ベクトル形状関数 E_a に対して以下のような性質がある。

$$\iint F_a \cdot \mathbf{n}_b dS = \delta_{ab} \quad (3)$$

$$\int E_a \cdot \mathbf{t}_b dl = \delta_{ab} \quad (4)$$

\mathbf{n} , \mathbf{t} はそれぞれ着目した面における外向き単位法線ベクトル、着目した辺の単位接線ベクトルを表す。また、 δ_{ab} はクロネッカーのデルタを表し、以下の関係を満足する。

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{if } a=b \\ 0 & \text{if } a \neq b \end{cases} \quad (5)$$

また、他の性質として、以下を挙げておく。これは後の誘導方程式の離散化時に用いる関係である。

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_3, & \nabla \times \mathbf{E}_2 &= +\mathbf{F}_5 - \mathbf{F}_4 \\
\nabla \times \mathbf{E}_3 &= -\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_4, & \nabla \times \mathbf{E}_4 &= +\mathbf{F}_6 - \mathbf{F}_3 \\
\nabla \times \mathbf{E}_5 &= -\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_5, & \nabla \times \mathbf{E}_6 &= +\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_6 \\
\nabla \times \mathbf{E}_7 &= -\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_6, & \nabla \times \mathbf{E}_8 &= +\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_5 \\
\nabla \times \mathbf{E}_9 &= -\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_1, & \nabla \times \mathbf{E}_{10} &= +\mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_2 \\
\nabla \times \mathbf{E}_{11} &= -\mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_2, & \nabla \times \mathbf{E}_{12} &= +\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_1
\end{aligned} \quad (6)$$

3. 支配方程式および離散化

(1) 支配方程式

流体場および電磁場を支配する方程式は連続の式、Navier-Stokes の方程式、磁化不在の法則、誘導方程式の4つである。それぞれの無次元化された支配方程式を以下に示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\text{Ha}}{\text{Re} \cdot \text{Rem}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\text{Rem}} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

ここで、 \mathbf{B} , p , t , \mathbf{v} はそれぞれ磁束密度、圧力、時間、速度を表す。式中にあらわれる無次元パラメータ Ha , Re , Rem はそれぞれハルトマン数、レイノルズ数、磁気レイノルズ数を

表す。式(7)および式(8)に対しては従来の節点ベースの有限要素法、つまり高精度で汎用性のある GSMAC 有限要素法を用いて離散化および解析を行う。

(2) 誘導方程式の離散化

式(10)に示される磁場の誘導方程式はベクトル有限要素法を用いて離散化を行う。以下に式に対する離散化プロセスについて述べる。

まず、誘導方程式を以下に示すように磁場と電場の二つのフェーズに分離する。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\text{Rem}} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (12)$$

ここで、 \mathbf{E} は電場を表す。磁束密度 \mathbf{B} および電場 \mathbf{E} はそれぞれ、面ベクトル形状関数および辺ベクトル形状関数を用いて以下のように補間される。

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}_a b_a \quad (13)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a e_a \quad (14)$$

ここで、補間されるベクトル量が、ベクトル形状関数であるベクトル量とスカラー量の積として表現されていることがベクトル有限要素法の特徴の一つである。スカラー量 b_a および e_a はそれぞれ以下のように定義される。

$$b_a = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (15)$$

$$e_a = \int_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl \quad (16)$$

つまり、 b_a は着目している面での磁束密度 \mathbf{B} の面積分を、 e_a は着目している辺における電場 \mathbf{E} の線積分を表す。 l , S はそれぞれ着目している辺、着目している面を表す。速度場とあわせて電磁場の変数の位置関係を示した図を Fig. 2 に示す。速度場において圧力が要素中心、速度ベクトルが節点上に配置されているのに対して、電磁場では磁束密度が面上、電場が辺上に配置されている。速度場の圧力と速度ベクトルを互いに半格子分ずらすことによって計算が安定するのに対して、電磁場においても同様の考え方が成り立つといえ、磁場と電場の変数配置をずらすことで物理的に妥当な計算が可能になるといえる。

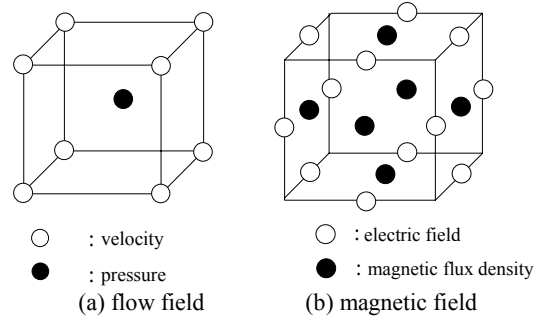


Fig. 2 arrangement of variables in the flow field and the magnetic field

(3) 時間方向の離散化

磁場および電場の各方程式に対して時間方向の離散化を行うと以下の離散化式が得られる。

$$\frac{\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n}{\Delta t} = -\nabla \times \mathbf{E}^n \quad (17)$$

$$\mathbf{E}^n = -\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^n + \frac{1}{\text{Rem}} (\nabla \times \mathbf{B}^n) \quad (18)$$

変数の右肩の添え字が時間方向を表す。最初に式(18)から n 時刻における電場 \mathbf{E} を求め、次に式(17)を用いて $n+1$ ステッ

プの磁場を求める．ここで，速度ベクトル分布はあらかじめ計算しており既に求まっているため， $n+1$ 時刻のものが用いられる．

(4) 空間方向の離散化

磁場および電場の方程式に対して，それぞれ重み関数として面ベクトル形状関数および辺ベクトル形状関数を選択し，内積したのち要素内積分を行う．最初に磁場の式(17)に対する離散化手法を示す．

$$\iiint_{\Omega_e} F_a \cdot \frac{B^{n+1} - B^n}{\Delta t} d\Omega = - \iiint_{\Omega_e} F_a \cdot \nabla \times E^n d\Omega \quad (19)$$

式(19)を整理しまとめると，

$$\iiint_{\Omega_e} F_a \cdot F_b d\Omega \frac{b_b^{n+1} - b_b^n}{\Delta t} = - \iiint_{\Omega_e} F_a \cdot \nabla \times E_b d\Omega e_b^n \quad (20)$$

ここで，上式中，左辺の添え字 b は面に対して，右辺の添え字 b は辺に対して考えているものであり，関連はない．右辺は，式(6)の性質を利用して，以下のように変形できる．

$$\iiint_{\Omega_e} F_a \cdot F_b d\Omega \frac{b_b^{n+1} - b_b^n}{\Delta t} = - \iiint_{\Omega_e} F_a \cdot F_b d\Omega \sum_{c=1}^4 a_{bc} e_c^n \quad (21)$$

ここで， a_{bc} は式(6)に従った単位符号 ± 1 をあらわす．左辺右辺ともに $\iiint_{\Omega_e} F_a \cdot F_b d\Omega$ に対して質量集中化を行うと以下の関係が得られる．

$$\frac{b_b^{n+1} - b_b^n}{\Delta t} = - \sum_{c=1}^4 a_{bc} e_c^n \quad (22)$$

これは左辺が着目した面での磁束密度の面積分量の時間変化をあらわし，右辺が着目した面を取り囲む辺における電場の線積分をあらわしている．これは式(17)を面積分した関係そのものである．例えばFig. 3に示したような場合，

$$\frac{b_1^{n+1} - b_1^n}{\Delta t} = -(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) \quad (23)$$

の関係が成立する．

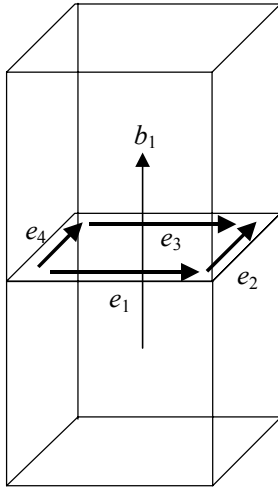


Fig. 3 calculation algorithm of b_1

次に式(18)の離散化を行う．

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot E^n d\Omega = & - \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot (v^{n+1} \times B^n) d\Omega \\ & + \frac{1}{\text{Rem}} \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot (\nabla \times B^n) d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

上式を整理し，まとめると，以下の離散化式が得られる．

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot E_b d\Omega e_b^n = & - \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot (v_e^{n+1} \times F_b) d\Omega b_b^n \\ & + \frac{1}{\text{Rem}} \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot (\nabla \times F_b) d\Omega b_b^n \end{aligned} \quad (25)$$

ここで，ベクトル解析の公式 $\nabla \cdot (a \times b) = b \cdot (\nabla \times a) - a \cdot (\nabla \times b)$ を右辺第二項に適用すると，最終的に次の離散化式が得られる．

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot E_b d\Omega e_b^n = & - \iiint_{\Omega_e} E_a \cdot (v_e^{n+1} \times F_b) d\Omega b_b^n \\ & + \frac{1}{\text{Rem}} \iiint_{\Omega_e} F_b \cdot (\nabla \times E_a) d\Omega b_b^n \end{aligned} \quad (26)$$

ここで，以下の関係を用いた．

$$\iiint_{\Omega_e} \nabla \cdot (E_a \times F_b) d\Omega = \iint_{\Gamma_e} (E_a \times F_b) \cdot nd\Gamma = 0 \quad (27)$$

(5) ソレノイダル条件が満足される理由

ベクトル有限要素法を用いた場合，ソレノイダル条件である磁荷不在の法則は初期条件においてソレノイダル条件が満足されるならば，時間進行に伴いその条件は満足される．これは，以下のように説明される．磁場の計算式を考えた場合，電場 E の回転から磁束密度 B が算出されることを考えると，ある任意の要素における各面での磁束密度の面積分値の時間変化量は着目した面を取り囲む辺の線積分分値として求まる．一方，いま線積分を行った辺は要素を構成する面を二つ共有している．ここで，各辺での線積分の方向は互いに異なり，線積分分値が打ち消しあうために，構成する要素に対するすべての面積分値の変化量の和が0であることを考えると，初期条件でソレノイダル条件を満足している場合，時間進行に伴ってソレノイダル条件が破綻することはない．概念図をFig. 4に示す．

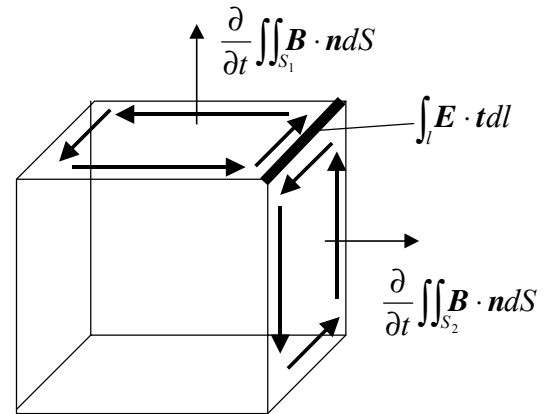


Fig. 4 the reason why solenoidal condition satisfies automatically

(6) ローレンツ力のモデル化

磁場が流体場に与える影響は電流 $j = (v \times B)$ と磁束密度 B の外積として表現されるローレンツ力として表現される．直流の場合，ローレンツ力は式(8)の右辺第三項に示されるように表現される．ローレンツ力を算出するために利用される磁束密度 B は面ベクトル形状関数を用いて面上の面積分値として表現されている．ベクトル有限要素法によって補間される面上の値を用いて表現されるローレンツ力を従来の節点ベースの有限要素法によって評価する方法について以下に述べる．

ローレンツ力を要素平均値として算出することを考えると，以下の離散化式を得る．

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle_e &= \frac{\iint_{\Omega_e} (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} d\Omega}{\Omega_e} \\ &= \frac{\iint_{\Omega_e} (\mathbf{v}_e \times \mathbf{F}_a) \times \mathbf{F}_b d\Omega}{\Omega_e} b_a b_b \end{aligned} \quad (28)$$

要素平均値として評価された形式を用いると，Navier-Stokes 方程式中のローレンツ項に対する従来の有限要素法を用いた離散化式は，以下のように算出される．

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_e} N_a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} d\Omega &= \iint_{\Omega_e} N_a \langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle_e d\Omega \\ &= \langle (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle_e \iint_{\Omega_e} N_a d\Omega \end{aligned} \quad (29)$$

ここで，式中の N_a は従来の節点ベースの有限要素法における形状関数を表し，3次元の六面体要素を考えた場合，

$$N_a = \frac{1}{8} (1 + \zeta_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta) \quad (30)$$

として与えられる．ただし，

$$\begin{aligned} \zeta_a &= -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1 \\ \eta_a &= -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1 \\ \zeta_a &= -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1 \end{aligned} \quad (31)$$

である．

(7) 解析の流れ

解析アルゴリズムを示したフローチャートをFig. 5に示す．

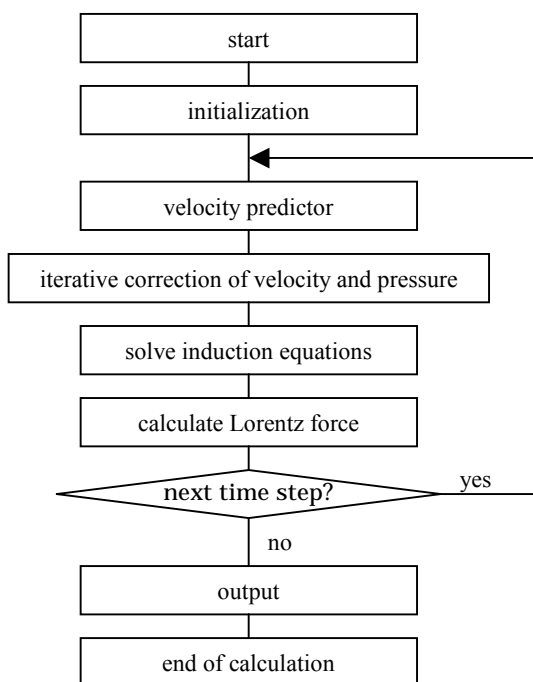


Fig. 5 flow chart of the calculation

4. 解析モデルおよび解析条件

(1) 解析モデルの概要

解析モデルは，並行平板間流れに磁化を垂直に印加したモデルとした．計算モデルをFig. 6に示す．

入口で放物形状を描く速度分布は並行平板に垂直に印加される一定の磁場の影響を受ける．つまりローレンツ力の効果により壁近傍では速度を増加させる方向に，壁から離れた領域では速度を減少させる方向に力が働くことで，速度境界層が薄くなり，ハルトマン流れといわれる分布形状を持った流れに変化する．一方，磁場も誘導磁場として流れ場の影響を受ける．

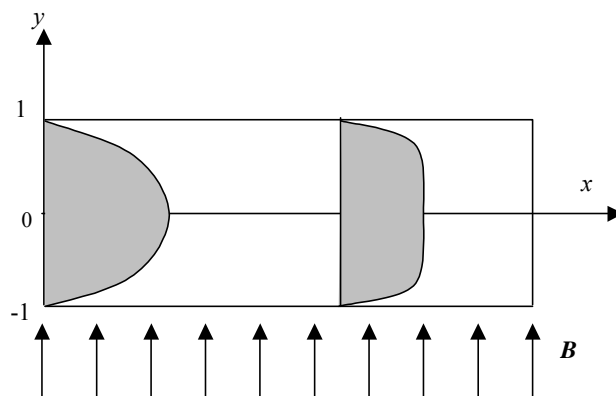


Fig. 6 geometry of parallel plate channel at entrance region with transverse magnetic field and parabolic entrance velocity

(2) 境界条件および初期条件

流入部における境界条件として，速度場に対して x 方向に放物形状を仮定した速度分布，流出部においては圧力一定とした．上下面の並行平板ではすべりなし条件を適用した．磁場および電場の境界条件として，入口および出口においては磁場の境界条件としてソレノイダル条件を満足するように与えた．

初期条件として流体場では全領域において流入部の境界条件と同一の放物形状分布を，電磁場においては全領域で $B_y=1$ を与えた．Fig. 7に初期条件及び境界条件を示した図を示す．

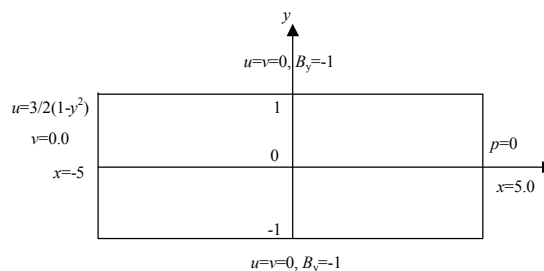


Fig. 7 boundary conditions

(3) 解析条件

レイノルズ数 Re および磁気レイノルズ数 Rem をそれぞれ 10.0 および 1.0 とし，ハルトマン数 Ha をパラメータとして解析を行った．ハルトマン数 Ha は 2.0 から 10.0 までの解析を行った．解析に用いたメッシュ図をFig. 8に示す．解析領域は x 方向が -5 から 5 まで y 方向は -1 から 1 までとした．メッシュ数は 300×40 で境界層を精度よくとらえるように壁側にメッシュを寄せた．流体解析を行うための圧力と速度の同時反復における非圧縮条件の残差は 0.001 とし，最大反復回数は 500 回とした． $t=0.0001$ とし， $t=2.0$ まで解析を行った．

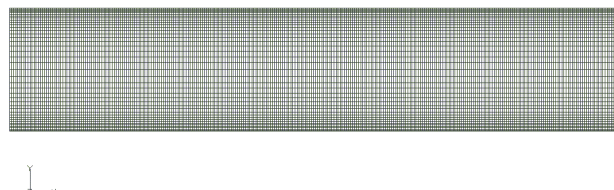


Fig. 8 Computational mesh (300×40)

5. 解析結果および検討

十分定常状態とみなせる $t=2.0$ におけるハルトマン数 Ha の違いによる速度分布の解析結果をFig. 9からFig. 12に示す. ハルトマン数 Ha が小さい場合には流入形状の方物形状からの変化が小さいのに対して, ハルトマン数 Ha が大きくなるにつれて境界層が薄くなり, ハルトマン流れが形成されていくことがわかる. また, ローレンツ力による速度場の変化の影響は流入直後から顕著におっていることがわかる.

磁束密度分布および圧力分布をそれぞれFig. 13から, Fig. 16およびFig. 17からFig. 20に示す. 磁束密度ベクトルはハルトマン数 Ha が小さい場合が x 方向の変化の割合が大きく, ハルトマン数 Ha が大きくなるにしたがい, x 方向の変化の割合が小さくなる. 圧力分布のハルトマン数の違いはほとんどなく, 圧力差が等間隔に分布していることがわかる.

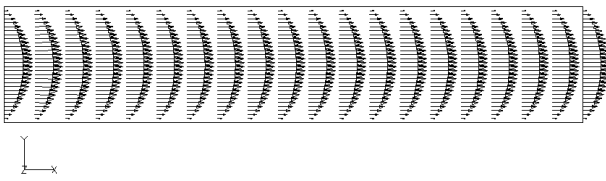


Fig. 9 velocity vectors ($Ha=2.0$)

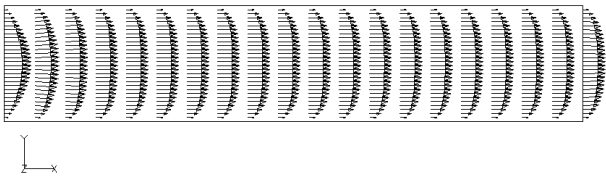


Fig. 10 velocity vectors ($Ha=5.0$)

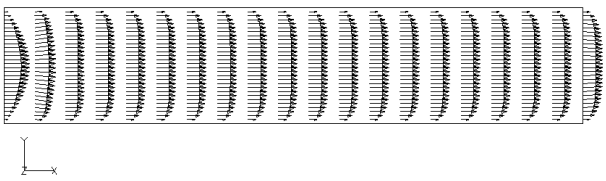


Fig. 11 velocity vectors ($Ha=8.0$)

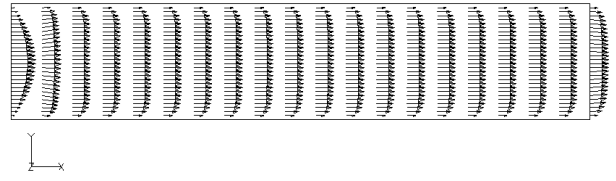


Fig. 12 velocity vectors ($Ha=10.0$)

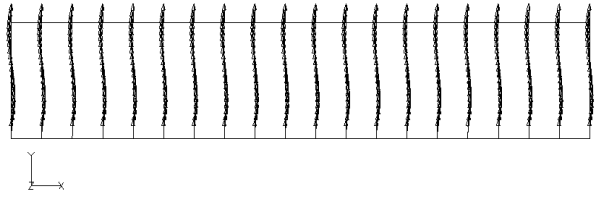


Fig. 13 magnetic flux density vectors ($Ha=2.0$)

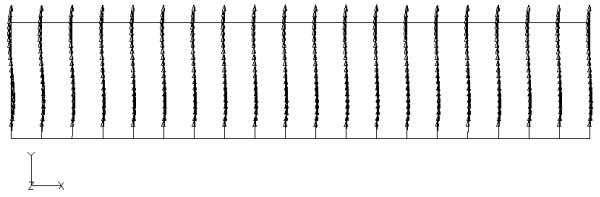


Fig. 14 magnetic flux density vectors ($Ha=5.0$)

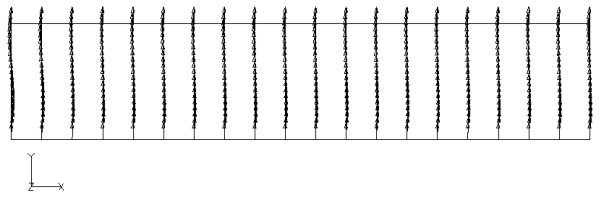


Fig. 15 magnetic flux density vectors ($Ha=8.0$)

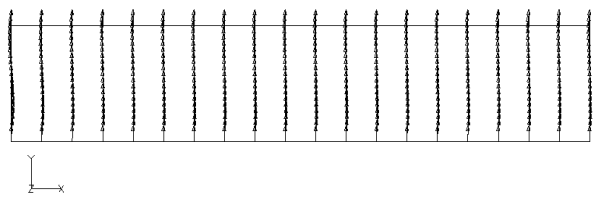


Fig. 16 magnetic flux density vectors ($Ha=10.0$)

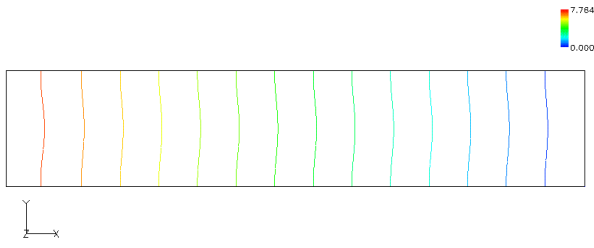


Fig. 17 pressure contours (Ha=2.0)

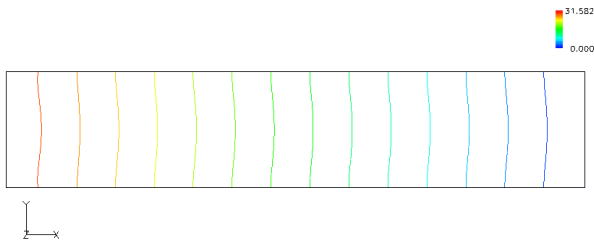


Fig. 18 pressure contours (Ha=5.0)

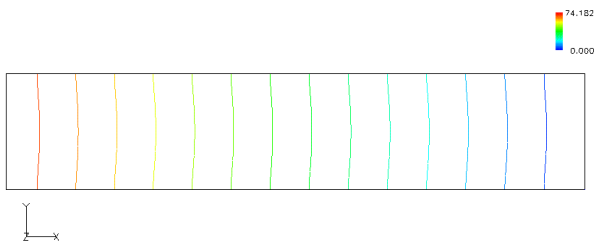


Fig. 19 pressure contours (Ha=8.0)

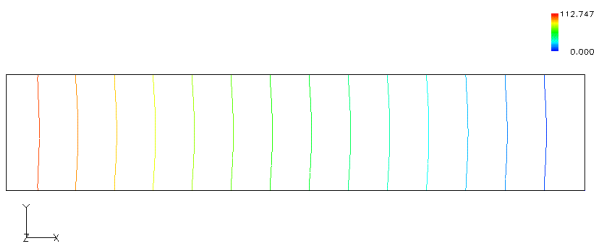


Fig. 20 pressure contours (Ha=10.0)

定量的な評価を行うため、速度分布の厳密解と比較することで検証を行った。Fig. 21に $x=0$ 断面での x 方向速度分布の解析結果と厳密解との比較図を示す。定常状態における x 方向速度分布の厳密解は以下の式で与えられる。

$$u(y) = \frac{Ha}{\tanh Ha - Ha} \left(\frac{\cosh Hay}{\cosh Ha} - 1 \right) \quad (32)$$

解析によって得られた結果と厳密解は良好に一致していることがわかる。これにより、ベクトル有限要素法による誘導方程式の離散化が良好に解析できていることがわかる。

$x=0$ 断面における磁束密度分布の x 方向成分をFig. 22に示す。ハルトマン数の違いによる磁場の分布が理解できる。

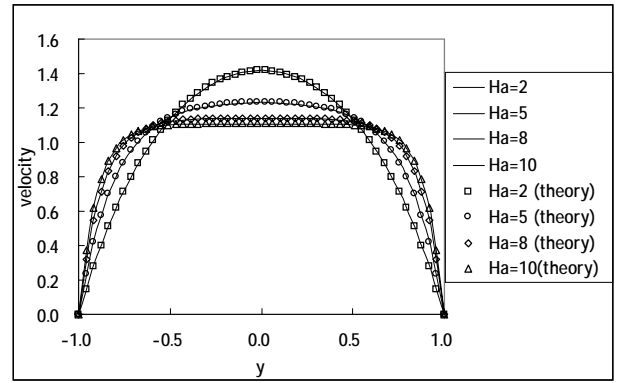


Fig. 21 computational results and the theoretical results of velocity profiles at $x=0.0$

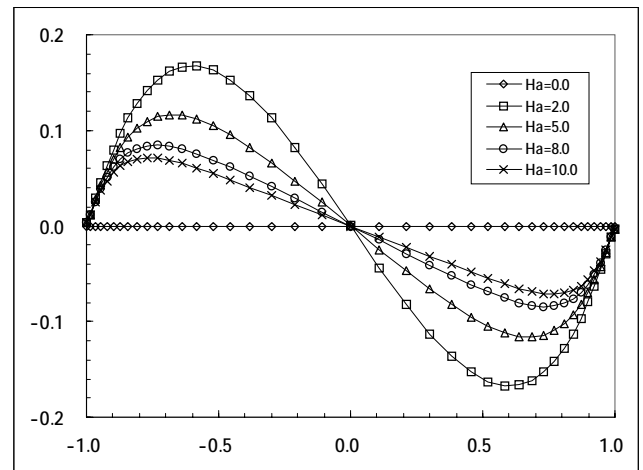


Fig. 22 magnetic flux density profiles of x direction $x=0.0$

6. 結言

本論文における結言を以下に示す。

- (1) 電磁場解析の分野で近年頻りに用いられている手法であるベクトル有限要素法を用いて誘導方程式の離散化手法の提案を行った。
- (2) ベクトル有限要素法を用いて、特に面ベクトル有限要素法の特徴である要素各面の法線方向の連続性を満足する性質を利用して、磁場のソレノイダル性を十分に満足する解法を示すことができた。
- (3) 誘導方程式の解法にベクトル有限要素法を用い、速度場の解法に GSMAC 有限要素法を用いて並行平板間に磁場を印加したハルトマン流れの解析を行った解析結果は速度分布が厳密解と良好に一致することが確認できた。

参考文献

- (1) 宇野亨, 「FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析」, コロナ社, 1998.
- (2) Ozoe, H. and Maruo, E. JSME Int. J., 30-263(1987), pp774
- (3) 沖, 棚橋, “ GSMAC 有限要素法による内部発熱を伴う電磁熱流体の正方形 Cavity 内自然対流解析”, 機論 B, 59-562(1996), pp1835-1842.
- (4) 中井, 棚橋, “ 磁場下における電磁熱流体の立方体 Cavity 内自然対流解析”, 機論 B, 62-602(1996), pp3584-3591.
- (5) Daniel Arther White, Discrete Time Vector Finite Element Methods for Solving Maxwell's Equations on 3D Unstructured Grids, Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-LR-128238