

# 渦度・流れ関数法による多重連結領域における熱対流を伴う流れの数値計算 Numerical simulation of flow with heat convection in multiply-connected domain by vorticity-stream function method

寺井朋棋, 京工織大 大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail:tera01@ipc.kit.ac.jp  
徳永宏, 京工織大, E-mail:tokunaga@ipc.kit.ac.jp  
Tomoki Terai & Hiroshi Tokunaga  
Dept. of Mech. & System Eng., KIT, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8585

The present study deals with numerical simulation of natural convection of fluid in cavity where locates the obstacle heated or cooled by constant temperature. The pressure single-valuedness condition is successfully extended to the flow with the temperature variation when the vorticity-stream function method is applied.

## 1 序論

渦度・流れ関数表示法を用いて流れを渦無し、渦あり流れに分離することにより、多重連結領域の流れが、成功裏に解析された。<sup>1)2)</sup>そして渦度・流れ関数表示法を用いて容器内に物体を含む熱対流の解析も試みられてる。<sup>3)</sup>本研究では熱対流の数値計算を行う際に、流れを渦なし流れと渦あり流れに分離する事により物体表面上の流れ関数を決定する方法<sup>1)</sup>を提案する。基礎方程式としてブシネスク近似により得たナビエ・ストークス方程式の回転をとり、それより得られた渦度輸送方程式、流れ関数に関するポアソン方程式、及び温度に関するエネルギー方程式の3つの方程式を用いる。また複数の境界からなる多重連結の領域においては圧力一価の条件<sup>1)</sup>を用い本方法の有効性を検証するため二次元サーモサイフォン、及び容器内に二物体を含む容器内の熱対流の数値計算を行う。また、温度変化の無いジャーナル・ベアリング流れの解析<sup>2)</sup>を拡張し、局所温度により粘性が変化するジャーナル・ベアリング内流れ<sup>4)5)</sup>に適用するための定式化を行う。

## 2 基礎方程式

### 2.1 渦度・流れ関数表示による基礎方程式

容器内圧力を  $p$ , 基準状態における密度を  $\rho_0$  (一定), 重力加速度ベクトルを  $g$  として圧力減少を次式で定義する。

$$\nabla\pi = \nabla p - \rho_0 g$$

次にブシネスク近似を用いた非圧縮性ナビエ・ストークス方程式及びエネルギー方程式は次式で表される。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{Ra g}{Pr|g|} \cdot T - \nabla\pi \quad (1)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (2)$$

ただし、 $Pr$  は動粘性係数  $\nu$  と熱拡散係数  $\kappa$  との比であるプラントル数で、 $Ra$  は自然対流を特徴付けるグラスホフ数 ( $Gr$ ) とプラントル数の積であるレイリー数であり、いずれも無次元数である。 $Pr, Ra$  は次式で定義される。

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = Gr \cdot Pr = \frac{\alpha|g|L_o^3\Delta T}{\nu\kappa}$$

ここで式 (1) において以下に定義される流れ関数  $\psi$ , 渦度  $\omega$  を導入することにより渦度輸送方程式が得られる。

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\omega = \text{rot } \mathbf{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

渦度輸送方程式は以下ようになる

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5)$$

又、式 (2) はエネルギー方程式 (6) に変形できる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

更に式 (3)(4) より、流れ関数に関するポアソン方程式が得られる。

$$-\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \quad (7)$$

### 2.2 圧力一価の条件

渦度・流れ関数表示において複数物体を含むような多重連結領域の流れ場を解く際、各物体間の流量が分からなければ、境界条件としての物体表面上の流れ関数を設定することが困難となる。また、任意に与えたとしても方程式は解けるがその解は実際の流れ場には適さないものになる恐れがある。そこで実際の流れ場に適した境界条件として正しい流れ関数の値を求めるために本論文では温度場がある場合にも圧力一価の条件を拡張して用いる。以下に圧力一価の条件を説明する。

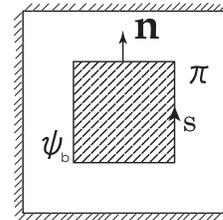


Fig. 1: Region including obstacle

物体表面を閉境界  $s$  として、式 (1) を閉境界  $s$  について一周積分すると

$$\oint_s \nabla\pi \cdot ds = \oint_s \frac{\partial\omega}{\partial n} |ds| + \frac{Ra}{Pr} \oint_s T dy = 0 \quad (8)$$

ここで  $\oint_s \frac{\partial\omega}{\partial n} |ds|$  の項は渦度の物体に付いての外向き法線方向勾配の一周積分である。ただし  $ds = (dx, dy)$ ,  $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  である。

よってこの式を満足する物体表面上の流れ関数を与え  
る事により、渦度・流れ関数表示において多重連結とな  
る流れ場の解を求めることができる。

### 3 数値計算法

式 (5),(6) の渦度輸送方程式及びエネルギー方程式の解  
法としては、線の方法を採用する。線の方法においては  
時間微分項と空間微分項を別個に取り扱い空間微分項を  
適当な方法で離散化することによって、時間及び空間に  
関する偏微分方程式である式 (5),(6) は時間に関する常微  
分方程式に帰着する。この時間に関する連立微分方程式  
を適当な時間積分法により積分し、次のタイムステップ  
における数値解を求める。空間微分項の離散化には二次  
精度中心差分近似を用い、時間積分法には前進オイラー  
法を用いた、又ポアソン方程式及びラプラス方程式の解  
法には SOR 法を用いた。

### 4 単一物体を含む容器内の自然対流

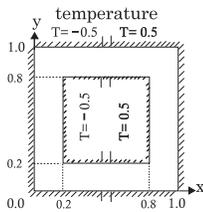


Fig. 2: Thermosyphon cavity

正方空洞内において、空洞内に物体が存在する場合、こ  
の流れ場は外壁と物体の境界から構成される多重連結の  
領域となり、境界条件として流れ関数を決定する必要が  
ある。そこで次節で述べる圧力一価の条件を満足するよ  
うに流れを分離する方法により計算する。計算には、格  
子点数  $51 \times 51, 81 \times 81, 126 \times 126$  の直交格子を使用した。

#### 4.1 物体表面上の流れ関数の決定法 (単一物体 を含む場合)

未知関数となる物体表面上の流れ関数は、圧力一価の  
条件を満足することにより決定できる事は 2 章で述べた  
がこの節ではその条件を満足する流れ関数の決定法につ  
いて述べる。圧力一価の条件を用いる方法は幾つか提案  
されているが、本論文では流れ場における流れを分離し  
条件を満足させる方法を採用する。以下にその方法につ  
いて記す。

まず流れ場に定義される流れ関数を次式のように便宜  
的に分離する。

$$\psi = \psi_1 + B(t)\psi_2 \quad (9)$$

以降、*field1*, *field2* の添え字をそれぞれ 1,2 とする。

また領域内部の渦度は非線形方程式であるナビエ・ス  
トークス方程式に支配されるため、一方では渦度を与え  
(*field1*)、他方では渦無しとする。( *field2* )

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = 0 \quad (10)$$

ただ未知数となる物体表面上の流れ関数に対してはそ  
れぞれ適当な値を与える。このような値に設定された流  
れ場において物体表面上の渦度を求め、積分値を評価す  
ると物体表面上の流れ関数を適当に与えていることから

実際の流れ場にはならず積分値は零にならない値を持つ。  
ここで壁面渦度は式 (4) の定義式より求めるため流れ関  
数と同様に線形に取り扱う事ができ、又その積分値にお  
いても同様であるため以下の関係が成り立つ。式 (8) に  
おける渦度  $\omega$  の法線方向勾配の閉曲線  $s$  についての一  
周積分の項について

$$I_k = \oint_s \frac{\partial \omega_k}{\partial n} |ds|$$

とおくと、(但し  $k$  はフィールド番号で  $k = 1, 2$ )

$$\omega_b = \omega_{b1} + B(t)\omega_{b2} \quad (11)$$

↓

$$\oint_s \nabla \pi \cdot ds = I_1 + B(t)I_2 + \frac{Ra}{Pr} \oint_s T dy = 0$$

となる。

本来の流れ場においては、積分値は零と言うことを考  
えれば式 (12) を満足する係数  $B(t)$  を求めることにより  
物体表面上及び壁面上の渦度、物体表面上の流れ関数を  
一意に決定できる。

$$B(t) = -\frac{I_1 + \frac{Ra}{Pr} \oint_s T dy}{I_2} \quad (12)$$

$$\psi_b = \psi_{b1} + B(t)\psi_{b2} \quad (13)$$

計算領域が時間的に変化しない場合 *field2* の解は常に  
同じであり、計算のはじめに一度だけ解けばよく、*field1*  
のみ各時間段階で解くことになる。

#### 4.2 計算方法

図 2 に示すような一辺が単位長さの正方形の内部に一  
辺の長さが 0.6 の同心正方形を配置する。壁面は物体壁  
を含み全て静止しているものとし、計算には図 ?? に示す  
計算格子を用い数値計算はレイリー数  $Ra = 1.0 \times 10^5$ 、  
 $Ra = 5.0 \times 10^5$ 、 $Ra = 1.0 \times 10^6$  で行ない、プラント  
ル数は  $Pr = 5.39$  で行なった。又、格子点数  $51 \times 51$ 、  
 $81 \times 81$ 、 $126 \times 126$  で時間格子幅は各々  $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ 、  
 $\Delta t = 3.8 \times 10^{-5}$ 、 $\Delta t = 1.5 \times 10^{-5}$  とし、ポアソン方程  
式、及びラプラス方程式の加速度係数は 1.8 とした。

##### 4.2.1 初期条件

温度場のある流れの初期条件として以下の条件を採用  
する。

(a) 流体は動いていないものとする。即ち  $\omega = 0$ 、 $\psi = 0$   
である。

(b) 熱移動については熱伝導のみに依存して流体中の温  
度場は次式を満足する。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

上式の数値計算には前章におけるポアソン方程式の解  
法である SOR 法を用いる。

#### 4.2.2 境界条件

境界上の温度は全過程を通し一定である。又、図2のように境界上の温度は  $x = 0.5$  付近を境に左では  $T = -0.5$ 、右では  $T = 0.5$  で一定であり、境界上の温度は  $T = -0.5$  から  $T = 0.5$  へと連続的に変化する。又、速度については全ての境界上において粘着壁の条件に従う。境界渦度に関しては  $field1, 2$  でポアソン方程式 (26) を反復させて  $field1, 2$  各々につき  $\psi_1, \psi_2$  を計算し内点における流速を式 (3) から求め定義式 (4) を境界上で二次精度片側差分する事により  $\omega_{b1}, \omega_{b2}$  を求め式 (11) により決定する。流れ関数に関しては、外壁において1つの流線を形成することから代表流線とし0で固定する。

物体面上においては、未知数  $\psi_b$  となるが前章における方法により圧力一価の条件を満足するよう係数  $B(t)$  を各時間段階で決定していき式 (13) を用いて求める。又、分離された流れ場における境界面上の流れ関数は以下の値で固定する。

Tab. 1: Stream function on boundary of flow field

	$field1$	$field2$
vessel	$\psi_1 = 0$	$\psi_2 = 0$
obstacle	$\psi_{b1} = 0$	$\psi_{b2} = 1$

#### 4.3 計算結果

Tab. 2: Steady state value of fluid flux

grid points \ $Ra$	$1.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^6$
$51 \times 51$	3.39	21.3	36.8
$81 \times 81$	3.33	21.2	36.0
$126 \times 126$	3.33	21.6	36.9

表2はレイリー数と格子点数を変化させたときの流量の定常値である。表よりレイリー数が同じ場合には格子点数によらずほぼ一定であることが分かる。またこの結果から計算がほぼ正確に出来ている事がわかる。

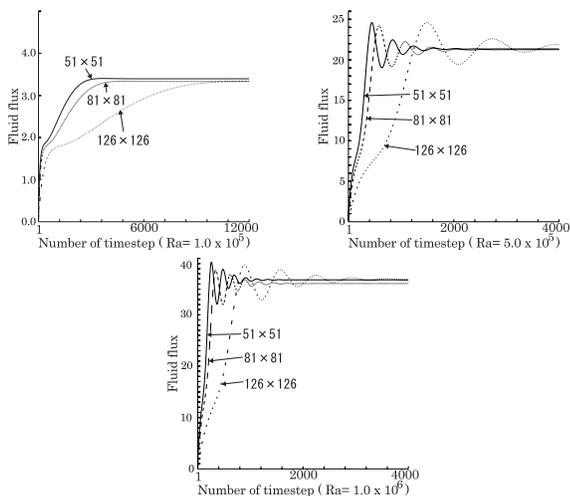


Fig. 3: Fluid flux

図3は各レイリー数における流量の収束履歴を示している。図から分かるようにレイリー数が  $1.0 \times 10^5$  ではどの

格子でも流れが落ち着くまでにタイムステップを多く要している。これは時間格子幅が大きく取れないためである。逆にレイリー数が  $1.0 \times 10^6$  では落ち着くまでにはタイムステップはあまり要さないが振動を繰り返しながら徐々に落ち着いている。

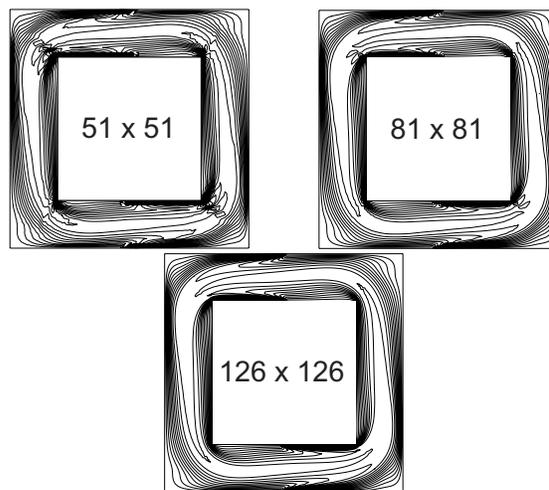


Fig. 4: Temperature contours( $Ra = 1.0 \times 10^6$ )

図4は  $Ra = 1.0 \times 10^6$  における温度場である。図より対流は反時計回りに起こっていることが分かる。図について述べると角付近では格子点数が少ないと流れを分解出来ずに数値振動が見られるが格子点数を増やすと等温線が滑らかになっている。また流れが強いため剥離が生じており、流れがスロットに対し傾いているのが図より伺える。すべての図において最大値は  $T = 0.5$  最小値は  $T = -0.5$  等温線は  $\Delta T = 5.0 \times 10^{-2}$  おきに引かれている。

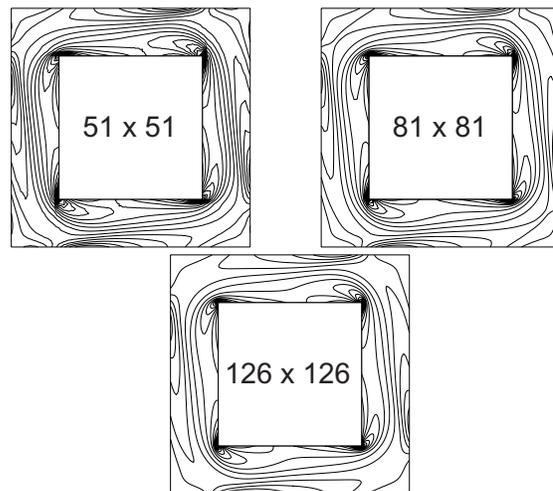


Fig. 5: Vorticity contours( $1.0 \times 10^6$ )

図5は  $Ra = 1.0 \times 10^6$  の等渦度線図で角では渦が伸びているのがうかがえる。これらの図より、傾向は等温線図と同じで格子点数を増やせば等高線が滑らかになり、流れが強いためスロットに対し傾いている。等高線は最大値と最小値の間を20等分するように引かれている。

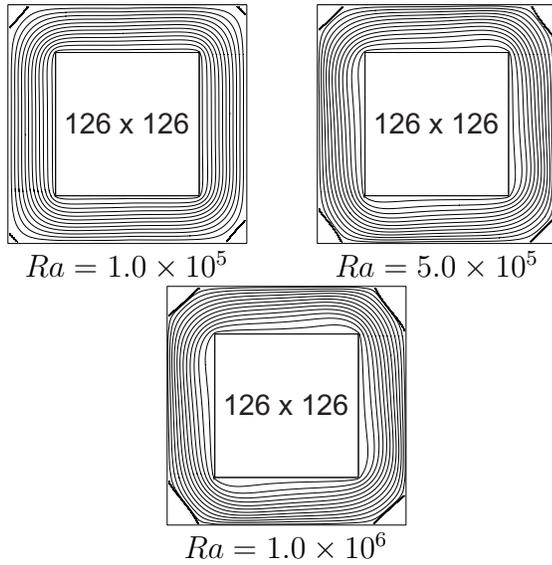


Fig. 6: Stream line

図6は格子点数  $126 \times 126$  におけるそれぞれのレイリー数についての流線である。流れが強いため剥離が起きており、逆流が生じてる部分がある。また流れ関数の最小値をそれぞれの格子について表3に示す。ただし、最小値の値は全て負でその絶対値を示してある。

Tab. 3: Minimum value of stream function(secondary flow)

格子点数 \ $Ra$	$1.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^6$
$51 \times 51$	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-1}$	$6.0 \times 10^{-1}$
$81 \times 81$	$7.7 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-1}$	$4.8 \times 10^{-1}$
$126 \times 126$	$6.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-1}$	$4.2 \times 10^{-1}$

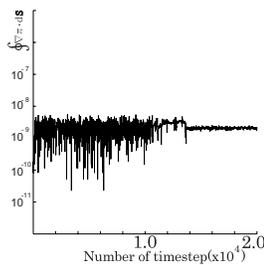


Fig. 7: Value of line integral of pressure gradient

図7は各タイムステップにおける物体表面の圧力勾配の一周積分値であり、図より積分値は  $10^{-9}$  オーダーでほぼ零になっている。このことから圧力一価を満たしていることが分かる。図は格子点数  $51 \times 51$ 、 $Ra = 1.0 \times 10^6$  のものである。

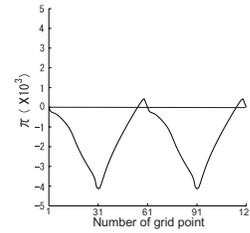


Fig. 8: Pressure distribution on obstacle

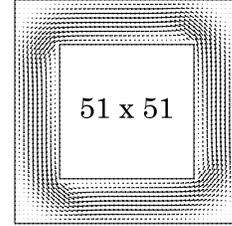
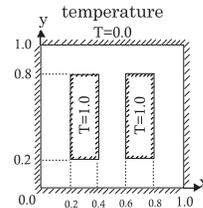


Fig. 9: velocity vectors

図8は物体表面の各格子点上の圧力であり、物体左下端を格子点番号1として物体表面の格子点を半時計回りに1~121番まで番号を振ったものである。圧力は格子点番号121で  $\pi$  は  $10^{-9}$  オーダーになっており圧力一価が満たされていることが分かる。図は格子点数  $51 \times 51$ 、 $Ra = 1.0 \times 10^5$  のものである図9は速度ベクトル線図であり、図から物体の角では速度が大きく、キャビティーの角では速度が小さくなっていることが分かる。図は格子点数  $51 \times 51$ 、 $Ra = 1.0 \times 10^6$  のものである。

## 5 二物体を含む密閉容器内の自然対流



前章の単一の物体を含む場合を拡張し、複数の物体が配置された場合について本方法の検証を行う。

### 5.1 物体表面上の流れ関数の決定法 (二物体を含む場合)

前章と同様に圧力一価の条件を満たす流れ関数の決定法について述べる。前章の様に流れ場を以下のように便宜的に分離する。

$$\psi = \psi_1 + B(t)\psi_2 + C(t)\psi_3 \quad (15)$$

領域内部の渦度は、順に実際の渦度、渦なし、渦なしとする。

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0 \quad (16)$$

前章と同様にして各物体で評価される積分値は次式で表される。

$$I_{Lk} = \oint_s \frac{\partial \omega_{Lk}}{\partial n} |ds|, \quad I_{Rk} = \oint_s \frac{\partial \omega_{Rk}}{\partial n} |ds|$$

(但し  $k$  は *field* 番号で  $k = 1, 2, 3$ ) 壁面温度、積分値は各物体において線形に取り扱える事、実際の流れ場においては各物体についての積分値は零になる事、又左右の物体表面上の温度は表面全体が  $T_L = T_R = 1.0$  で一定なので  $T$  に関する一周積分の項は  $[\oint_s T dy]_L = [\oint_s T dy]_R = 0$  という事より係数  $B(t), C(t)$  は次式になる。

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{I_{R1} \cdot I_{L3} - I_{L1} \cdot I_{R3}}{I_{L2} \cdot I_{R3} - I_{R2} \cdot I_{L3}} \\ C(t) &= -\frac{I_{R1} \cdot I_{L2} - I_{L1} \cdot I_{R2}}{I_{L2} \cdot I_{R3} - I_{R2} \cdot I_{L3}} \end{aligned} \quad (17)$$

上式を用いることにより前章と同様に各物体における物体表面上及び壁面上の温度、物体表面上の流れ関数を一意に決定できる。

$$\begin{aligned} \omega_{Lb} &= \omega_{Lb1} + B(t)\omega_{Lb2} + C(t)\omega_{Lb3} \\ \omega_{Rb} &= \omega_{Rb1} + B(t)\omega_{Rb2} + C(t)\omega_{Rb3} \\ \psi_{Lb} &= \psi_{Lb1} + B(t)\psi_{Lb2} + C(t)\psi_{Lb3} \\ \psi_{Rb} &= \psi_{Rb1} + B(t)\psi_{Rb2} + C(t)\psi_{Rb3} \end{aligned} \quad (18)$$

## 5.2 計算方法

図??に示すような、一辺が単位長さの正方形の内部に縦の長さが 0.8、横の長さが 0.2 である物体をそれぞれ図のように配置し、前章同様壁面は物体壁を含み全て静止しているものとし、数値計算は前章と同じレイリー数、プラントル数、時間刻み幅、加速度係数、初期条件を用いた。

### 5.2.1 境界条件

前章同様境界上の温度は全過程を通じて一定である。又、図??のように境界上の温度は左右の物体上では共に  $T = 1.0$  であり、容器壁面上は  $T = 0.0$  である。各物体面上において未知の  $\psi_{Lb}, \psi_{Rb}$  を前章と同様に圧力一価の条件を満足するよう係数  $B(t), C(t)$  を各時間段階で決定していき式 (18) を用いて求める。又、分離された流れ場における境界面上の流れ関数は以下の値で固定する。

Tab. 4: Stream function on boundaries of flow field

	<i>field1</i>	<i>field2</i>	<i>field3</i>
vessel	$\psi_1 = 0$	$\psi_2 = 0$	$\psi_2 = 0$
left obstacle	$\psi_{Lb1} = 0$	$\psi_{Lb2} = 1$	$\psi_{Lb3} = 0$
right obstacle	$\psi_{Rb1} = 0$	$\psi_{Rb2} = 0$	$\psi_{Rb3} = 1$

## 5.3 計算結果

Tab. 5: Steady state value of fluid flux( $\times 10^{-2}$ )

Left

格子点数 \ $Ra$	$1.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^6$
$51 \times 51$	4.46	17.5	29.8
$81 \times 81$	1.70	6.70	10.9
$126 \times 126$	0.69	2.70	4.36

Tab. 6: Steady state value of fluid flux( $\times 10^{-2}$ )

Right

grid points \ $Ra$	$1.0 \times 10^5$	$5.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^6$
$51 \times 51$	4.46	17.5	29.8
$81 \times 81$	1.70	6.70	10.9
$126 \times 126$	0.69	2.70	4.36

表 5、6 はレイリー数と格子点数を変化させたときの左物体と右物体の周りの流量の定常値で流量が格子点数に依存している事がわかる。又、右物体周りの流量の値は負でその絶対値を示している。

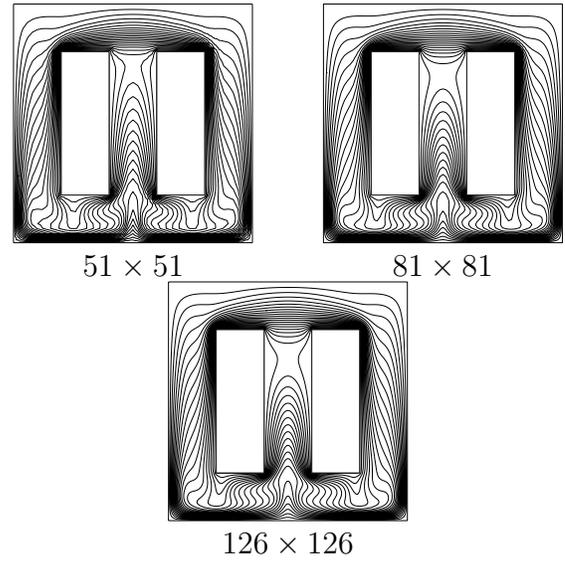


Fig. 10: Temperature contours( $Ra = 1.0 \times 10^6$ )

図 10 は  $Ra = 1.0 \times 10^6$  の等温線図で傾向としては流れが激しくなっているため等温線が物体間のスロットでは上部と下部で繋がっている。また、格子点数が少ないほど流れが激しくなっている。最大値は  $T = 1.0$ 、最小値は  $T = 0.0$ 、等温線は  $\Delta T = 5.0 \times 10^{-2}$  おきに引かれている。

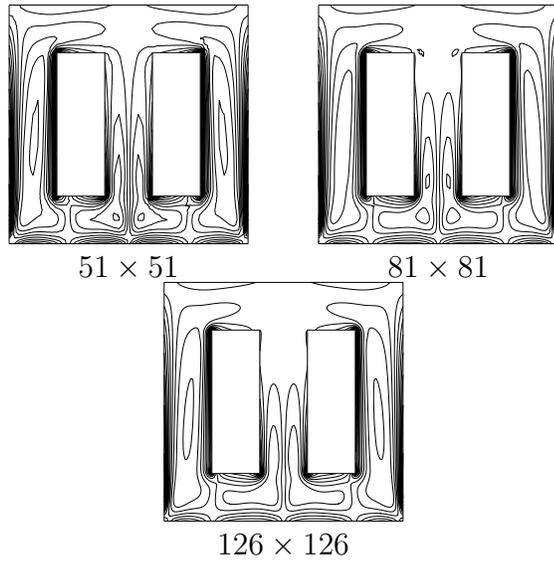


Fig. 11: Vorticity contours( $1.0 \times 10^6$ )

図 11 は  $Ra = 1.0 \times 10^6$  の等渦度線図でやはり格子点数による差が如実に現れている。図はそれぞれ等高線は最大値と最小値の間を 20 等分するように引かれている。

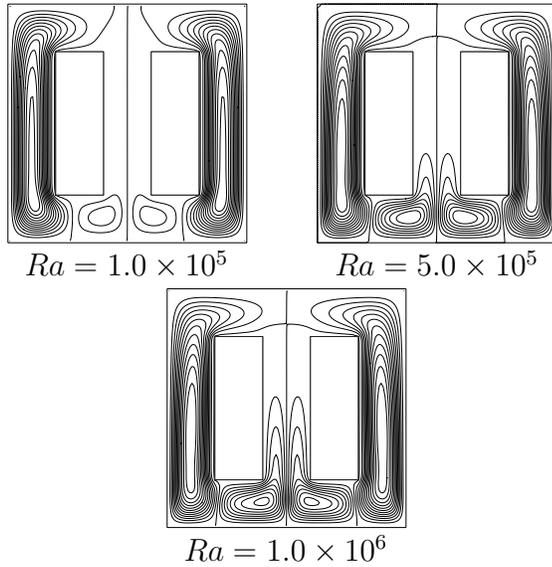


Fig. 12: Stream line

図 12 は格子点数  $126 \times 126$  での各レイリー数における流線で、 $Ra = 1.0 \times 10^5$  では物体の外側で流れが激しく物体間のスロットでは流れはほとんどない。 $Ra = 5.0 \times 10^5$  では物体間スロットの下で流れが強くなってきている。 $Ra = 1.0 \times 10^6$  では物体間スロットで流れが上に昇ろうとする傾向が等温線図と同様に見られる。すべての図について  $x = 0.5$  で直線が垂直に現れている。

## 6 粘性の変化するジャーナル・ベアリング内流れへの適用

二次元非圧縮性ナビエ-ストークス方程式の回転により得られる渦度輸送方程式及びエネルギー方程式を用いて

偏心しながら回転するシリンダーのような動的荷重のかかったジャーナル・ベアリングの熱力学的特性をモデル化して解く事が出来る。ジャーナルとベアリングの間にはニュートン流体の潤滑油が満たされている。ジャーナル・ベアリングの物理的特性である粘性は局所温度の関数として仮定する。

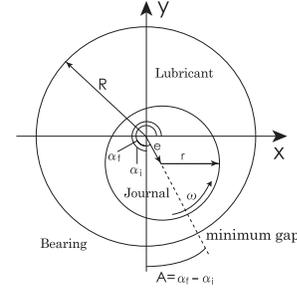


Fig. 13: Journal bearing geometry.;  $\alpha_i$ :initial angular position of journal center;  $\alpha_f$ :final angular position of journal center; A:attitude angle of journal

### 6.1 渦度・流れ関数表示による基礎方程式

二次元非圧縮性粘性流は、ナビエ-ストークス方程式および連続の式において、基礎変数である速度  $u, v$ 、圧力  $p$ 、時間  $t$  を用いて、動粘性係数  $\nu$  が変化するという事を考慮して以下のように表せる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left\{ \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left\{ \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Lambda \nu \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (22)$$

ここで、 $Re$  は慣性力と粘性力の比であるレイノルズ数であり、 $Pe$  はレイノルズ数  $Re$  と熱拡散係数と動粘性係数の比であるプラントル数  $Pr$  との積であるペクレ数であり、 $\Lambda$  は無次元化する際に現れるパラメータである。これらは全て無次元量でそれぞれ次のように定義される。

$$Re = \frac{U_o L_o}{\nu_o}, \quad Pe = Re \cdot Pr = Re \frac{\nu_o}{\kappa}, \quad \Lambda = \frac{\nu_o U_o}{c_p L_o T_o}$$

ここで式 (19)(20) において以下に定義される流れ関数  $\psi$ 、渦度  $\omega$  を導入することにより渦度輸送方程式が得られる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (23)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (24)$$

渦度輸送方程式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ &= \frac{1}{Re} \left\{ \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

更に式(23)(24)より、流れ関数に関するポアソン方程式が得られる。

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (26)$$

また、動粘性係数  $\nu$  と温度  $T$  の間には以下の関係がある。

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 T + \nu_3 T^2 \quad (27)$$

ここで  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  は Ferron<sup>5)</sup> ら (1983) の実験により定められた数値パラメータである。

## 7 結論

渦度・流れ関数表示法を用いて自然対流の数値計算を行った。物体面上の境界条件として必要な流れ関数の値を決定するため圧力一価の条件を導入し温度場のある領域に適用した。その結果以下の結論を得た。

- (1) 単一物体を含む場合の数値計算について格子点数に依存しない解が得られた。
- (2) 単一物体を含む場合の数値計算について圧力一価の条件が正確に満たされた。

### 今後の課題

- (1) 二物体を含む場合の数値計算の解はまだ格子点数に依存しているので、検討が必要である。
- (2) 今後、粘性の変化するジャーナル・ベアリング内流れの解析に本方法を用いて行きたい。

### 参考文献

- 1) 細見弘樹, "圧力一価の条件を用いた多重連結領域での流れの数値計算", (1996), pp1-16, 京都工芸繊維大学修士論文.
- 2) 岡田泰典, "移動格子法を用いた渦度・流れ関数法によるジャーナル・ベアリング流れの動的解析, 日本機械論文集 (B 編) 66 巻 643 号, (2000), pp641-646.
- 3) J.H.Adlam, "Computation of Two-Dimensional Time-Dependent Natural Convection in a Cavity where There Are Internal Bodies", Computers and Fluid Vol.14, No.2 (1985), pp141-157.
- 4) C.Wang and M.Damodaran, "Numerical Modeling of the Performance of Lubricated Journal Bearings Using Navier-Stokes Equations", IJCFD Vol.14, (2000), pp75-96.
- 5) J.Ferron, J.Frene and R.Boncompain, "A Study of the Thermohydrodynamic Performance of a Plain Journal Bearing Comparison Between Theory and Experiments", ASME J. Lubrication Tech. **105**, (1983), pp422-428.