

Semi-Lagrangian Schemeを用いた bluff bodyまわりの流れの3次元解析

Three-dimensional simulations of fluid flow around a bluff body by means of a Semi-Lagrangian scheme

伊藤嘉晃、理化学研究所情報環境室、〒351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1, itoh@postman.riken.go.jp
 姫野龍太郎、理化学研究所情報環境室、〒351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1, himeno@postman.riken.go.jp
 Yoshiaki Itoh, Advanced Computing Center, RIKEN, 2-1, Hirosawa, Wako-shi Saitama, 351-0198
 Ryutaro Himeno, Advanced Computing Center, RIKEN, 2-1, Hirosawa, Wako-shi Saitama, 351-0198

The flow around a bluff body is numerically simulated by means of a Semi-Lagrangian scheme for the convective term. The results of Semi-Lagrangian scheme are compared with those of third-order upwind scheme and previous experimental results.

1. はじめに 比較的レイノルズ数が高い bluff body (にぶい物体) まわりの流れ解析には高精度の風上差分法^[1]が導入され、様々な成果 (例えば^{[2][3]}) が挙げられた。この方法は、鈍い物体後流に生じる大規模な渦構造はとらえるものの、計算格子幅スケールより細かい渦構造は除去する。その結果、移流項から生じる数値不安定性は回避され安定な非定常解析が可能になった。

高次風上差分法を利用する場合、数値粘性項の大きさは計算格子幅に従って変化することから、数値粘性項が分子粘性項よりも大きい領域が現れると解は大きな影響を受けるために注意が必要であることが指摘されている^[4]。

現象の予測精度の向上のために、3次精度風上差分法(式(1))の数値粘性の係数(α)を数値不安定性が生じない程度に低減する。その結果高周波数の流速変動が比較的減衰せず、正方形角柱まわりの風圧力分布や後流流速分布の予測精度が向上することが報告されている^[5]。しかしながら、種々の問題に応じて変化する計算格子などの諸条件に対して、随時適切な数値粘性の

$$U_1 \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} = U_1 \frac{-u_{i,k+2} + 8(u_{i,k+1} - u_{i,k-1}) + u_{i,k-2}}{12\Delta\xi_1} \quad (1)$$

$$+\alpha|U_1| \frac{u_{i,k+2} - 4u_{i,k+1} + 6u_{i,k} - 4u_{i,k-1} + u_{i,k-2}}{12\Delta\xi_1}$$

係数を設定することは非常に難しい。数値粘性項の寄与を低減するための他の方法として、計算格子幅をより小さくすることが考えられる。この方法は格子点数を増加させるために計算機資源の点から低減できる度合いには限界がある。

このような風上差分法で生じる数値粘性項の取り扱いの難しさを回避しつつも安定な非定常解析を実行するために、移流項の離散化に関してSemi-Lagrangian scheme (SL法)を導入する。最初に1次元の線形の波動方程式に対してSL法と3次精度風上差分法(UPW法)を用いて解析を行い厳密解と比較する。その後、円柱まわりの3次元流れに対して両方の手法を適用し既往の実験結果と比較することにより、SL法の予測精度を調べることを目的とする。

2. Semi-Lagrangian schemeの概略 Semi-Lagrangian schemeは移流方程式(2)に対して^{[6][7][8]}、図1(例として2次元を取り上げた)に示すように、ある計算格子点(位置ベクトル \mathbf{r})の次ステップ($n+1$)の物理量 f^{n+1} は、移流速度から算出される上流の点((4)式で決まる位置ベクトル \mathbf{r}_0)での現ステップ(n)の物理量 f_0^n に等しい(式(3))ことを利用する。ここで点 \mathbf{r}_0 は必ずしも計算格子点に一致するとは限らないので、 f_0^n の物理量は、 \mathbf{r}_0 の点を囲む周囲の格子点上の f などから内挿して決定される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \quad (2)$$

$$f(\mathbf{r}, t + \Delta t) = f(\mathbf{r}_0, t) \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{u}\Delta t \quad (4)$$

点 \mathbf{r}_0 は必ずしも格子点 \mathbf{r} に隣接している必要はないので、

クーラン数が大きい場合でも安定して時間進行が行える。本手法は、剥離に伴って局所的に平均流が著しく増速する現象が現れるにぶい物体まわりの流れ解析に好都合である。また、移流方程式に陰的な時間積分法を適用した場合のように連立一次

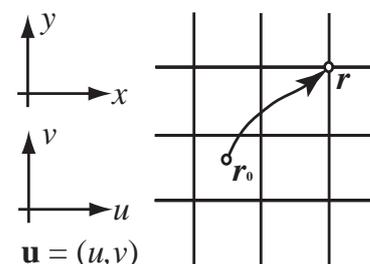


Fig. 1 Concept of Semi-Lagrangian scheme in 2D-space

方程式を解く必要がない点で計算負荷は小さい。SL法は過去にWei Jia^{[6][7][8]}によって、陰解法を使わずに時間積分間隔を大きくとる手法として、円柱まわりの流れ解析に適用されている。

3. 1次元線形波動方程式への適用 最初にSL法の解の性状を、(5)式に示すような1次元の線形の波動方程式($c=1.0$)を用

いて調べる。時間積分に2次精度のAdams-Bashforth法、対流項に3次精度の風上差分法(式(1)の $\alpha=1.0,3.0$)を用いたUPW法の結果と比較される。

SL法では上流点の決定に式(4)を用い、 $f(r_0, t)$ の算出にあたり、 r_0 の両側にある差分格子点 i と $i-1$ における関数 f と f の空間一回微分($\partial f / \partial x$)を用いて式(6)の3次関数で補間する。ただし、 $\partial f / \partial x$ の計算には(7)のような4次精度の中心差分を用いる(3次のエルミート補間)⁹⁾。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$f_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-f_{i+2} + 8(f_{i+1} - f_{i-1}) + f_{i-2}}{12\Delta x} \quad (7)$$

解析領域として $0 < x < 2\pi$ を設定し、初期条件として、

$$f(x, 0) = \begin{cases} \{1 - \cos(2x - \pi)\} & , 0.5\pi < x < 1.5\pi \\ 0 & , otherwise \end{cases} \quad (8)$$

を与える¹⁰⁾。x方向には周期条件を与えた。計算格子幅(Δx)は、 $2\pi/64$ とした。時間積分間隔(Δt)は $\pi/160$ とした。クーラン数(Courant number= $c(\Delta t/\Delta x)$)は0.2となる。 $m=10,20,30,40$ 後までの時間進行を行い($t=2\pi m$)、 f の空間分布を厳密解(=初期条件)と比較する(図2)。

3次精度の風上差分法($\alpha=3.0$)を用いた $x=\pi$ でのピーク値は時間が進むにつれて減少している。 $\alpha=1.0$ の $x=\pi$ でのピーク値の減少は $\alpha=3.0$ に比べると少ないが、 $\alpha=1.0$ の $x=1.5\pi$ 近傍で現れる負値は、 $\alpha=3.0$ の $x=1.5\pi$ 近傍で現れる負値よりも小さくなっている。時間が経過するにつれて f の分布が下流側に偏る性状が現れている。一方、Semi-Lagrangian schemeでは $x=0.5\pi, 1.5\pi$ 付近を除いて、 f の振幅、位相ともほぼ厳密解に一致している。

4. SL法を用いた流体解析手法

本節では、SL法を利用して円柱まわりの流れ解析を行うた

めの手法を示す。非圧縮粘性流体の支配方程式として以下の3次元の連続式及びNavier-Stokes式を用いる。流速を u_i 、圧力を p 、レイノルズ数 $Re=U_0 D/\nu$ 、 U_0 :基準流速=接近流速、 D :基準長さ=円柱直径、 ν :動粘性係数)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (10)$$

最初に解析アルゴリズムについて述べる。Fractional step法を用い(10)式を時間に関して離散化すると下記のように示される。

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (11)$$

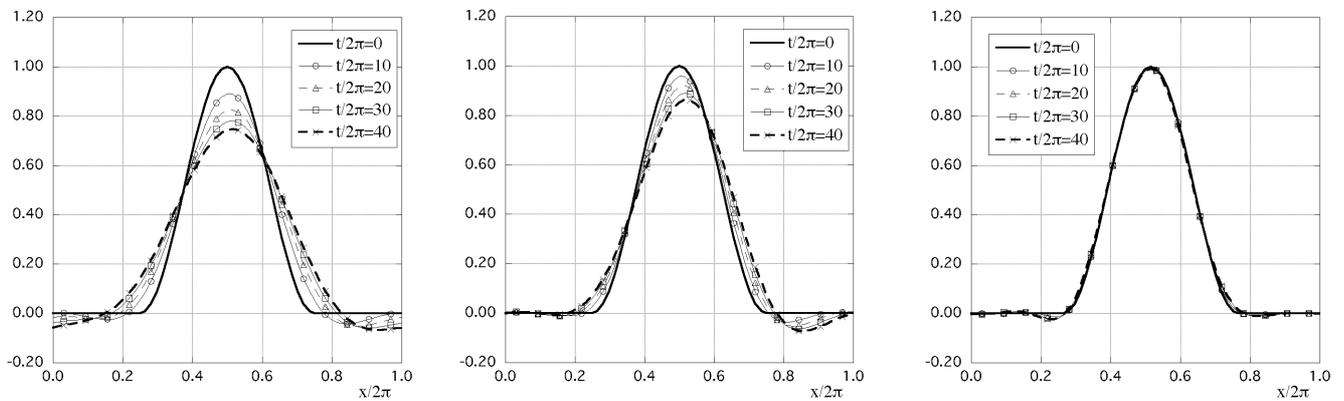
$$\frac{u_i^{**} - u_i^*}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^{**}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (12)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{**}}{\Delta t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (13)$$

(11)式の移流項の計算方法は後で詳述する。(12)式の粘性項の計算に関して、時間積分には1次の陰的Euler法を用い空間離散化には2次精度中心差分を用いる。圧力に関してはまず、(13)式に対してdivergenceをとり次タイムステップ($n+1$)で(9)式が成立するとして導かれた(14)式を解いて ϕ を求める。右辺・左辺項とも2次精度中心差分を用いる。(14)のPoisson方程式はSLOR法により解かれる。ここで ϕ から(15)式を用いて圧力 p^{n+1} を求める。同時にまた(13)式を用いて u_i^{n+1} を決める。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^{**}}{\partial x_i} \quad (14)$$

$$p^{n+1} = \phi - \frac{\Delta t}{Re} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} \quad (15)$$



(a) Third-order upwind scheme($\alpha=3.0$) (b) Third-order upwind scheme($\alpha=1.0$) (c) Semi-Lagrangian scheme with Cubic Hermite interpolation

Fig. 2 Time variation in numerical solution of one-dimensional convective equation(Courant number=0.2)

支配方程式の空間の離散化に際して、物体まわりの境界層や後流域に計算格子を集めて複雑な流れの構造をとらえる必要があるために一般座標系が導入される。流速と圧力は同一点上に定義される regular 格子を用いた。

最後に移流項の計算手法について示す。移流項にはSL法とUPW法が用いられ、移流項の計算手法の相違が解に与える影響が6節で検討される。

最初にSL法について述べる。(11)式に対して一般座標系を導入すると(16)式になる。

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = 0 \quad (16)$$

ここで $U_j = u_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}$ は反変速度である。

一般座標系におけるSemi-Lagrangian schemeは、(16)式のように計算空間の移流速度（反変速度）と座標(ξ_j)で表現されている。前述の2節の表記を参考にすると、計算空間の格子幅を1にしているので、計算空間上の r_0 の位置は、 r の位置の格子点番号と反変速度から算出される移流距離を用いて直接算出できる^{[6][7]}。本解析では移流距離の計算に2節の(4)式を用いるので、 $r_0 = (\xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \xi_{0,3})$ は(17)式のように示される。

$$\xi_{0,j} = \xi_j - U_j \Delta t \quad (17)$$

ここで U_j は、タイムステップ n 、計算格子点 $r = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ での反変速度を示す。 r_0 における流速 u_i は、主に3次元の3次補間関数^[11]を用いて決定される。3次補間関数の係数決定にあたり必要な格子点上の空間1階微分には、(7)式のような4次精度中心差分を用いる。高レイノルズ数流れに対応するためにWei

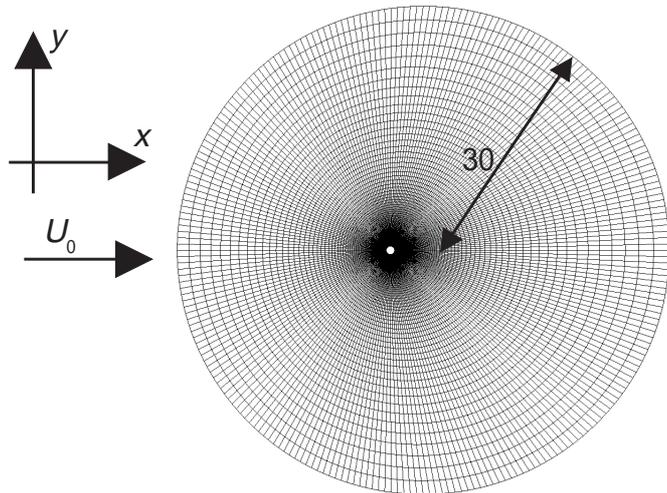


Fig.3 Grid system

Table. 1 Number of grid points

Model name	i direction	j direction	k direction
SL	240	120	20
UPW	240	120	20
UPW-FG1	480	120	20
UPW-FG2	480	120	40
UPW-FG3	480	180	40

Jai は3次精度風上差分法⁽¹⁾を用いていた^{[7][8]}が、本研究ではエイリアジングエラーの発生に対して補間関数を1次に切り替えることにより対応した。

次にUPW法について述べる。時間積分には1次の陽的Euler法を、移流項の空間離散化に対して3次精度の風上差分法(式(1)における $\alpha=3$)を用いる。

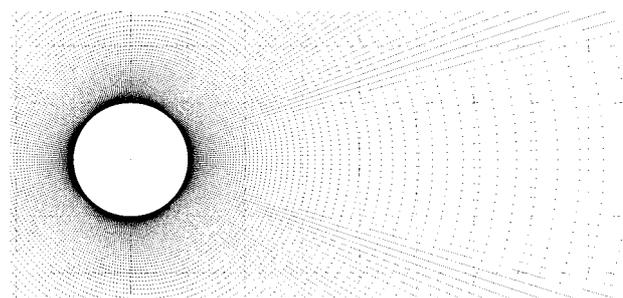
5. 解析モデル

解析対象として、一様流が接近する円柱まわりの流れをとりあげ、レイノルズ数 Re は3900を設定した。円柱直径を基準長さ1として、半径30の円筒状の計算格子を円柱まわりに作成した(図3)。円柱のスパン方向長さは1.0とした。円柱表面の最小格子幅はほぼ0.00144である。格子系としてO型格子を用い、計算格子点数は表1のように設定した(i は円柱の周方向、 j は円柱の法線方向、 k は円柱のスパン方向)。UPW法は数値粘性項の大きさを変更するために、合計4種類の計算格子を設定した。境界条件として、円柱表面では流速にはno-slip条件、圧力には法線方向の勾配が0の条件を課した。流入条件として流速を $u=1.0, v=w=0$ 、流出部の境界での流速は線形外挿により決める。流入流出部分とも圧力は0を与えた。スパン方向には周期境界条件を課した。時間積分間隔は両手法ともに $\Delta t=0.002$ とした。

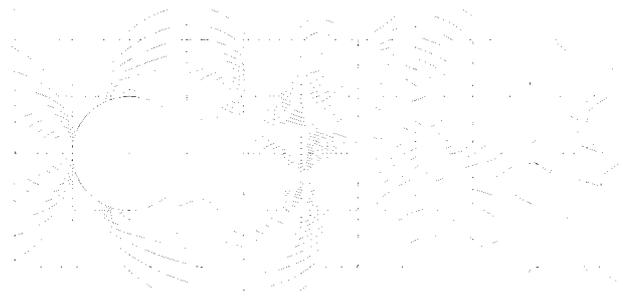
6. 解析結果

6.1 SL法の実行速度 計算には理化学研究所のVPP700E (ピーク性能2.4 GFLOPS/PE (=Processor Element))を用いた。1PEのSL法(モデル名SL法)の場合実行速度は881MFLOPS(ベクトル化率99.2%)、1PEのUPW法(モデル名UPW法)で878MFLOPS(ベクトル化率99.2%)であった。SL法で1タイムステップ時間進行するのに必要な計算時間は、UPW法の約1.13倍であった。

6.2 SL法の瞬間流れ場 最初にSL法を用いて得られた円柱まわりの瞬間圧力分布を示す(図4)。円柱から離れた下流



(a) Grid



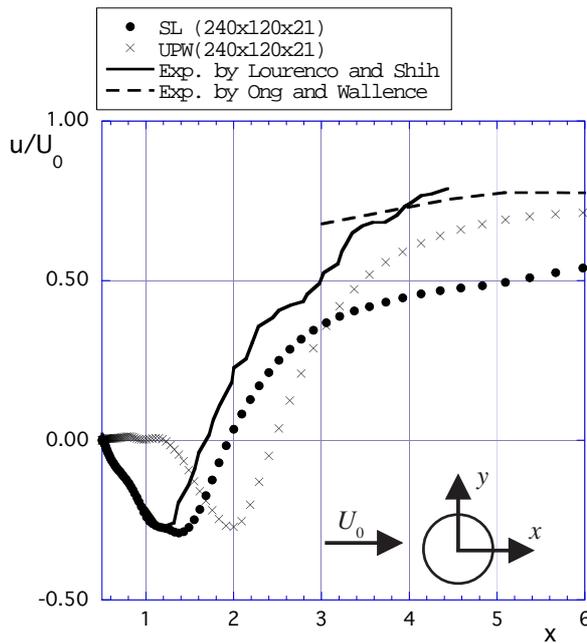
(b) Pressure

Fig.4 Instantaneous pressure contours around a circular cylinder

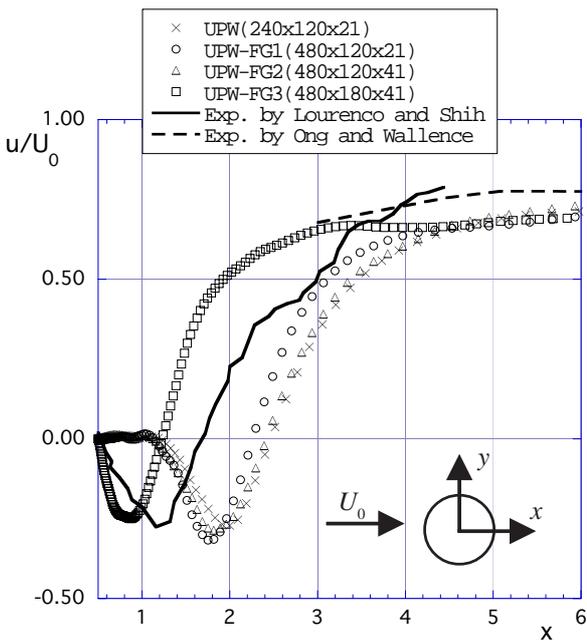
領域で等圧線に一部振動が現れているものの、後流にカルマン渦が形成されていることから、安定な非定常解析が行えていることが確認できる。

6.3 円柱後流の流速分布の比較 円柱後流の性状を定量的に検討するために、円柱中心を原点として円柱下流側の $y=0$ に沿った流下方向平均流速分布を図5に示す。同一の格子点数を用いたSLとUPWを比較すると(図5(a))、SLの結果は、UPWの結果に比べて円柱背面の $x=0.5 \sim 2.0$ での後流の逆流域が良くとらえられており、実験結果^[12]に非常に近くなっている。しかしながら、ある程度円柱から離れた領域($x=3.0 \sim 6.0$)では流速の回復が少なくなっており、UPWの方が実験結果に近くなっている。

UPW法で各方向の格子点数を増加させた場合(図5(b))、円柱周方向に格子点数を増大させると(UPW-FG1)、流速分布が



(a) Comparison between SL and UPW



(b) Effect of number of grid points in UPW

Fig.5 Time-averaged streamwise velocity($y=0$)

実験結果に近寄る方向に向かうが、周方向に加えてスパン方向の格子点数を増大させる(UPW-FG2)と実験結果から離れる。スパン方向の境界条件及び解析領域の大きさの設定の問題があるものと考えられる。円柱の法線方向の格子点数を1.5倍にすると(UPW-FG3)、逆流域が円柱に非常に近寄る性状が現れた。円柱の巻き込み渦の形成位置が、他のUPWモデルに比べて上流側へ移行したものと考えられるが、その原因については今後の課題としたい。

6.4 円柱まわりの圧力分布の検討

続いて、円柱表面の時間平均圧力分布を図6に示す。横軸には渦み点近傍の位置($x=-0.5, y=0$)から計った円柱の中心角を示している。90(deg)の位置は、 $x=0, y=0.5$ 、180(deg)の位置は、 $x=0.5, y=0$ になる。SLの結果は、中心角45 ~ 180(deg)の領域において実験結果($Re=1500$)^[13]より圧力値が大きくなっており、圧力回復する角度は実験結果に比べて上流側になっている。UPW、UPW-FG1、UPW-FG2の結果はSLの結果とほとんど一致している。唯一異なった性状を示しているのが、UPW-FG3

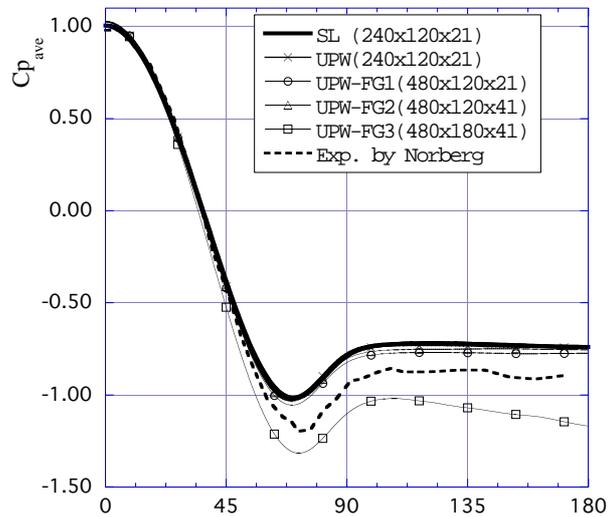


Fig.6 Time-averaged pressure distribution around a circular cylinder

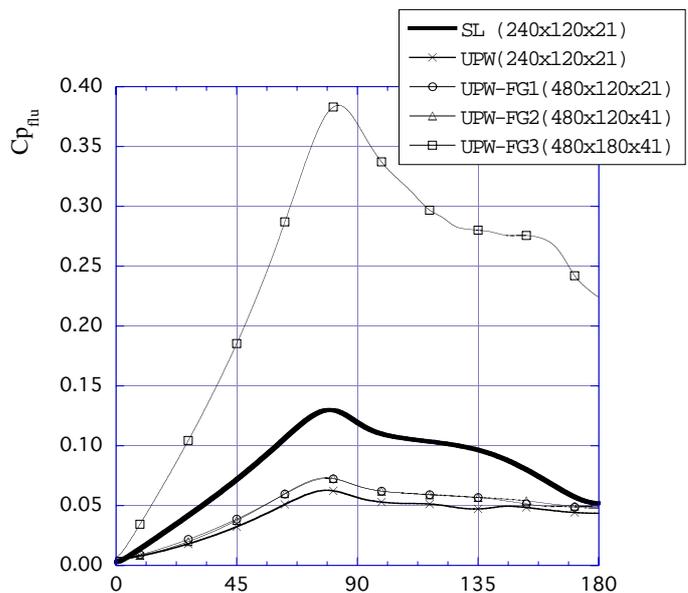


Fig.7 Distribution of pressure fluctuation around a circular cylinder

の結果であり圧力が回復する角度は実験結果にほぼ一致しているが、中心角 45 ~ 180(deg)の領域で、実験値よりも低い圧力が生じている。

つづいて円柱まわりの変動圧力分布を示す。SL の変動圧力分布は、UPW-FG3、SL、UPW-FG1 と UPW-FG2、UPW の順に小さくなっている。図5(b)で示した円柱の逆流領域の大きさに対応したものになっていることを考慮すると、比較すべき実験データがないもののSL法の変動圧力の予測精度が高いことが期待される。

7. 結論

1. Semi-lagrangian schemeを用いた一般座標系の3次元非圧縮粘性流体解析法を構築し、 $Re=3900$ の円柱まわりの流れの非定常解析を行うことができた。
2. SL 法の結果は、円柱後流の逆領域の大きさに対する予測精度は比較的良好な結果が得られた。円柱まわりの平均圧力分布は定性的には既往の実験結果と一致する結果が得られた。

参考文献

- [1]T. Kawamura, H. Takami and K. Kuwahara, Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness, Fluid dynamic research 1 , pp.145-162, (1986)
- [2]R. Himeno, S. Shirayama, K. Kamo and K. Kuwahara, Computational study of three-dimensional wake structure, AIAA paper, 85-1617 (1985)
- [3]T. Tamura, I. Ohta and K. Kuwahara, On the reliability of two-dimensional simulation for unsteady flows around a cylinder-type structure, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 35, pp. 275-298(1990)
- [4]松宮輝、木枝香織、谷口伸行、小林敏雄、3次精度風上差分法による二次元円柱まわり流れの数値シミュレーション、日本機械学会論文集(B編)59巻566号(1993-10)
- [5]Y. Ono and T. Tamura, Large eddy simulation using curvilinear coordinate system for the flow around a square cylinder, Computational Wind Engineering2000(2000)
- [6]Wei Jia, Semi-Lagrangian scheme 法による非圧縮性流の計算法について、pp. 513-514, 第11回数値流体力学シンポジウム(1997)
- [7]Wei Jia, An accurate Semi-Lagrangian scheme designed for incompressible Navier-Stokes equations written in generalized coordinates, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. ,Vol. 41, No. 133 (1998)
- [8]Wei Jia, Semi-Lagrangian 法の高レイノルズ数流れへの適用、pp. 327-328, 第12回数値流体力学シンポジウム(1998)
- [9]矢部孝、肖鋒:(解説)固体・液体・気体の統一解法とCIP法(1)、数値流体力学第7巻第2号(1999年1月),pp. 70-81
- [10]梶島岳夫:非圧縮流れのための上流補間法、日本機械学会論文集(B編)60巻578号(1994-10),pp. 3319-3326
- [11]T. Yabe, Y. Ishikawa, P. Y. Wang, T. Aoki, Y. Kadota and F. Ikeda, A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II Two- and three-dimensional solver, Computer Physics Communications 66, pp. 233-242(1991)
- [12]Arthur G. Kravchenko and Parviz Moin: Numerical Studies of flow over a circular cylinder at $Re_D=3900$, Vol. 12, No. 2, Physics of Fluids(2000),pp. 403-417
- [13]C. Norberg : An experimental investigation of the flow around a circular cylinder, Influence of aspect ratio, J. Fluid Mech. 258(1994),pp. 287-316