

渦度・流れ関数法によるマイクロポンプ内の流れの数値計算

Numerical simulation of flows in micropump by vorticity-stream function method

藤原昭久, 京工繊大 大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail: aafuzy@hotmail.com

徳永宏, 京工繊大, E-mail: tokunaga@ipc.kit.ac.jp

Akihisa Fujiwara and Hiroshi Tokunaga,

Dept. of Mech. & System Eng., KIT, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8585

The flow in micropump is simulated by vorticity-stream function method and Stokes approximation. The specification of the stream function is difficult on boundaries due to multiply-connected domain, so that the pressure single-valuedness and pressure gradient condition are used. As results, it is found that present method is effective on numerical simulation of flow in micropump.

1 序論

近年コスト、省スペース化などの観点から機械のマイクロ化が注目されている。不況の日本再生のためにも必要とされているベンチャービジネスにおいても、IT、バイオ、環境と同様にナノテクノロジー、マイクロテクノロジーは非常に期待されている分野でもある。本研究ではマイクロ化の観点から、特に医療用として注目度の高いマイクロポンプについて内部流れの数値計算を行った。現在作られているマイクロポンプは実際のポンプを縮小したものが多いようだが、Decourtye ら⁽¹⁾が行った数値計算をもとに、粘性の効果を利用しローター形状を円形にしたマイクロポンプを考え、ポンプの性能が発揮されるかどうか、またローターの配置を変えることで流量が増加するかどうかについて検討した。

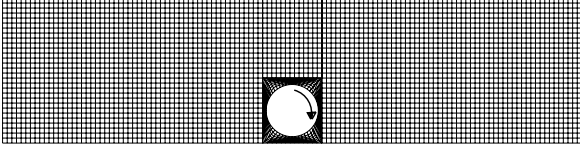


Fig. 1: computational grid in micropump

2 基礎方程式

2.1 渦度・流れ関数法による基礎方程式表示

二次元非圧縮性粘性流はナビエ・ストークス方程式および連続の式より表示することができる。これらは基礎変数である速度 $\bar{u}$, $\bar{v}$, 圧力 $\bar{p}$, 時間 $\bar{t}$ を用いて以下のように記述できる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\rho}$ は密度、 $\bar{\nu}$ は動粘性係数である。また、これらの変数は有次元量であり [-] を用いて表す。

この (1), (2), (3) に対して、代表長さ $\bar{L}_o$, 代表速度 $\bar{U}_o$ を用いて無次元化を行うと、

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}_o}, y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}_o}, t = \frac{\bar{t} \bar{U}_o}{\bar{L}_o}, u = \frac{\bar{u}}{\bar{U}_o},$$

$$v = \frac{\bar{v}}{\bar{U}_o}, p = \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}_o \bar{U}_o^2} \quad (4)$$

となる。また、本研究ではローターの直径を代表長さとし、ローターの接線方向の速度を代表速度とした。これを用いて式 (1), (2), (3) を無次元化を行うと

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

ここで、 Re は慣性力と粘性力の比を表す無次元量であるレイノルズ数であり、次のように定義される。

$$Re = \frac{\bar{U}_o \bar{L}_o}{\bar{\nu}} \quad (8)$$

次に、式 (6), (7) において以下に定義される流れ関数 ψ 、渦度 ω

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (9)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10)$$

を導入すると次の渦度輸送方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (11)$$

さらに渦度の定義式より、流れ関数に関するポアソン方程式が得られる。

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (12)$$

また、ストークス流では粘性項が慣性項に比べて大きいので、慣性項を無視する事ができ式 (6), (7), (11) は次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

2.2 一般座標変換

任意形状の領域での計算を容易にするため、デカルト座標系 (x, y) から一般座標系 (ξ, η) への変換を行う。このときデカルト座標系と一般座標系との間には次の関係が存在する。

$$x = x(\xi, \eta) \quad (16)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (17)$$

となり、この場合変換のヤコビアン J 及び計量 (Metrics) は以下のように定義される。

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (19)$$

これらの関係を用いることにより境界渦度の式 (9), ポアソン方程式 (12), ストークス流に関する渦度輸送方程式 (15) は以下のように一般座標系に変換される。

$$\omega = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -J^2 \omega &= \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \\ &\quad + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{1}{Re J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right. \\ &\quad \left. + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

と定義でき、計量 $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$, 及び τ は各々以下のようになる。

$$\begin{cases} \alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \\ \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \\ \sigma = -\frac{1}{J} \left(D_x \frac{\partial y}{\partial \eta} - D_y \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \\ \tau = \frac{1}{J} \left(D_x \frac{\partial y}{\partial \xi} - D_y \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \end{cases} \quad (23)$$

ここで D_x, D_y は次のようになる。

$$D_x = \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \quad (24)$$

$$D_y = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (25)$$

2.3 圧力一価の条件

渦度・流れ関数法において多重連結の流れ場⁽²⁾を解く場合、流れ関数の差は物体間流量を表すため、物体間の流量がわからなければ境界条件として物体表面上の流れ関数を設定することが困難となる。また境界条件として任意の値を与えたとしても方程式を解くことはできるが、その解は実際の流れ場には適さないものとなる恐れがある。そこで実際の流れ場に適した流れ関数の境界条件の値を求めるために圧力一価の条件⁽³⁾を用いる。以下に圧力一価の条件の条件の説明を行う。図2のように流れの中に物体が存在する領域を考える。物体面を閉境界 s としてその境界上における圧力勾配を境界上に沿って一周積分すると、流れの中で圧力 p は一価関数であるため次式 (26) が成立する。

$$p = \oint_s \frac{\partial p}{\partial s} ds + p \Rightarrow \oint_s \frac{\partial p}{\partial s} ds = 0 \quad (26)$$

ここで曲線 s に沿った圧力勾配は元のナビエ・ストークス方程式により導出することができ、その式が式 (26) を満たすように物体面上の流れ関数を求める。それにより、渦度・流れ関数表示において多重連結となる流れ場の解を求めることができる。

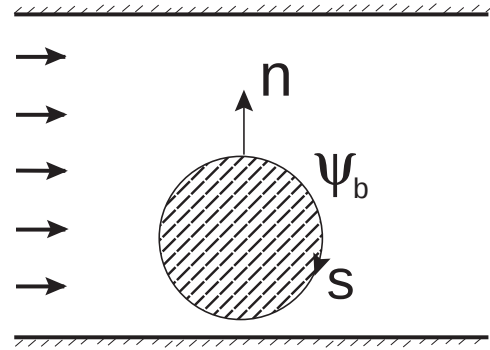


Fig. 2: object in the flow

ここでは次のように流れ場を分離し、それぞれの流れ場に以下のような条件を与える。

・Field1

渦度及び境界上の速度については実際の流れ場に対応するものを与え、ローター表面上及び上下壁面上ではゼロを与える。

・Field2

定常状態のストークス流として考え、境界を除く渦度は $\omega_2 = \omega_{s1}$ 、境界上の速度についてはゼロとし、ローター表面上の流れ関数については単位量を与える。

・Field3

定常状態のストークス流として考え、境界を除く渦度は $\omega_3 = \omega_{s2}$ 、境界上の速度についてはゼロとし、下側壁面上での流れ関数については単位量を与える。

また、流れ関数、渦度はそれぞれ式 (27), (28) のように、ローター表面上の速度は形式的に式 (29), 式 (30) のように表されるものとする。

$$\psi = \psi_1 + B(t)\psi_2 + C(t)\psi_3 \quad (27)$$

$$\omega = \omega_1 + B(t)\omega_2 + C(t)\omega_3 \quad (28)$$

$$u = u_1 + B(t)u_2 + C(t)u_3 \quad (29)$$

$$v = v_1 + B(t)v_2 + C(t)v_3 \quad (30)$$

ここで、流れ関数は線形であるポアソン方程式より求めるため、式 (27) のように Field1、Field2、及び Field3 の和として実際の流れ場の値を求めることができる。領域内部の渦度についても線形であるため、Field1、Field2、及び Field3 の和として求めることができ、境界渦度についても式 (9) のように表されるため、同じように取り扱うことができる。このように設定された流れ場において、ローター表面上の渦度及び速度を求め、それらにより求める表面上の圧力の勾配の積分値を求めると表面上の流れ関数を適当な値に決めているためゼロにならない値となる。

また、ローター表面上の圧力 p の勾配 $\partial p / \partial \xi$ は、ストークス方程式により求め、一般座標変換することにより以下ようになる。

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{ReJ} \left(\beta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \quad (31)$$

この式 (31) に式 (28) を代入すると、 $\partial p / \partial \xi$ は次のようになる。ただし、添え字は各 Field を表す。

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = E(\xi) + B(t)F(\xi) + C(t)G(\xi) \quad (32)$$

$$E(\xi) = \frac{1}{ReJ} \left(\beta \frac{\partial \omega_1}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \right) \quad (33)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{ReJ} \left(\beta \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial \omega_2}{\partial \eta} \right) \quad (34)$$

$$G(\xi) = \frac{1}{ReJ} \left(\beta \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial \eta} \right) \quad (35)$$

ここで、本来の流れ場において圧力勾配 $\partial p / \partial \xi$ の積分値は、ローターではゼロ、下側壁面上では流入、流出での圧力差となるので

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi &= \int_s E(\xi) d\xi + \int_s F(\xi) d\xi B(t) \\ &+ \int_s G(\xi) d\xi C(t) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} E(\xi) d\xi + \int_{\xi_0}^{\xi_1} F(\xi) d\xi B(t) \\ &+ \int_{\xi_0}^{\xi_1} G(\xi) d\xi C(t) = \Delta p \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、 Δp は圧力差であり ξ_0 は流入口を、 ξ_1 は流出口を示している。この式を各物体の表面上で計算し連立させることで、係数 B, C を求める。これらの係数の値と式 (27)、(28) より境界上の渦度及び流れ関数を決定する。

3 数値計算法

3.1 渦度輸送方程式に対する数値計算法

渦度輸送方程式の解法として時間微分項と空間微分項を別個に取り扱う線の方法を採用する。空間微分の離散化には二次精度中心差分法を用いる。また境界上におい

ては二次精度の片側差分法を用いる。これにより、渦度輸送方程式は次のような時間に関する常微分方程式に帰着される。

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{W}(\vec{\omega}) \quad (38)$$

ここで式 (30) はベクトル表示を用いており、

$$\vec{\omega} = (\omega_{2,2}, \dots, \omega_{N_X-1, N_Y-1})^T \quad (39)$$

および $\vec{W}$ は空間微分項ベクトルである。

時間積分には、前進オイラー法を採用し、計算過程は以下ようになる。

$$\vec{\omega}^{(n+1)} = \vec{\omega}^{(n)} + \Delta t \vec{F}(\vec{\omega}^{(n)}) \quad (40)$$

ここで Δt は時間刻み幅であり、肩文字 $n, n+1$ は時間段階を示している。

3.2 ポアソン方程式の解法

楕円型偏微分方程式である流れ関数に対するポアソン方程式の解法は、式 (21) に離散化を行い、得られた方程式は、逐次過緩和 (SOR) 法で反復計算により解かれる。また、その際の加速度係数は 1.9 とし、その収束判定基準は平均二乗誤差が 10^{-6} とした。

4 計算格子

本論文では計算格子を組み合わせてつくるため、格子のつなぎ目での不連続が無視できない状況となった。そこで、以下の方程式を用いる事でローター周りの格子を作成した。⁽⁴⁾

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^2}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \quad (41)$$

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^2}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \quad (42)$$

これを一般座標変換し、ローター表面 ($\eta=1$) および格子のつなぎ目 ($\eta=\max$) に寄せるため式 (41)(42) は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} &= -J^2 (P_1 e^{-a(\eta-\eta_1)} x_\xi \\ &+ Q_1 e^{-b(\eta-\eta_1)} x_\eta + P_2 e^{-a(\eta-\eta_{\max})} x_\xi \\ &+ Q_2 e^{-b(\eta-\eta_{\max})} x_\eta) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} &= -J^2 (P_1 e^{-a(\eta-\eta_1)} y_\xi \\ &+ Q_1 e^{-b(\eta-\eta_1)} y_\eta + P_2 e^{-a(\eta-\eta_{\max})} y_\xi \\ &+ Q_2 e^{-b(\eta-\eta_{\max})} y_\eta) \end{aligned} \quad (44)$$

ここで a, b は正の定数であり、 P_1, P_2, Q_1, Q_2 は次のように表される。

$$P_1 = J^{-1} \left(R_1 \frac{\partial y}{\partial \eta} - R_2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_1} \quad (45)$$

$$P_2 = J^{-1} \left(R_3 \frac{\partial y}{\partial \eta} - R_4 \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=\eta_{\max}} \quad (46)$$

$$Q_1 = J^{-1} \left(-R_1 \frac{\partial y}{\partial \xi} + R_2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=\eta_1} \quad (47)$$

$$Q_2 = J^{-1} \left(-R_3 \frac{\partial y}{\partial \xi} + R_4 \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=\eta_{max}} \quad (48)$$

また R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 は次のとおりである。

$$R_1 = -J^{-2} \left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\eta=\eta_1} \quad (49)$$

$$R_2 = -J^{-2} \left(\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\eta=\eta_{max}} \quad (50)$$

$$R_3 = -J^{-2} \left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\eta=\eta_1} \quad (51)$$

$$R_4 = -J^{-2} \left(\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\eta=\eta_{max}} \quad (52)$$

式 (43) 式 (44) を離散化し、 $x_{i,j}$ および $y_{i,j}$ について整理し、SOR 法を用いた。これより作成される計算格子を図 3 に示す。また偏心率 ε はローターの半径を a 、高さを h 、下の壁からローターの最下部までの距離を h_L とすると、偏心率 ε は次のように求められる。

$$\varepsilon = \frac{h/2 - a - h_L}{2a} \quad (53)$$

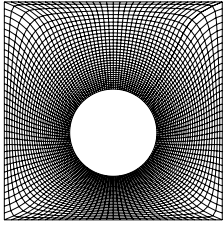


Fig. 3: computational grid around rotor

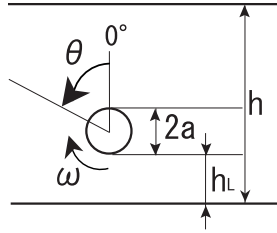


Fig. 4: schematic view of micropump

5 境界条件

渦度、速度、流れ関数の流入、流出口の境界条件については外挿の式を用い、格子のつなが目の渦度、速度、流れ関数については次のように平均をとるものとする。

$$\omega_{i,j} = \frac{\omega_{i1max-1,j} + \omega_{i2min+1,j}}{2} \quad (54)$$

$$\psi_{i,j} = \frac{\psi_{i1max-1,j} + \psi_{i2min+1,j}}{2} \quad (55)$$

$$u_{i,j} = \frac{u_{i1max-1,j} + u_{i2min+1,j}}{2} \quad (56)$$

$$v_{i,j} = \frac{v_{i1max-1,j} + v_{i2min+1,j}}{2} \quad (57)$$

ここで $i1$ は計算格子の ξ 方向の格子を示し、 $i2$ は計算格子の ξ 方向の格子を示す。上下壁面、ローター周りの渦度については式 (20) の境界渦度の式を利用し、流れ関数は次の表 3 のような条件を与え、速度は分離された流れ場ではゼロとし、実際の流れでは接線方向に 1.0 を与えた。

Table. 1: boundary condition of stream function

	Field1	Field2	Field3
rotor	0	1	0
bottom casing	0	0	1

6 計算結果

$\varepsilon/\varepsilon_{max} = 0.7, 0.8, 0.9$ で計算を行った。ここで ε_{max} は壁面とローターが接しているときの ε を表している。圧力勾配は 0.0 および 1.0 であり、Re 数は 1.0 を与えている。計算格子は図 1 に示すものである。まず、 $\varepsilon/\varepsilon_{max} = 0.7$ 、 $\Delta p = 0.0$ の計算結果を示す。ただし、図 8 の θ は図 4 のようにとっている。

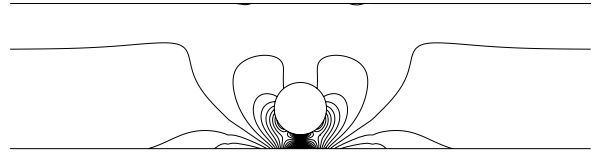


Fig. 5: vorticity contours($\varepsilon = 0.7, p = 0.0$)

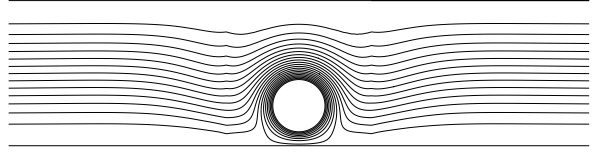


Fig. 6: streamlines($\varepsilon = 0.7, p = 0.0$)

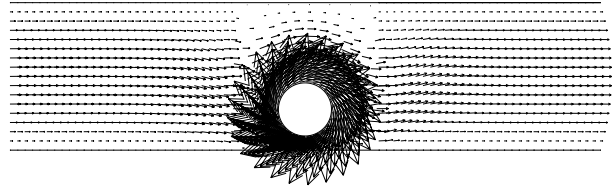


Fig. 7: velocity vectors($\varepsilon = 0.7, p = 0.0$)

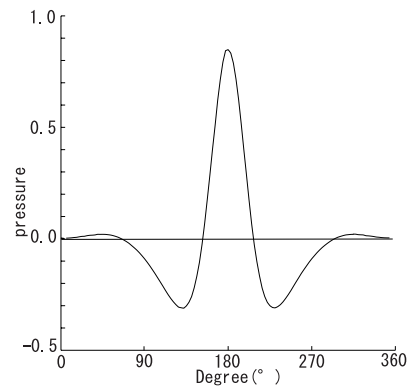


Fig. 8: pressure coefficient along rotor($\varepsilon = 0.7, p = 0.0$)

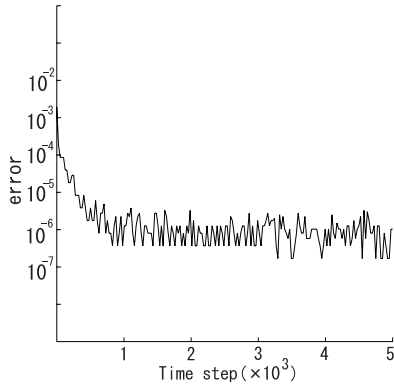


Fig. 9: error of pressure single-valuedness($\varepsilon = 0.7, p=0.0$)

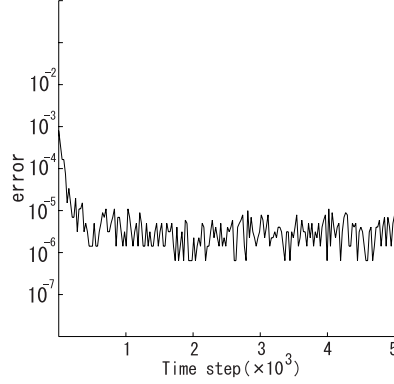


Fig. 10: error of pressure gradient($\varepsilon = 0.7, p=0.0$)

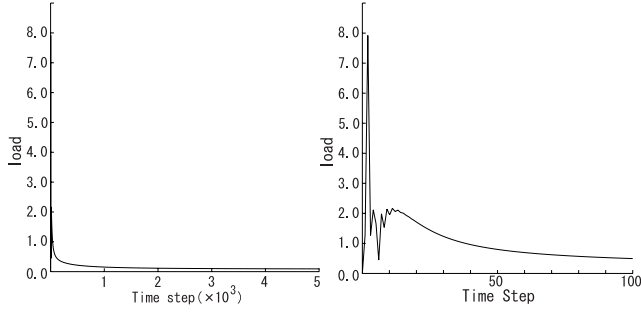


Fig. 11: radial load($\varepsilon = 0.7, p=0.0$)

図 5 から図 7 より左から右への流れが見られる。図 9 よりローターの下の部分で圧力が高くなっているのがわかる。図 12 のローターにかかる荷重は最大値 7.8 であり、最終的には 0.08 程度となった。図 10, 11 より圧力一価の条件、圧力勾配の条件も満足しているといえる。また、流れ関数の最大値は 0.4090、最小値は -1.82×10^{-5} であり、管内の平均流速は 0.1084 であった。つぎに $\varepsilon/\varepsilon_{max} = 0.7$ 、 $\Delta p = 1.0$ の結果を示す。

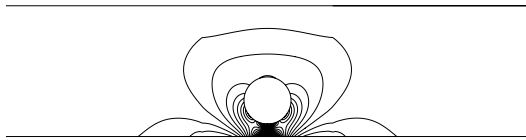


Fig. 12: vorticity contours($\varepsilon = 0.7, p=1.0$)

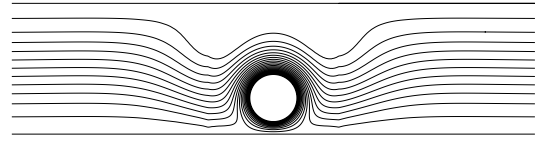


Fig. 13: streamlines($\varepsilon = 0.7, p=1.0$)

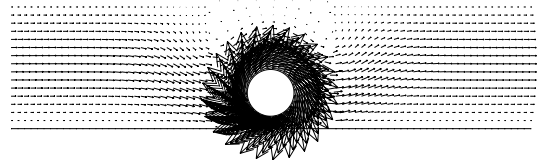


Fig. 14: velocity vectors($\varepsilon = 0.7, p=1.0$)

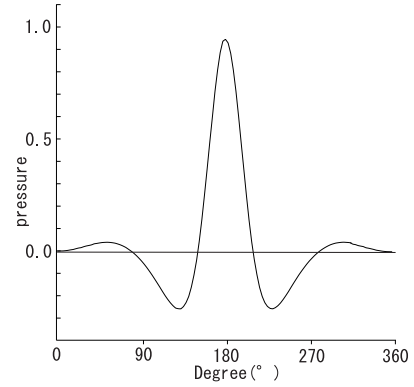


Fig. 15: pressure coefficient along rotor($\varepsilon = 0.7, p=1.0$)

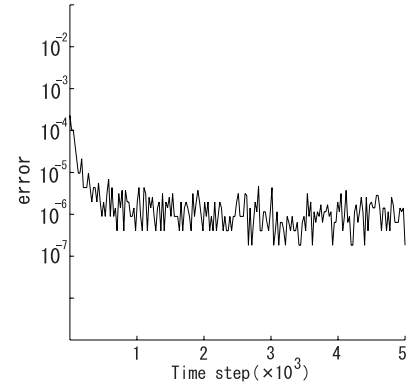


Fig. 16: error of pressure single-valuedness($\varepsilon = 0.7, p=1.0$)

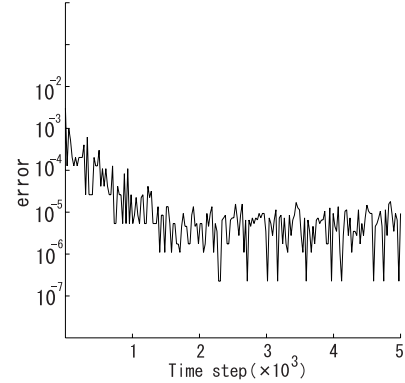


Fig. 17: error of pressure gradient($\varepsilon = 0.7, p=1.0$)

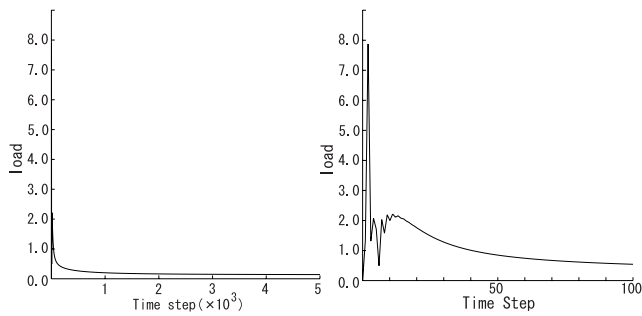


Fig. 18: radial load($\varepsilon=0.7, p=1.0$)

ここでも同様の流れが見られる。ローターの下部分で圧力が高くなっているのも同じであり、ローターにかかる荷重は最大値 7.9 であった。最終的には 0.13 程度となった。流れ関数の最大値は 0.3046、最小値は -8.49×10^{-3} であり、管内の平均流速は 0.0656、また圧力一価の条件及び圧力勾配の条件も満足しているといえる。つぎに $\varepsilon/\varepsilon_{max}=0.8$ 、 $\Delta p=0.0$ の結果を示す。

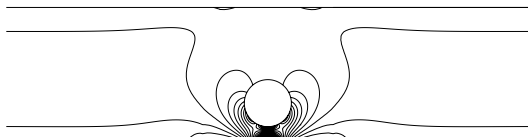


Fig. 19: vorticity contours($\varepsilon=0.8, p=0.0$)

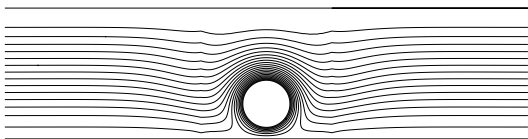


Fig. 20: streamlines($\varepsilon=0.8, p=0.0$)

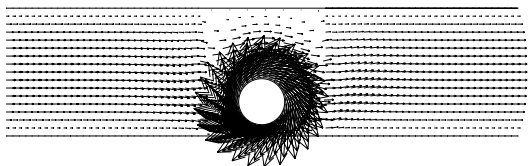


Fig. 21: velocity vectors($\varepsilon=0.8, p=0.0$)

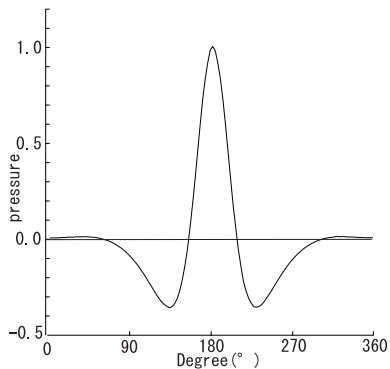


Fig. 22: pressure coefficient along rotor($\varepsilon=0.8, p=0.0$)

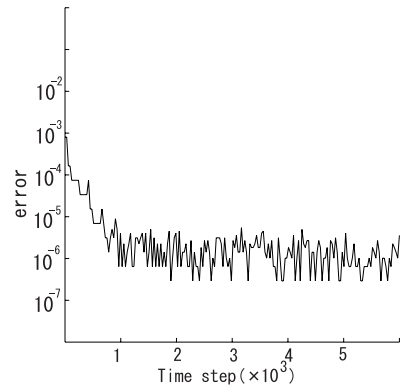


Fig. 23: error of pressure single-valuedness($\varepsilon=0.8, p=0.0$)

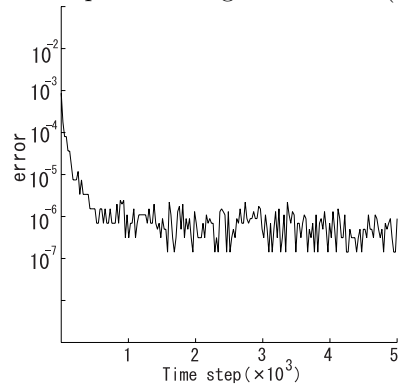


Fig. 24: error of pressure gradient($\varepsilon=0.8, p=0.0$)

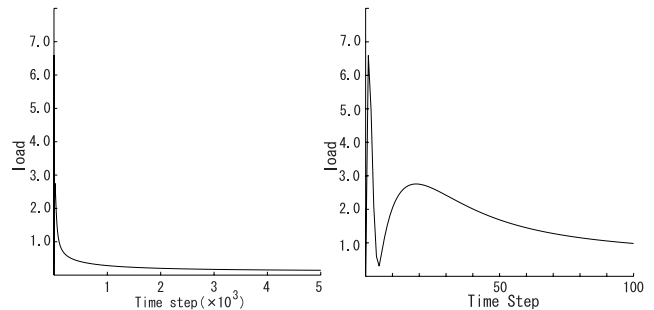


Fig. 25: radial load($\varepsilon=0.8, p=0.0$)

$\varepsilon/\varepsilon_{max}=0.7$ 、 $\Delta p=0.0$ に似た流れが見られる。ローターの下部分で圧力が高くなっているのも同じであり、ローターにかかる荷重は最大値 6.5 であった。最終的には 0.12 程度となった。図 23,24 より圧力一価および圧力勾配の条件も満たされていることがわかる。流れ関数の最大値は 0.4089、最小値は -1.99×10^{-5} であり、管内の平均流速は 0.1122 であった。次に $\varepsilon/\varepsilon_{max}=0.8$ 、 $\Delta p=1.0$ の結果を示す。

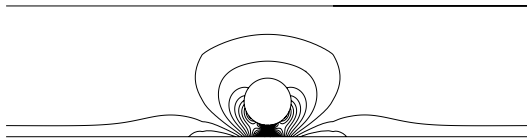


Fig. 26: vorticity contours($\varepsilon=0.8, p=1.0$)

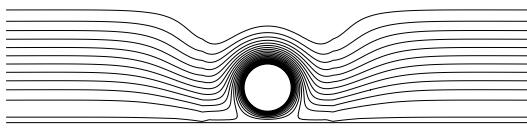


Fig. 27: streamlines($\varepsilon=0.8, p=1.0$)

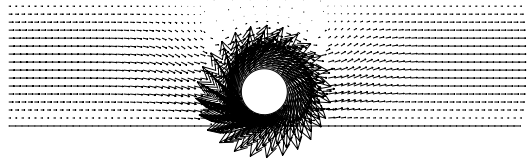


Fig. 28: velocity vectors($\varepsilon=0.8, p=1.0$)

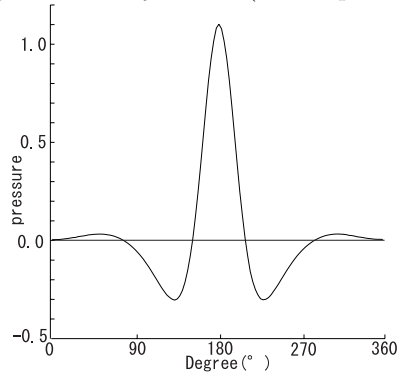


Fig. 29: pressure coefficient along rotor($\varepsilon=0.8, p=1.0$)

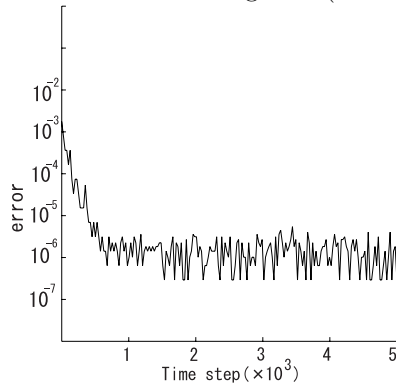


Fig. 30: error of pressure single-valuedness($\varepsilon=0.8, p=1.0$)

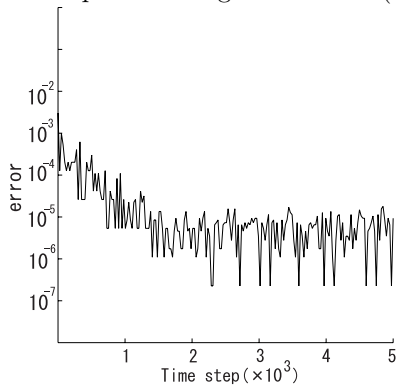


Fig. 31: error of pressure condition($\varepsilon=0.8, p=1.0$)

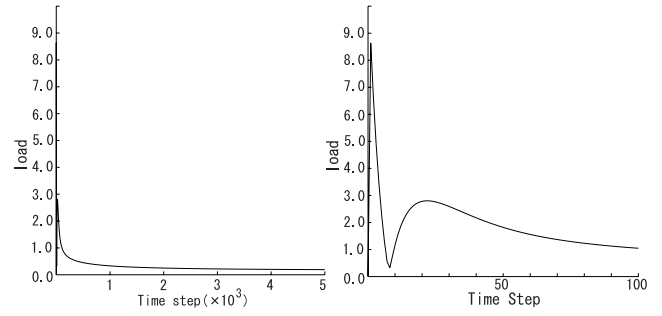


Fig. 32: radial load($\varepsilon=0.8, p=1.0$)

$\varepsilon/\varepsilon_{max}=0.7$, $\Delta p=1.0$ に似た流れが見られる。ローター周りの圧力の最大値は 8.7 であり、計算条件 3 に似た分布となっている。また荷重は 0.16 まで収束している。流れ関数の最大値、最小値は 0.3023、 -1.494×10^{-3} であり、管内平均流速は 0.06892 であった。次に $\varepsilon/\varepsilon_{max}=0.9$ 、 $\Delta p=0.0$ の結果を示す。

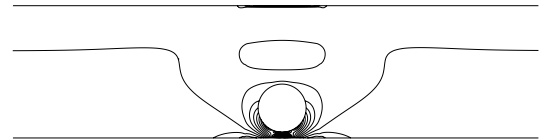


Fig. 33: vorticity contours($\varepsilon=0.9, p=0.0$)

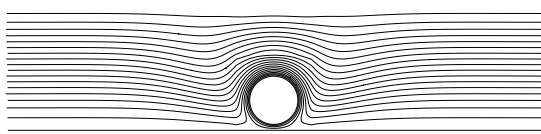


Fig. 34: streamlines($\varepsilon=0.9, p=0.0$)

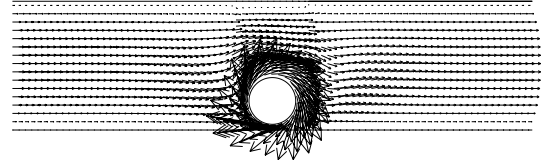


Fig. 35: velocity vectors($\varepsilon=0.9, p=0.0$)

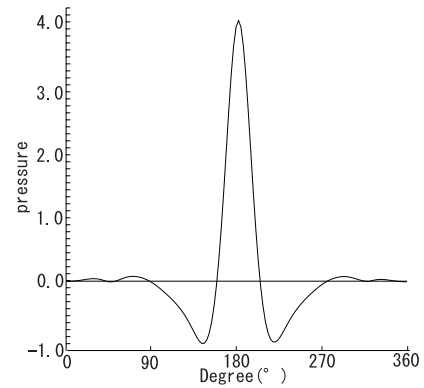


Fig. 36: pressure coefficient along rotor($\varepsilon=0.9, p=0.0$)

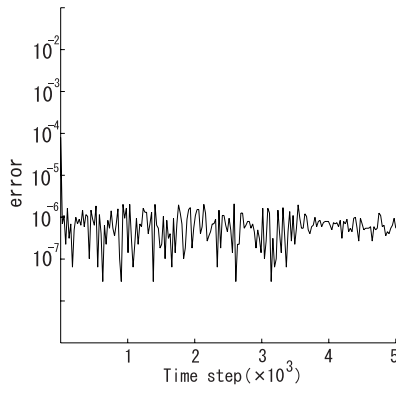


Fig. 37: error of pressure single-valuedness($\varepsilon = 0.9, p=0.0$)

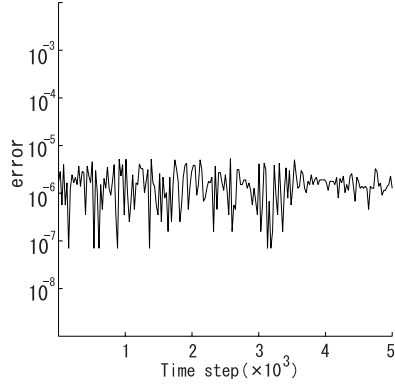


Fig. 38: error of pressure gradient($\varepsilon = 0.9, p=0.0$)

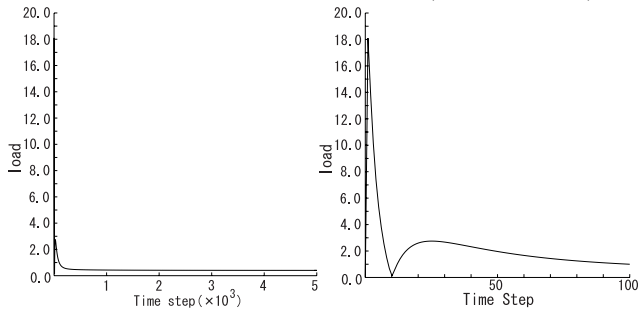


Fig. 39: radial load($\varepsilon = 0.9, p=0.0$)

今までと比較して、ローターにかかる荷重がかなり増加した。最大値は 17.5 であり 0.40 程度まで収束している。また 10Time Step 付近で 10^{-3} まで減少しているのも特徴である。流れ関数の最大値、最小値は 0.4160、 3.608×10^{-5} であり、出口での流速は 0.1385 であった。最後に $\varepsilon/\varepsilon_{max} = 0.9$ 、 $\Delta p = 1.0$ の結果を示す。

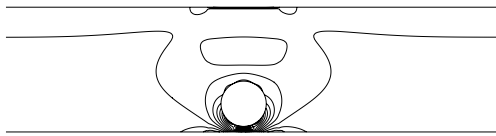


Fig. 40: vorticity contours($\varepsilon = 0.9, p=1.0$)

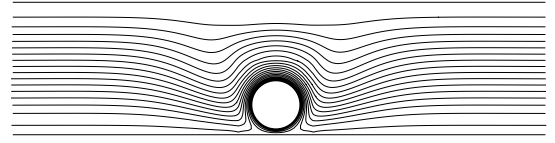


Fig. 41: streamlines($\varepsilon = 0.9, p=1.0$)

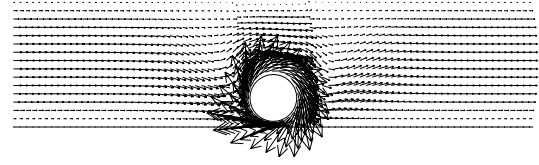


Fig. 42: velocity vectors($\varepsilon = 0.9, p=1.0$)

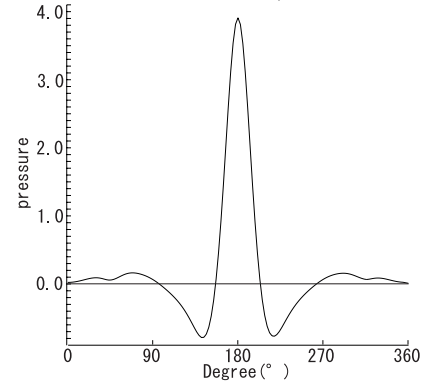


Fig. 43: pressure coefficient along rotor($\varepsilon = 0.9, p=1.0$)

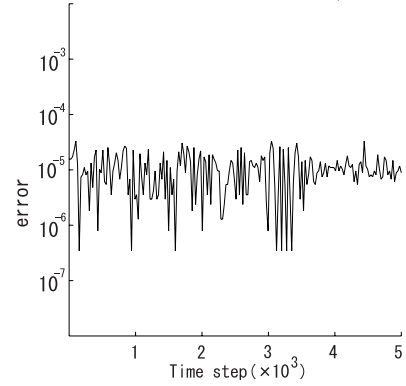


Fig. 44: error of pressure single-valuedness($\varepsilon = 0.9, p=1.0$)

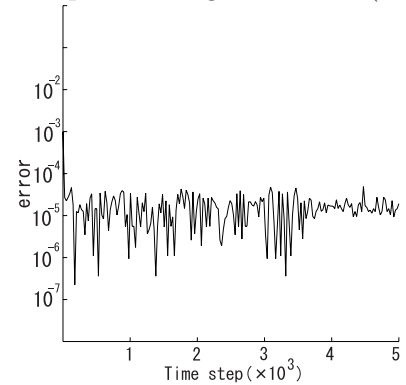


Fig. 45: error of pressure gradient condition($\varepsilon = 0.9, p=1.0$)

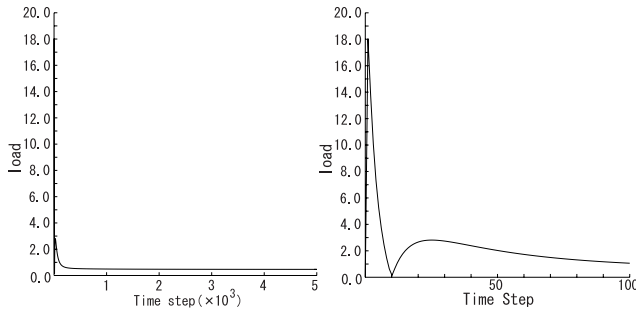


Fig. 46: radial load($\varepsilon=0.9, p=1.0$)

$\Delta p = 0$ のときと似た圧力の値、流れが見られている。ローターにかかる荷重の最大値は 18.0 であり 0.46 まで収束している。流れ関数の最大値、最小値は 0.3065、 -5.090×10^{-3} であり、出口での流速は 0.09456 であった。

以上の結果より $\varepsilon/\varepsilon_{max}=0.7, 0.8, 0.9$ での流出口の速度と圧力の定常値を次の図にまとめた。

Table. 2: dimensionless bulk velocity

	0.7	0.8	0.9
$\Delta p=0.0$	0.1084	0.1122	0.1385
$\Delta p=1.0$	0.06556	0.06892	0.09456

Table. 3: dimensionless radial load

	0.7	0.8	0.9
$\Delta p=0.0$	0.0828	0.1151	0.4023
$\Delta p=1.0$	0.1306	0.1609	0.4642

ローターの偏心率が大きくなればなるほど速度も大きくなっている。ローターにかかる荷重については、偏心率が大きくなるほど大きくなり、 $\varepsilon/\varepsilon_{max}=0.9$ になった時に一気に増加している。圧力勾配 1.0 を与えると 0.5 程度増加していることがわかる。計算結果全体を見て、圧力一価の条件、圧力勾配の条件も十分満たされており、良好な結果が得られていると考えられる。各点の圧力の値では、どの場合においてもローター下側で最大値となっており、左半分と右半分では対照的になっていることもわかる。またローターの回転速度を 0.1 にしても計算を行っていたが、流れ関数の値は今述べた結果の約 10 分の 1 となっており、回転速度に比例して流量が変化することもわかった。

7 結論

渦度・流れ関数法をストークス方程式に適用して流れ場を分離し、圧力一価および圧力勾配の条件を用いて、マイクロポンプ内の流れを計算したところ以下の結論が得られた。

- (1) 本方法により圧力一価及び圧力勾配の条件が良好に満足されることがわかった。
- (2) 流量、荷重の偏心率依存性の再現などより、本方法のマイクロポンプへの適用性が検証された。
- (3) ストークス流の特徴である流量の回転速度への関係が得られた。

この結果を踏まえ、今後は 3 次元へと拡張していく予定である。基礎方程式には渦度・ベクトルポテンシャル法を利用し、圧力一価の条件を適用して行う。本稿で示したマイクロポンプに奥行きをつけた概略図を Fig.47 として示す。渦度・ベクトルポテンシャル法は方程式が増え 3 次元への拡張性については留意が必要であるが、図 47 のようなシンプルな形状の場合、分離された流れ場については圧力一価の条件の適用が容易になる。

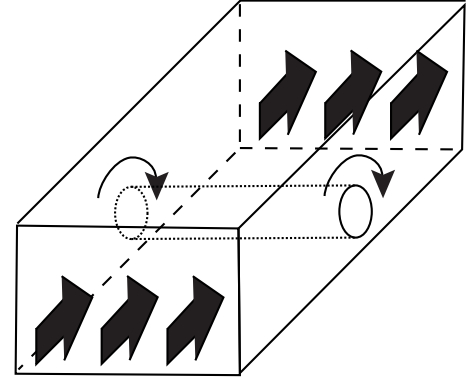


Fig. 47: three dimensional micropump

参考文献

- (1) D.Decoutye, M.Sen and M.Gad-El-Hak, Analysis of Viscous Micropumps an Microturbines, Vol.10, (1997), 13-25, IJCFD.
- (2) A.Lippke, H.Wagner, Numerical Solution of The Navier-Stokes Equations in Multiply Connected Domain, Vol.20, (1991), 19-28, Computers Fluids.
- (3) 細見弘樹, 圧力一価を用いた多重連結領域での流れの数値計算, (1997), 1-16, 京都工芸繊維大学修士論文
- (4) J.L.Steger, R.L.Sorenson, Automatic Mesh-Point Clustering Near Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations, Vol.33, (1979), 405-410, Jornal of Computational Phisics.